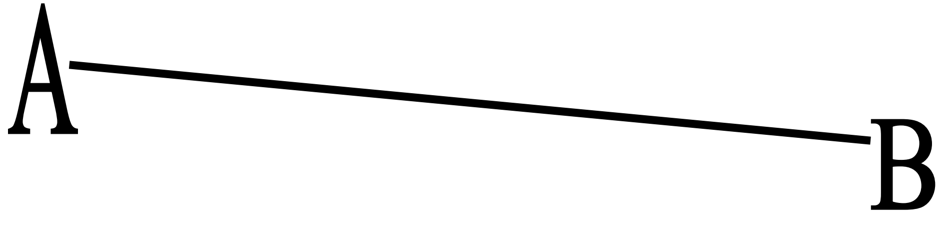
Расстояния в пространстве

Расстояние между двумя точками



Задача 1. Найдите расстояние между точками P и H – серединами скрещивающихся рёбер:

а) куба с ребром, равным а;

Решение.

а) (рис. 1)

$PK \perp AD,\ AK = KD$

ΔPKH

$\angle K = 90^\circ,\ PK = a$

$$KH = \frac{1}{2} DB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$PH = \rho|P, H| = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

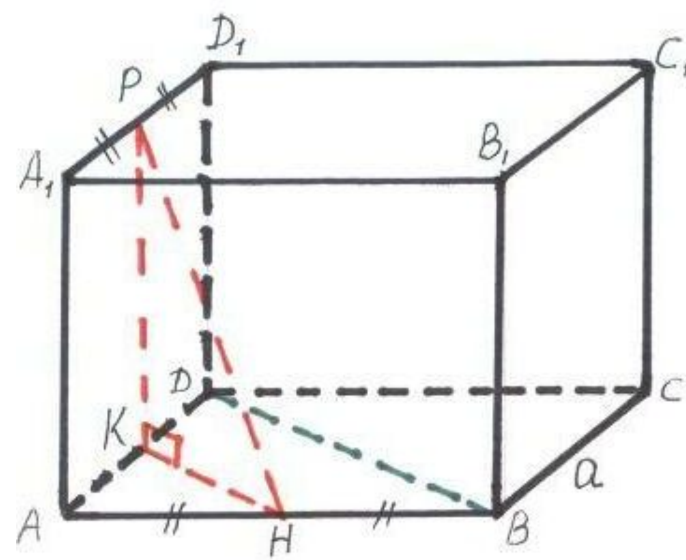


рис.1

Задача 1. Найдите расстояние между точками P и H – серединами скрещивающихся рёбер:
б) тетраэдра, все рёбра которого равны a.

$$\Delta AOS, \quad \angle O = 90^o$$

$$AS = a, \quad AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

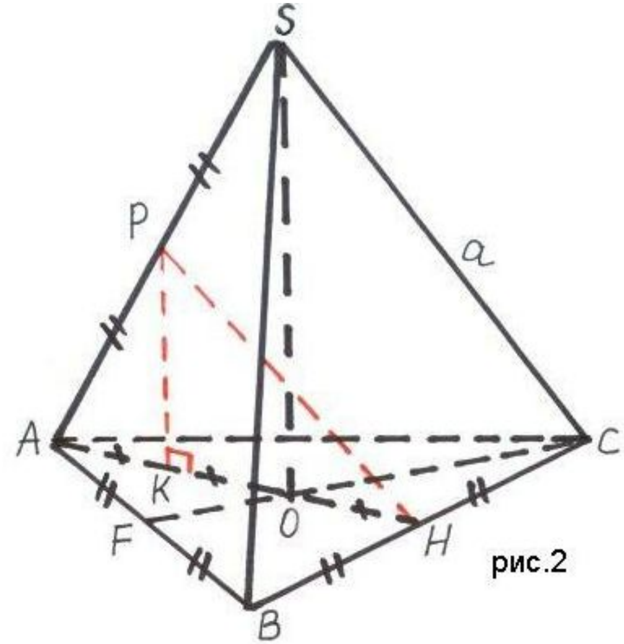


рис.2

$$\Delta PKH, \quad \angle K = 90^o$$

$$PK = \frac{1}{2} SO = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$KH = AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$PH = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Задача 1. Найдите расстояние между точками P и H – серединами скрещивающихся рёбер:

в) правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и правильным треугольником в диагональном сечении.

