

# РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

The background is a solid teal color. On the right side, there are several white lines of varying lengths and thicknesses, all slanted upwards from the bottom-left towards the top-right, creating a dynamic, modern feel.

# Основные виды задач

## Нахождение угла

- 1) между прямыми;
- 2) между прямой и плоскостью;
- 3) между плоскостями;

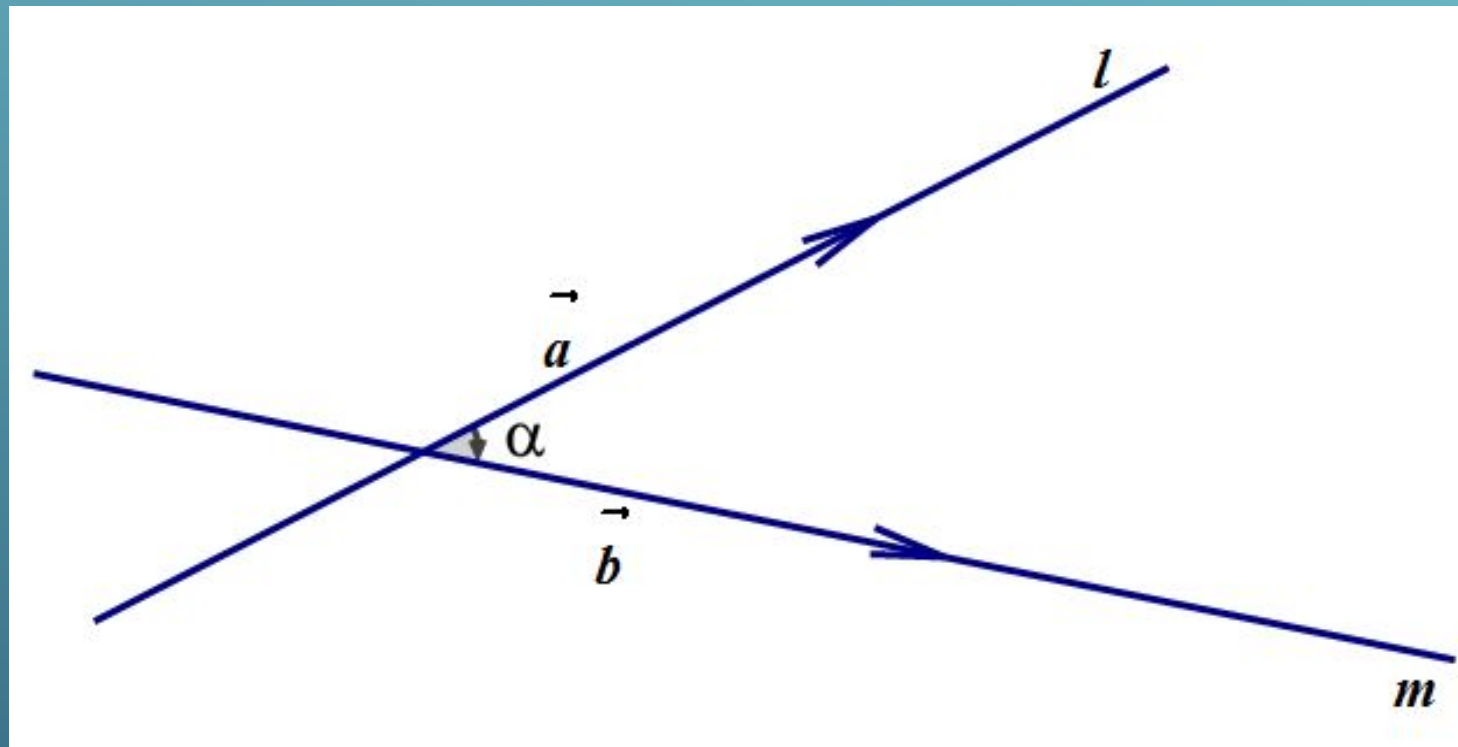
## Нахождение расстояния

- 4) от точки до прямой;
- 5) от точки до плоскости;
- 6) между двумя скрещивающимися прямыми.

# Угол между прямыми

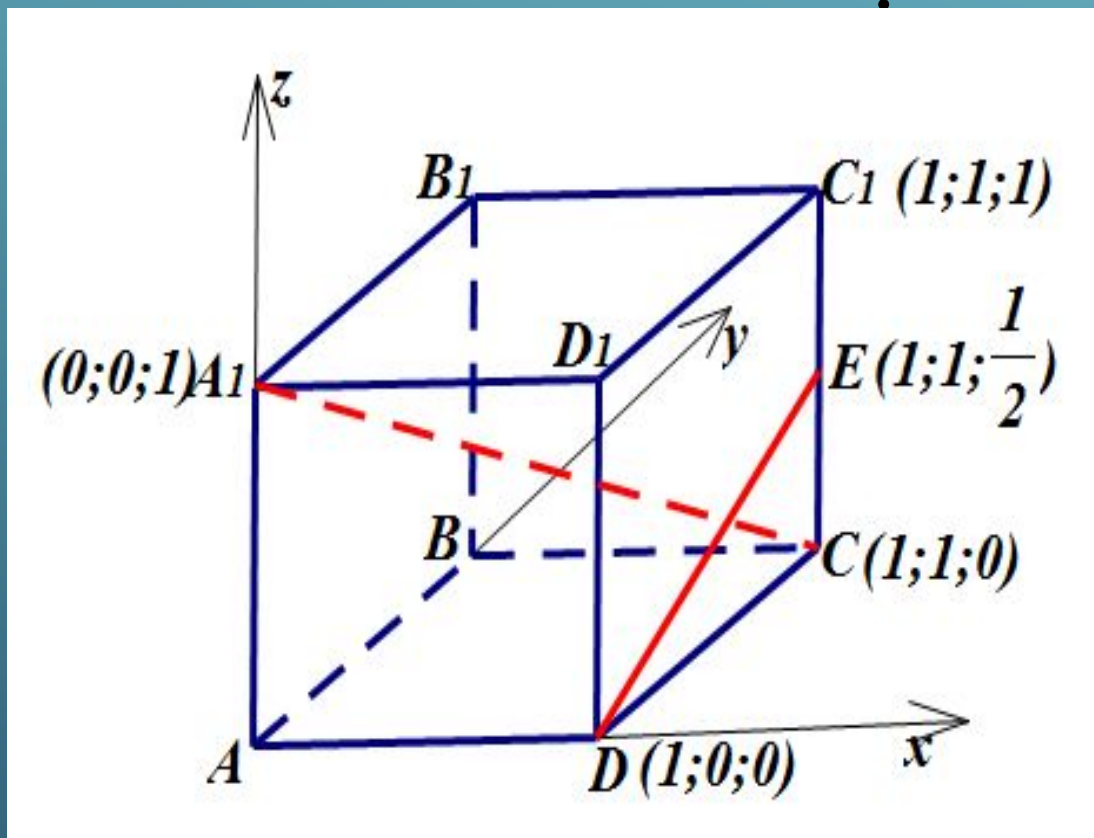
$$\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$$

$$\text{и } \vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$$



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

№1. В кубе ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> найдите угол между прямыми A<sub>1</sub>C и DE, если E - середина ребра CC<sub>1</sub>