1) ΔSDB – правильный,

$$SO = \frac{DB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$KP \perp (ABC),\quad K \in DB,\quad DK = KO,$$

$$PK = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

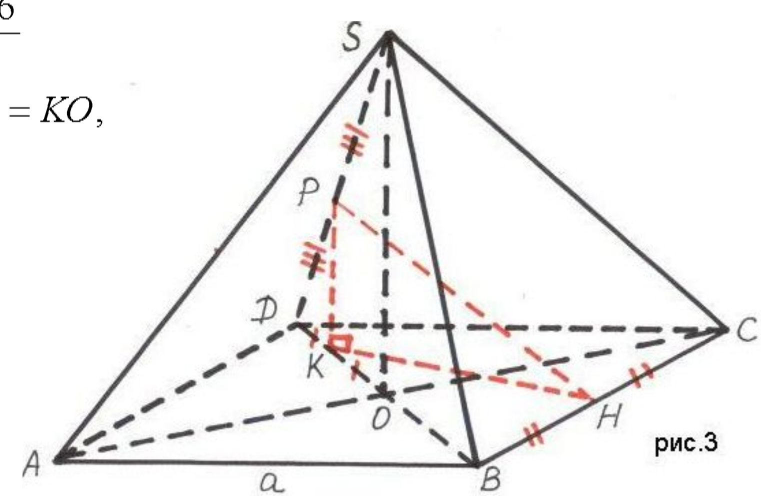


рис.3

2) $ABCD,\ KF \perp CB,\quad CF = FH$

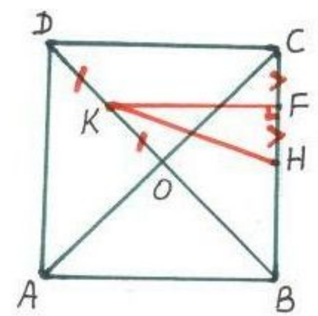
$\Delta KFH,\quad \angle F = 90^\circ,\quad KF = \frac{3}{4}a$

$FH = \frac{1}{4}a,$

$$KH = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

3) $\Delta PKH,\quad \angle K = 90^\circ,\quad PK = \frac{a\sqrt{6}}{4},$

$$KH = \frac{a\sqrt{10}}{4},\quad PH = \sqrt{\frac{6a^2}{16} + \frac{10a^2}{16}} = a$$



Ответ: a

Задача №2. На рёбрах A_1B_1 и B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно точками M и L отмечены середины, на ребре AB взята точка K такая, что AK : AB = 3 : 4. Считая $AB = AA_1 = 1$, AD = 2, найдите расстояние от точки P – точки пересечения диагонали B_1D с плоскостью KLM до точки: a) D; b) D_1; c) B.

(Рис.4) Построение сечения:

1) ML,
2) MK,
3) $KN \| ML$, $N = KN \cap BC$
4) NL,
5) LMKN – сечение

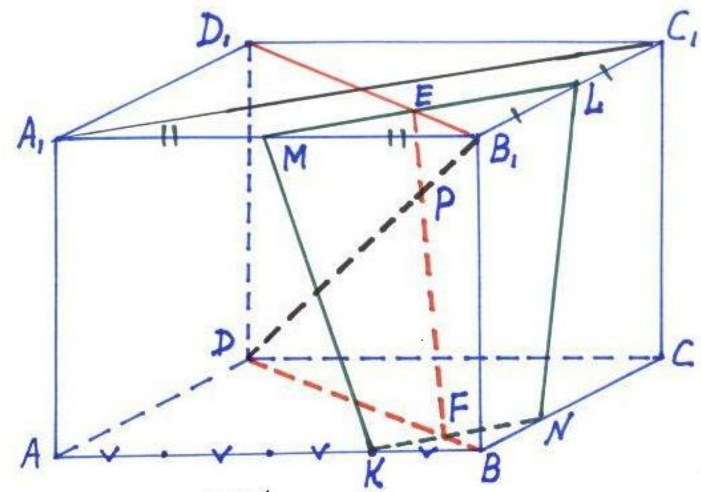


рис.4

Нахождение точки P, где

$P = B_1D \cap (KLM)$

$B_1D \subset (DBB_1)$

$(DBB_1) \cap (KLM) = EF$, $E = B_1D_1 \cap ML$,

$F = KN \cap DB$,

$B_1D \cap (KLM) = B_1D \cap EF = P$

Нахождение расстояний

$D_1E : EB_1 = 3 : 1$, $DF : FB = 7 : 1$, $DB = \sqrt{5}$

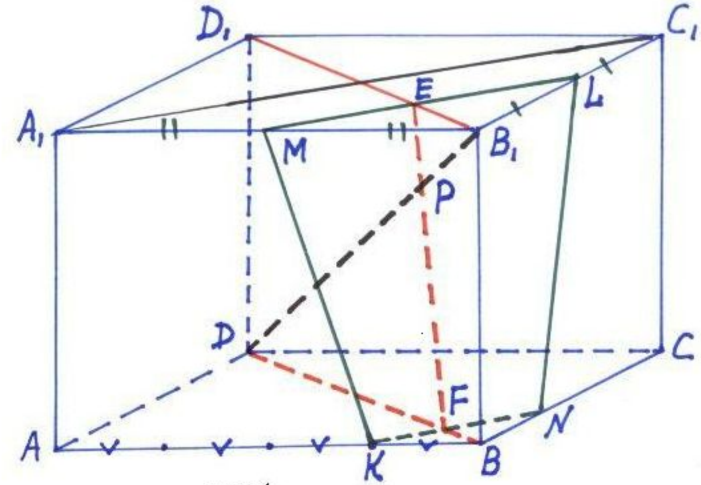


рис.4

a)DP-?

ΔEPB_1 *подобен* ΔDPF (по 2ᴹ углам), $\Rightarrow$,

$DP : PB_1 = DF : EB_1 = 7 : 2$, $\Rightarrow$

$$DP = \frac{7}{9} DB_1; \quad DB_1 = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}, \Rightarrow,$$

$$DP = \frac{7}{9}\sqrt{6}$$

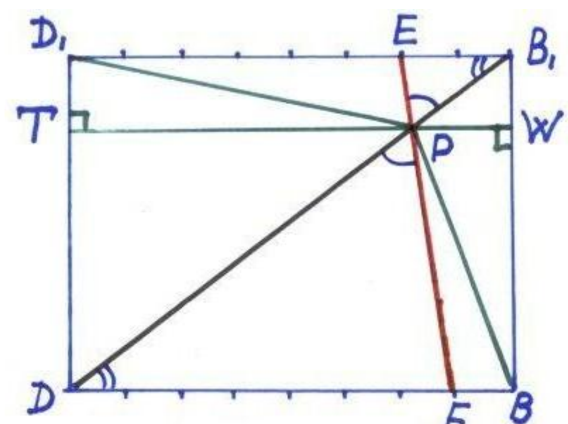


рис.5

б) D_1P - ? в) BP - ?

Проведем через точку P прямую $TW \parallel DB$, $T \in DD_1$, $W \in BB_1$.

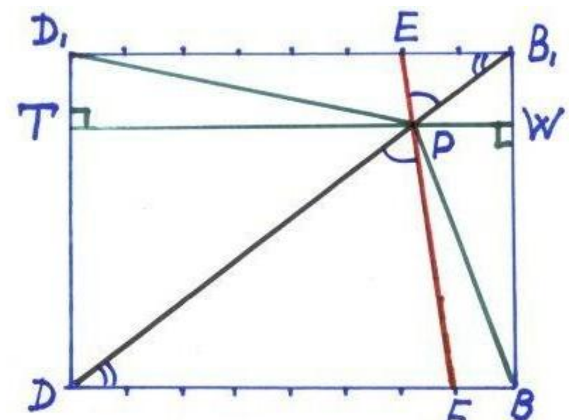


рис.5

$$\frac{TP}{PW} = \frac{DP}{PB_1} = \frac{7}{2}, \quad TP = \frac{7}{9}DB = \frac{7}{9}\sqrt{5},$$

$$PW = \frac{2}{9}\sqrt{5}.$$

$$\frac{TD_1}{WB} = \frac{2}{7}, \quad TD_1 = \frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{2}{9},$$

$$WB = \frac{7}{9}\cdot 1 = \frac{7}{9}.$$

$$\Delta TD_1P: \quad D_1P = \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{49\cdot 5}{81}} = \frac{\sqrt{249}}{9}$$

$$\Delta PWB: \quad PB = \sqrt{\frac{20}{81} + \frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{69}}{9}$$