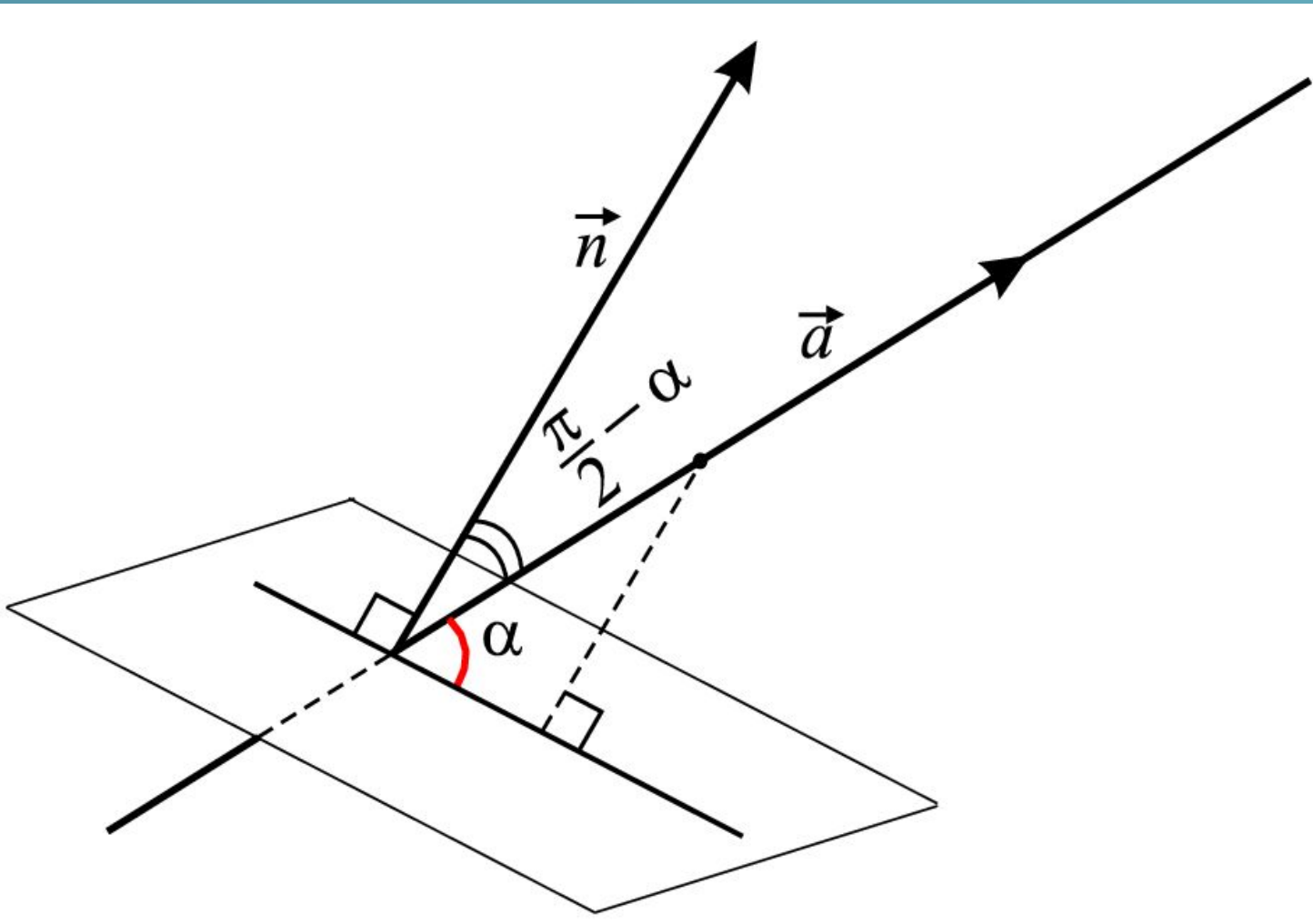
$$\overrightarrow{A_1C} \{1;1;-1\}$$

$$\overrightarrow{DE} \left\{ 0;1;\frac{1}{2} \right\}$$

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 0,5|}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$

# Угол между прямой и плоскостью



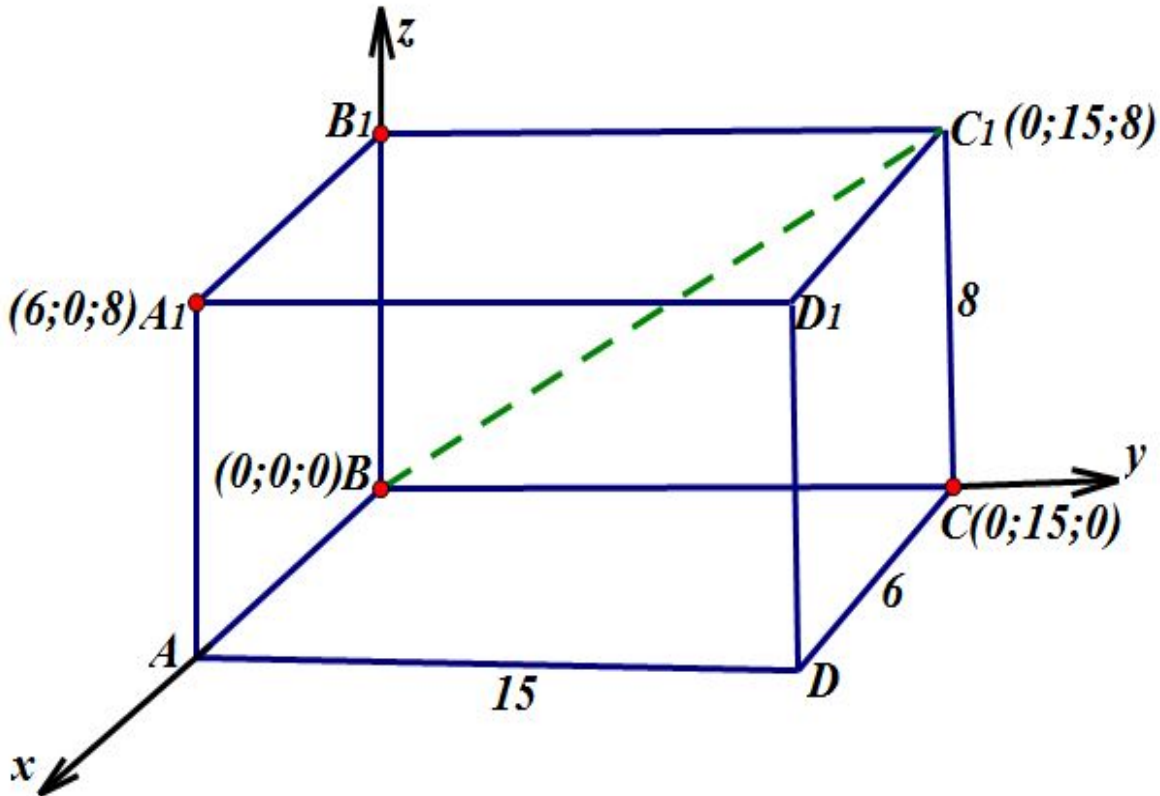
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$$