Ответ: $DP = \frac{7}{9}\sqrt{6}; \quad D_1P = \frac{\sqrt{249}}{9}; \quad PB = \frac{\sqrt{69}}{9}.$

Координатный метод

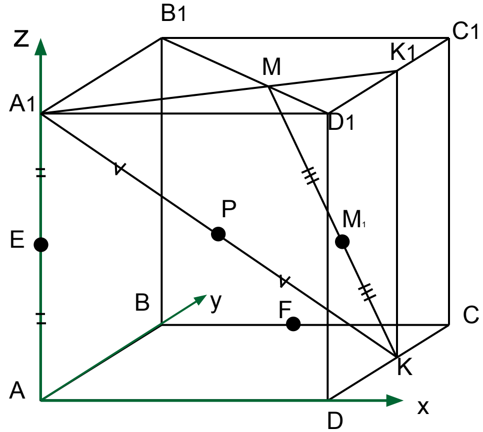
B(x_2; y_2; z_2)

A(x_1; y_1; z_1)

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Задача 3. (МФТИ) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, точки E, F и K – середины рёбер AA_1, BC и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найти расстояние между точками:

а) E и K; б) E и M; в) M_1 и K_1, где M_1 – середина отрезка KM, K_1 – середина ребра C_1D_1; г) F и P, где P – середина отрезка A_1K.



$$E\ (0;0;\frac{1}{2}),\quad K(1;\frac{1}{2};0).\quad F(\frac{1}{2};1;0),$$

$$M(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1),\quad C_1(1;1;1),\quad D_1(1;0;1)\quad A_1(0;0;1)$$

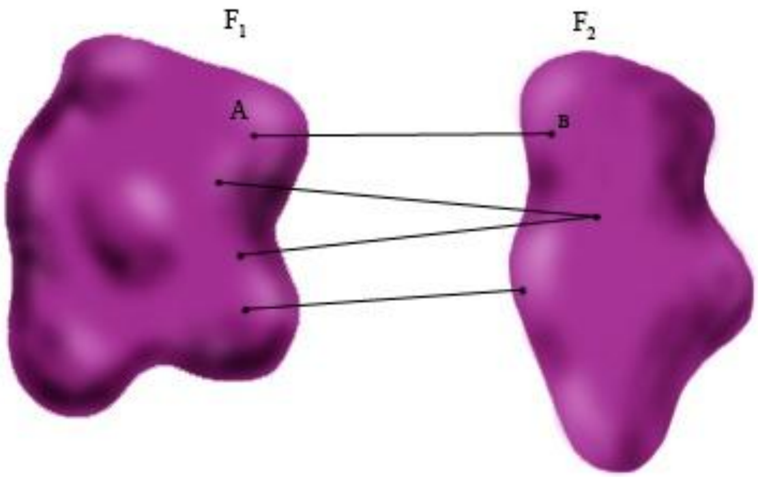
$$M_1\left(\frac{5}{6};\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right)\quad K_1(1;\frac{1}{2};1)\quad P(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{2})$$

$$EK=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2},\qquad EM=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{29}}{6}\qquad M_1K_1=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{12}$$

$$FP=\sqrt{0+\frac{9}{16}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

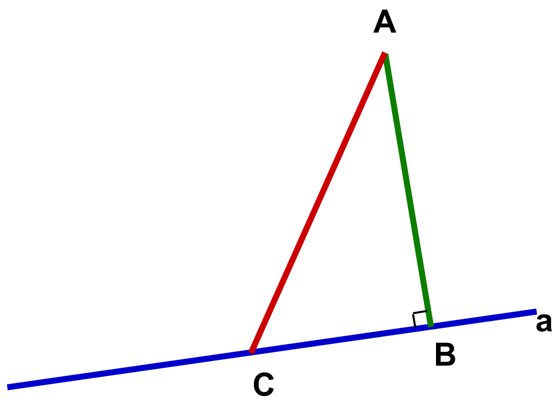
Ответ: $EK=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $EM=\frac{\sqrt{29}}{6}$, $M_1K_1=\frac{\sqrt{41}}{12}$, $FP=\frac{\sqrt{13}}{4}$

Расстояние между фигурами



Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре F_1, а другая - фигуре F_2, существует наименьшее, то его называют <u>расстоянием между фигурами</u> F_1 и F_2.