$\vec{a}$  – направляющий  
вектор прямой  
 $\vec{n}$  – вектор нормали к  
плоскости

Уравнение плоскости:  
 $ax+by+cz+d=0$

$\vec{n}\{a;b;c\}$

№2. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между плоскостью  $A_1 B C$  и прямой  $B C_1$ , если  $AA_1 = 8$ ,  $AB = 6$ ,



Уравнение плоскости:  $ax+by+cz+d=0$  (1)

$B(0;0;0): a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, d = 0$

$A_1(6;0;8): 6a + b \cdot 0 + 8c + 0 = 0, 6a + 8c = 0$

$C(0;15;0): 0a + 15b + 0c + 0 = 0, 15b = 0, b = 0$

$6a + 8c = 0 \quad a = -\frac{4}{3}c$

$BA_1C: 4x - 3z = 0 \quad \vec{n} \{4; 0; -3\}$

$\vec{BC_1} \{0; 15; 8\}$

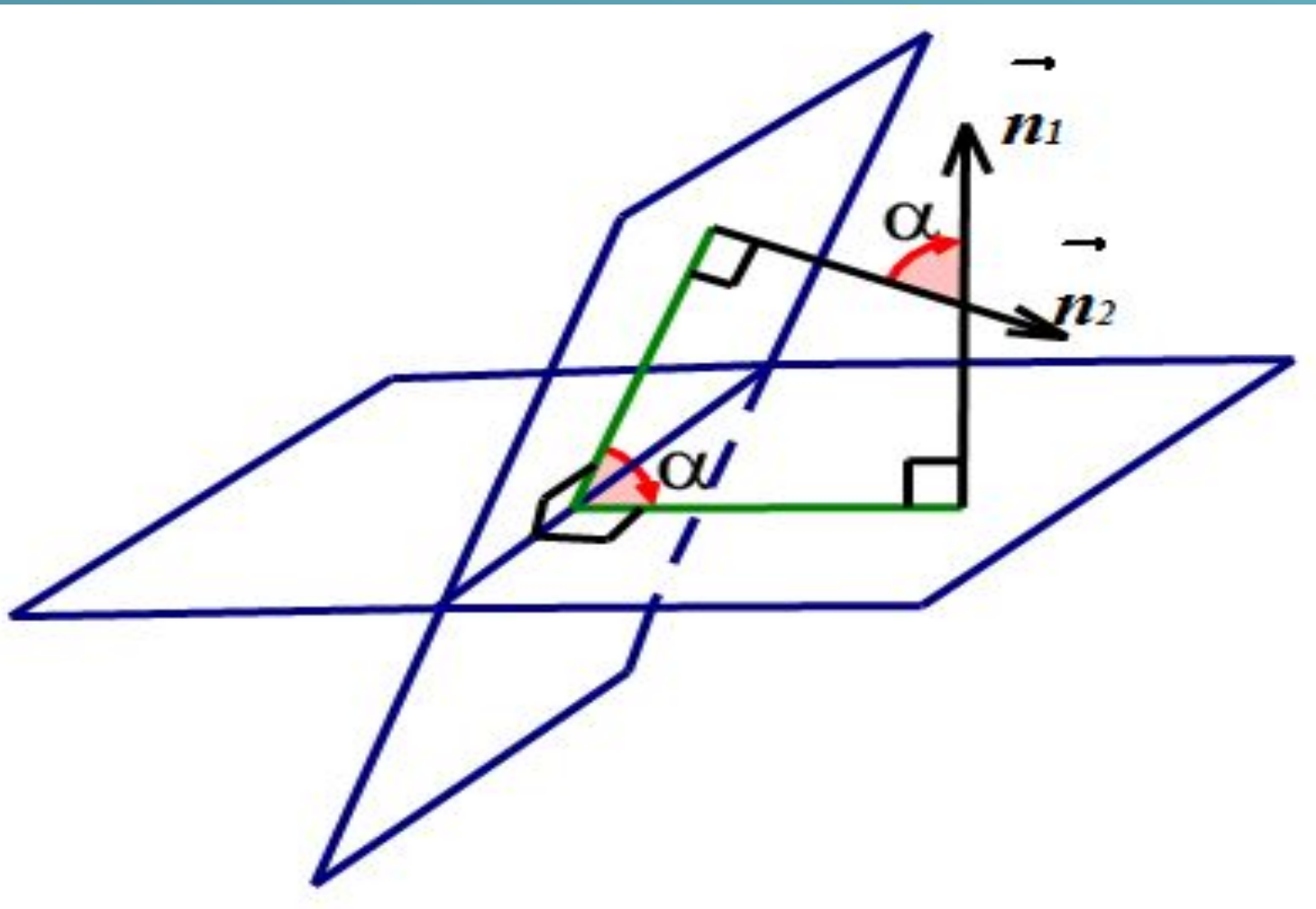
Пусть  $\alpha$  – угол между  $BC_1$  и плоскостью  $BA_1C$