Расстояние от точки до прямой



<u>Расстояние от точки до прямой</u> – длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

$$AB = \rho|A, a|$$

Задача №4. (рис.7) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C, боковое ребро призмы равно меньшей стороне основания. В грани AA_1C_1C точкой O отмечен центроид этой грани. Считая $AC = a$, найдите расстояние до прямой BO от точки:

а) A_1; b) B_1; c) C_1.

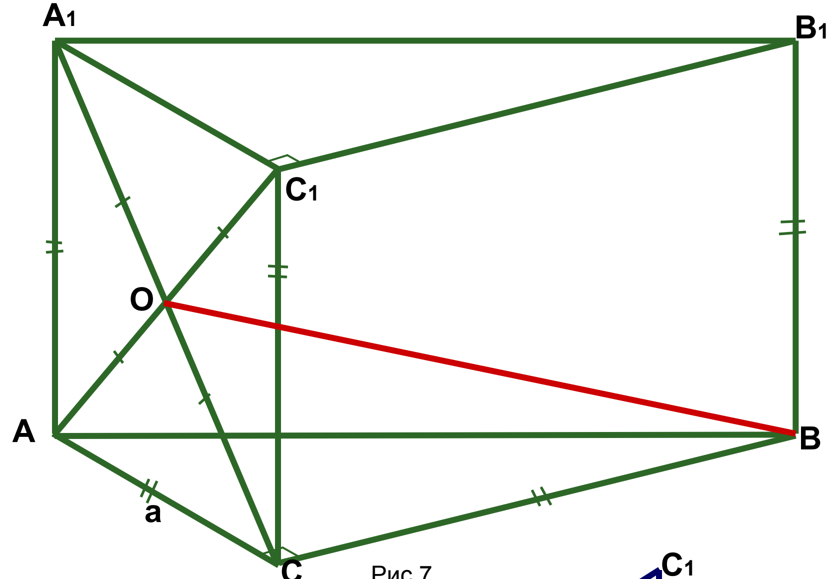


Рис.7

1) $AC = BC = AA_1 = a, \ \angle ACB = 90°,$

$AA_1C_1C, \ C_1CBB_1$ – квадраты

2) (рис.8)

$$\Delta AC_1B, \quad AB = AC_1 = C_1B = a\sqrt{2}$$

тогда BO – медиана и высота,

$$C_1O \perp BO, \quad C_1O = \rho|C_1, BO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

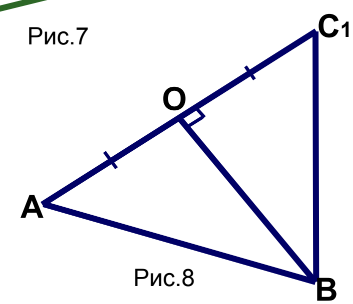


Рис.8

3)(рис.9)

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BC \\ AC - np_{(ABC)}A_1C \end{array}\right\} \Rightarrow A_1C \perp BC, \quad m.e.$$

ΔA_1CB – прямоугольный.