$\sin \alpha = \frac{|-24|}{5 \cdot 17} = \frac{24}{85}$

$\alpha = \arcsin \frac{24}{85}$

**Ответ:**  $\arcsin \frac{24}{85}$

# Угол между плоскостями

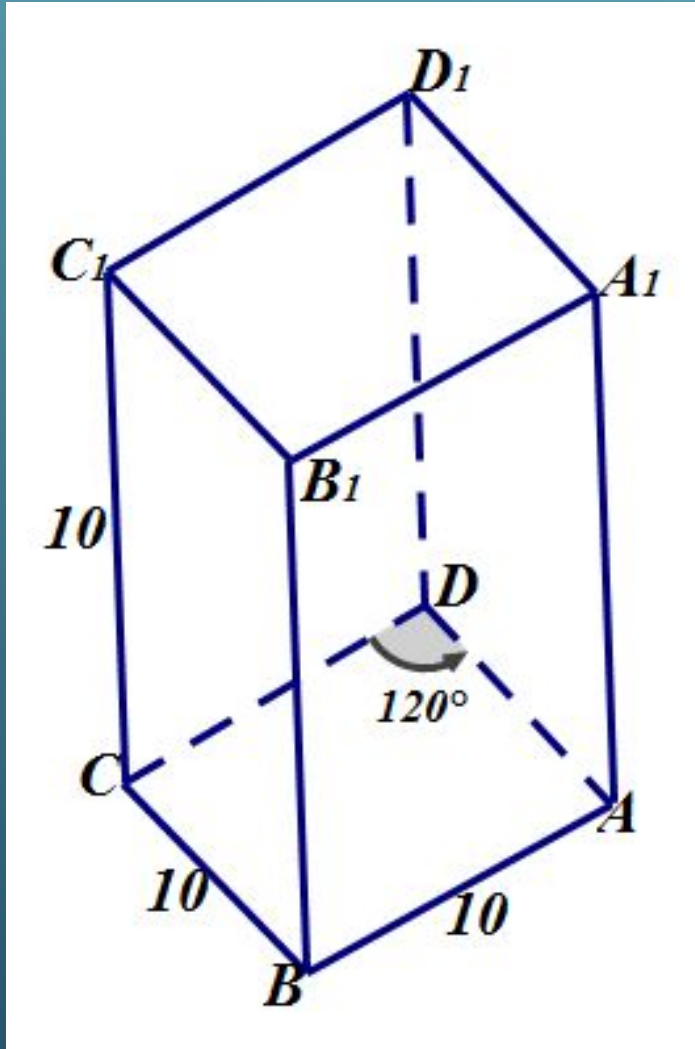


$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

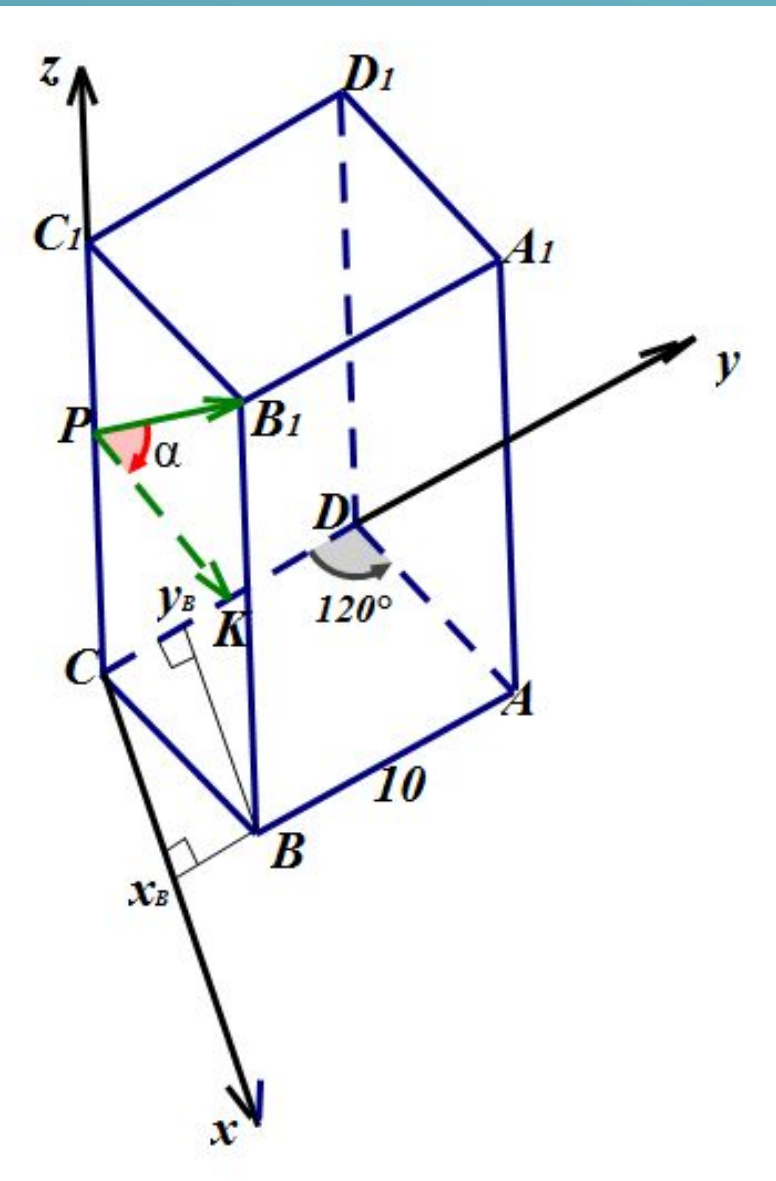


№3. Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб с тупым углом  $B$ , равным  $120^\circ$ . Все ребра этой призмы равны 10. Точки  $P$  и  $K$  – середины ребер  $CC_1$  и  $CD$  соответственно.

- Докажите, что  $PK$  и  $PB_1$  перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $PKB_1$  и  $C_1 B_1 B$ .







a)  $C(0;0;0)$ ,  $C_1(0;0;10)$ ,  $P(0;0;5)$ ,  $K(0;5;0)$ ,

$B(5\sqrt{3}; 5,0)$ ,  $B_1(5\sqrt{3}; 5; 10)$ .

$\vec{PK} \{0;5;-5\}$ ,  $\vec{PB}_1 \{5\sqrt{3};5;5\}$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{PK} \cdot \vec{PB}_1|}{|\vec{PK}| \cdot |\vec{PB}_1|} = \frac{|0 \cdot 5\sqrt{3} + 5 \cdot 5 + (-5) \cdot 5|}{\sqrt{0^2 + 5^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2 + 5^2}} = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$b) \vec{n}_1 \perp PKB_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{PK}, \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{PB_1}, \vec{n}_1 \{x, y, z\}$$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PK} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PB_1} = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \cdot x + 5 \cdot y - 5 \cdot z = 0 \\ 5\sqrt{3}x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$y = z, 5\sqrt{3}x + 5z + 5z = 0, 5\sqrt{3}x = -10z, x = \frac{-2z}{\sqrt{3}}$$

$$y = 1, z = 1, x = \frac{-2}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{n}_1 \left\{ \frac{-2}{\sqrt{3}}; 1; 1 \right\}$$

$$\vec{n}_2 \perp BC_1B_1 \Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{CC}_1, \vec{n}_2 \perp \vec{CB}, \vec{n}_2 \{x, y, z\},$$