$A_1N \perp BO,$

$A_1N = \rho|A_1, BO|$

$$S_{\Delta A_1CB} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

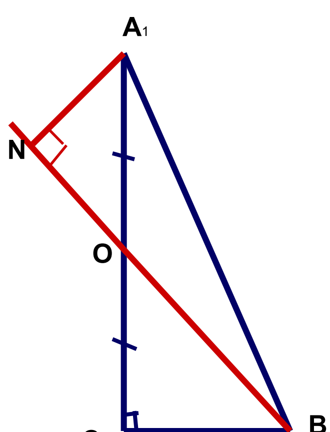


Рис.9

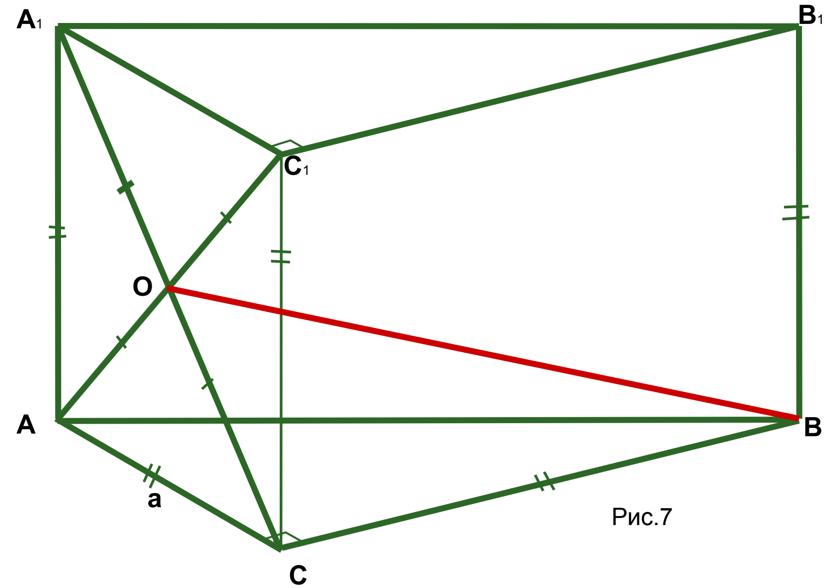


Рис.7

$$S_{\Delta A_1OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}, \quad CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BO = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{\Delta A_1OB} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot A_1N \Rightarrow$$

$$A_1N = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

4) (рис.10)

$$S_{MM_1B_1B} = 2S_{\Delta OB_1B} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot OB\cdot B_1K,\ \text{где}\ B_1K \perp OB,\ B_1K = \rho|B_1,OB|$$

$$B_1K = \frac{S_{MM_1B_1B}}{OB},\quad OB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

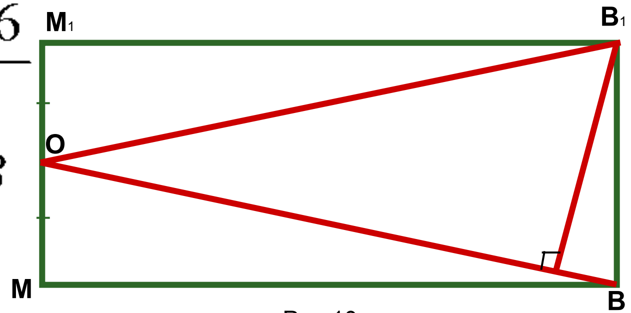


Рис.10

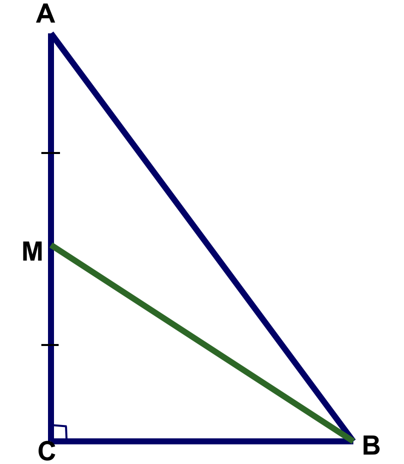


Рис.11

$$S_{MM_1B_1B} = BB_1\cdot MB = a\cdot MB$$

$$MB = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{MM_1B_1B} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

$$B_1K = \frac{\frac{a^2\sqrt{5}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

Ответы: $\rho|A_1,BO| = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\rho|B_1,BO| = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$

$\rho|C_1,BO| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Расстояние от точки до плоскости

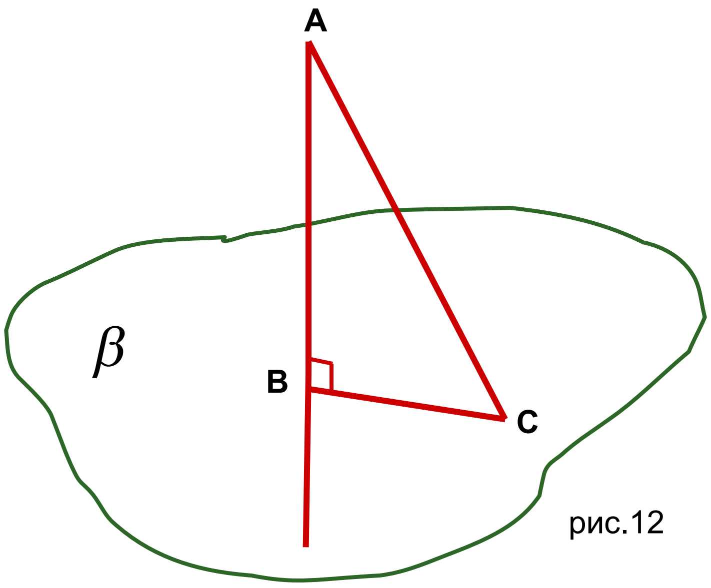


рис.12

Расстояние от точки до плоскости – длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

$$\rho|A, \beta| = AB$$

Пусть надо найти расстояние от точки *A* до плоскости *β* и пусть точка *A* лежит в плоскости α, α∩β= c.