$$\vec{CC}_1 \{0; 0; 10\}, \vec{CB} \{5\sqrt{3}; 5; 0\}$$

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{CC}_1 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{CB} = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 10 \cdot z = 0 \\ 5\sqrt{3}x + 5y + 0z = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ y = -\sqrt{3}x \end{cases}$$

$$x = 1, y = -\sqrt{3}, z = 0$$

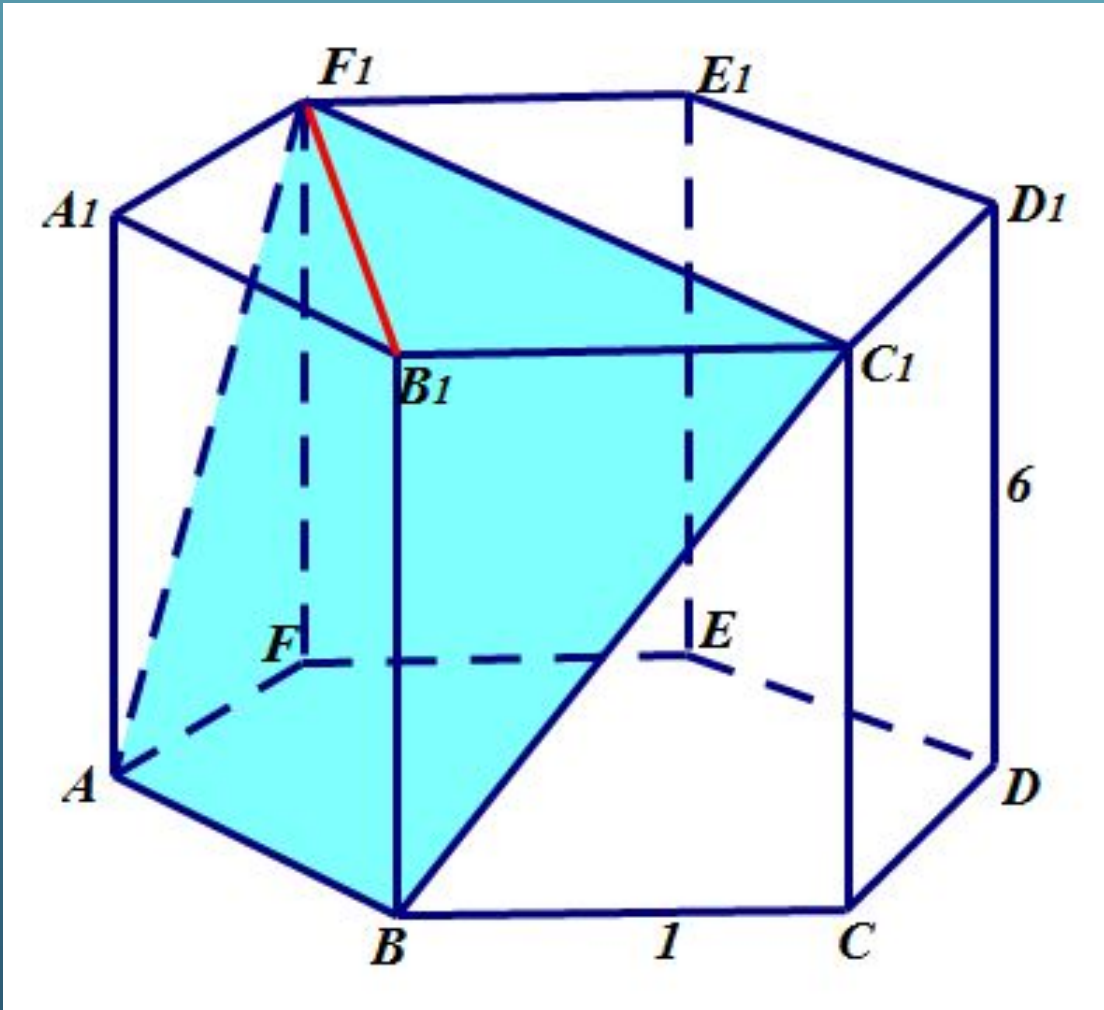
$$\vec{n}_2 \{1; -\sqrt{3}; 0\}$$

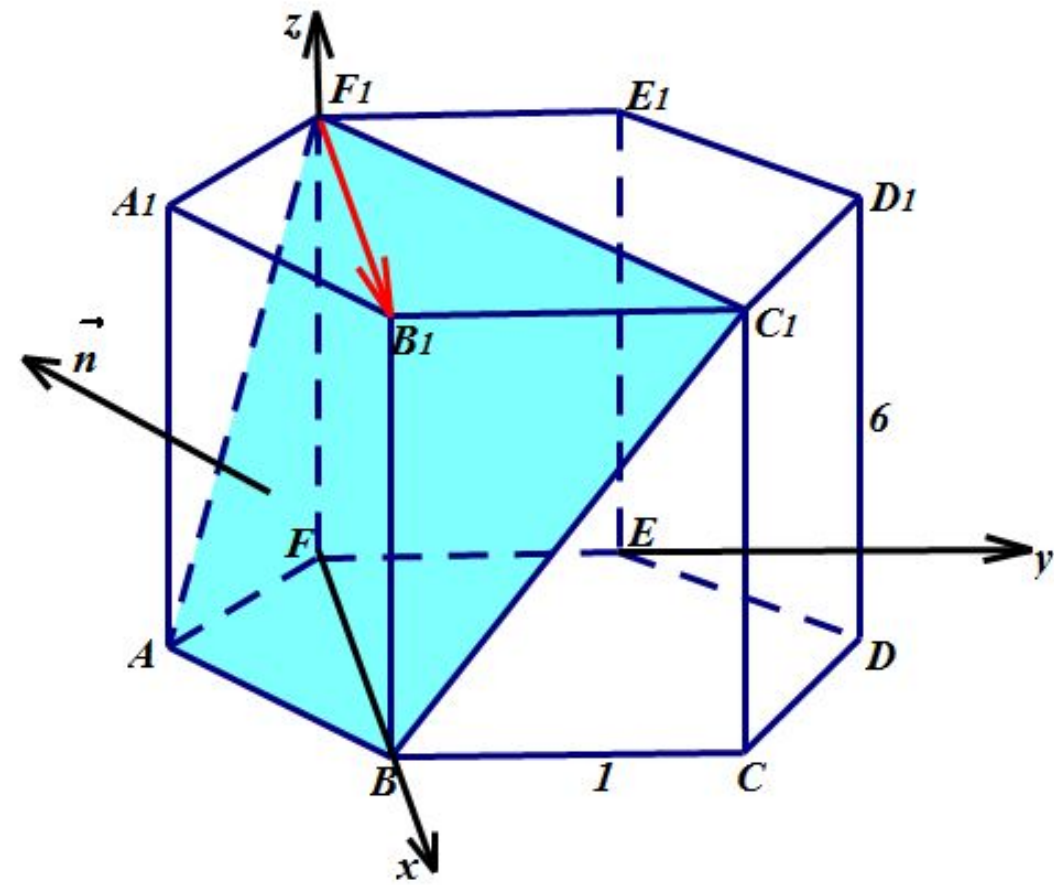
$\varphi$  – угол между плоскостями  $BB_1C_1$  и  $PKB_1$

$$\cos \varphi = \frac{\left| 1 \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} + 1 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 0 \right|}{\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$$

№5. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  сторона основания равна 1, а высота равна 6. Найдите угол между прямой  $B_1 F_1$  и плоскостью  $A F_1 C_1$ .





$$F(0; 0; 0), F_1(0; 0; 6)$$

$$\triangle ABF \quad AF = BF = 1 \quad \angle A = 120^\circ$$

По теореме косинусов  $BF^2 = AF^2 + AB^2 - 2 \cdot AF \cdot AB \cdot \cos A =$

$$= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3, \quad BF = \sqrt{3}$$

Аналогично находим EC,  $EC = \sqrt{3}$

$$B_1(\sqrt{3}; 0; 6), C_1(\sqrt{3}; 1; 6)$$

$$\overrightarrow{F_1B_1} \{ \sqrt{3}; 0; 0 \}$$

$$\vec{n} \perp BF_1C_1 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BC_1}, \vec{n} \perp \overrightarrow{BF_1}, \vec{n} \{ x, y, z \}$$

$$\overrightarrow{BC_1} \{ 0; 1; 6 \}, \quad \overrightarrow{BF_1} \{ -\sqrt{3}; 0; 6 \}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF_1} = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y + 6 \cdot z = 0 \\ -\sqrt{3}x + 0 \cdot y + 6z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -6z \\ x = \frac{6z}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad z =$$

$$y = -6, x = \frac{6}{\sqrt{3}}, z = 1$$

$$\vec{n} \left\{ \frac{6}{\sqrt{3}}; -6; 1 \right\}$$

$\alpha$  – угол между плоскостью  $BF_1C_1$  и прямой  $B_1F_1$

$$\sin \alpha = \frac{|\sqrt{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} + 0 \cdot (-6) + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-6)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{49}} = \frac{6}{7 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{7}$$