Проведём $AB \perp c$, $BP \perp c$, $\angle(\alpha,\beta) = \angle PBC$, $AN \perp PB$.

$$\left.\begin{array}{l} c \perp AB \\ c \perp PB \\ AB \cap PB = B \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp (PBA), \quad AN \subset (PBA), \Rightarrow, c \perp AN$$

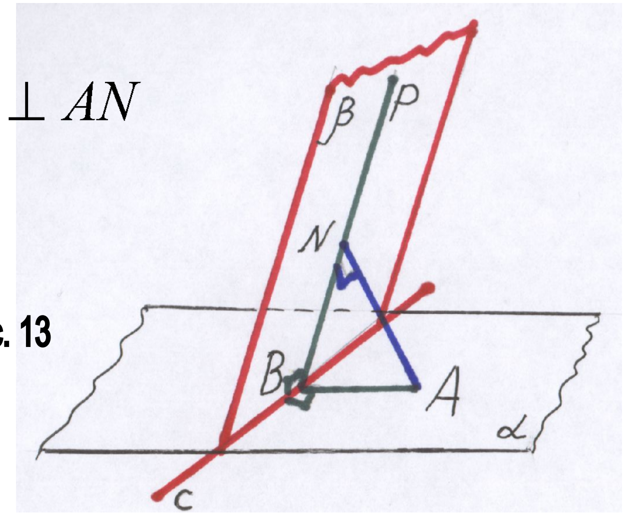
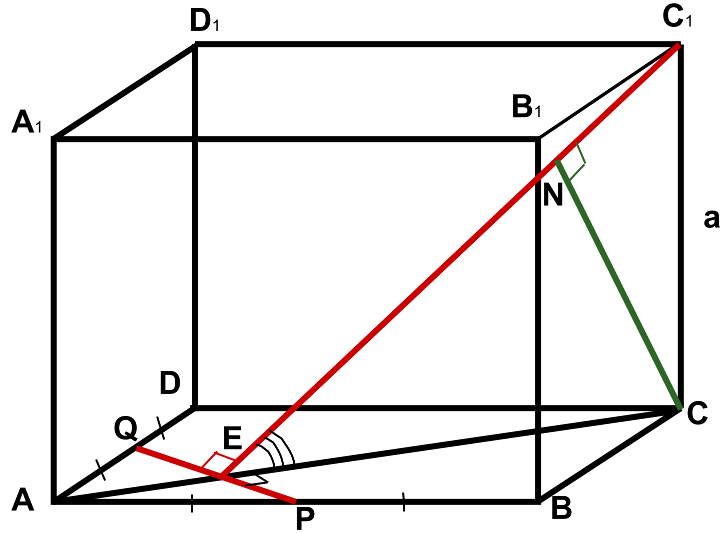


рис. 13

$$\left.\begin{array}{l} AN \perp c \\ AN \perp PB \\ c \cap PB = B \end{array}\right\} \Rightarrow AN \perp \beta, \Rightarrow, \rho\left|A, \beta\right| = AN$$

Задача № 5 (рис.14) На рёбрах *AB* и *AD* куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно точками *P* и *Q* отмечены середины. Считая ребро куба равным *a*, найдите расстояние до плоскости C_1PQ от точки: а) *C*; б) A_1; в) *D*.



а) $C \in (ABC)$, $\left.\begin{array}{l} AC \perp DB \\ QP \parallel DB \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp QP, \quad QP \cap AC = E$

$$\left.\begin{array}{l} EC - np_{(ABC)} EC_1 \\ EC \perp QP \end{array}\right\} \Rightarrow EC_1 \perp QP$$

$$\left.\begin{array}{l} EC_1 \perp QP \\ EC \perp QP \\ EC = (ABC) \cap (C_1PQ) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1EC = \angle((C_1PQ),(ABC))$$

$$CN \perp EC_1 \Rightarrow CN = \rho\left|C;(C_1PQ)\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta CC_1E \\ \angle C = 90^0 \\ CC_1 = a \\ CE = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}a\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow CN = \frac{CE \cdot CC_1}{EC_1} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot a}{\sqrt{a^2 + \frac{9a^2 \cdot 2}{16}}} = \frac{3a^2\sqrt{2} \cdot 4}{4 \cdot a\sqrt{2}\sqrt{17}} = \frac{3a}{\sqrt{17}}$$

б) (рис.15) $A_1 \in (A_1B_1C_1)$, $(A_1B_1C_1) \cap (C_1PQ) = b$, $b \parallel QP$, $C_1E \cap AA_1 = A_2$,

$AA_2 : A_1A_2 = AE : A_1C_1 = 1:4$, $\Rightarrow$, $A_1A_2 = \dfrac{4a}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 \perp b \\ A_2C_1 \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1C_1A_2 = \angle((A_1B_1C_1),(C_1PQ))$$

$$A_1M \perp A_2C_1 \ \Rightarrow A_1M = \rho/A_1,(C_1PQ)/$$

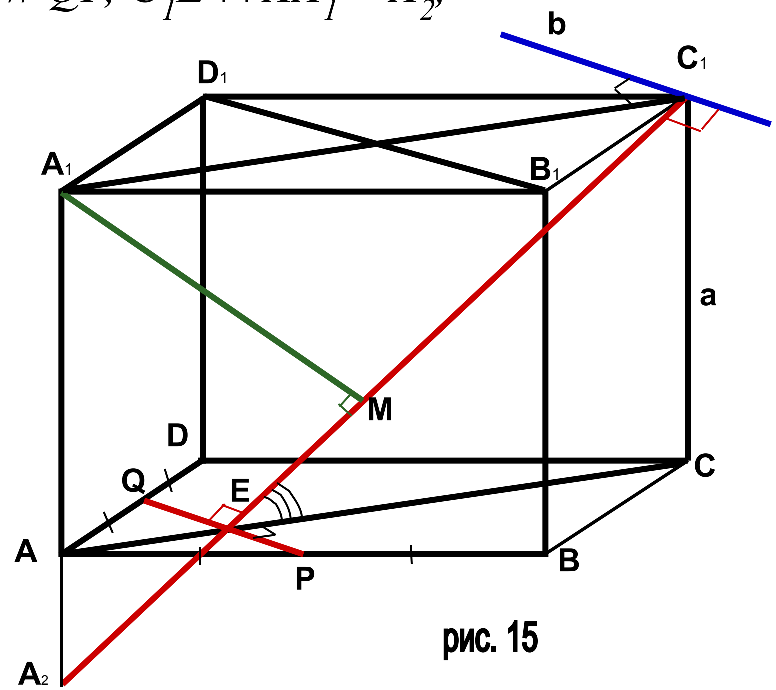


рис. 15

$$\left.\begin{array}{l} \Delta C_1A_1A_2 \\ \angle A_1 = 90^0 \\ A_1C_1 = a\sqrt{2} \\ A_1A_2 = \dfrac{4a}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow A_1M = \frac{\dfrac{4a}{3}\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{16a^2}{9}+2a^2}} = \frac{4a\cdot a\sqrt{2}}{3\cdot\dfrac{a}{3}\sqrt{34}} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$$

в) (рис.16) $D \in (ABC)$, $(ABC) \cap (C_1PQ) = PQ$, $PQ \cap DC = T$, $TD : DC = 1 : 2$,

$TC_1 \cap DD_1 = D_2$, $DD_2 : DD_1 = 1 : 3$, $DD_2 = a/3$.

$$\left.\begin{matrix} DR \perp PQ \\ RD_2 \perp PQ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle D_2RD = \angle((ABC),(C_1PQ))$$

$DF \perp RD_2 \Rightarrow$, $DF = \rho | D,(C_1PQ)$

/

$$\left.\begin{matrix} \Delta D_2DR \\ \angle D = 90^0 \\ DD_2 = \dfrac{a}{3} \\ DR = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow DF = \frac{\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{8}}} = \frac{\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{17}}{3\cdot 2\sqrt{2}}} = \frac{a}{\sqrt{17}}$$

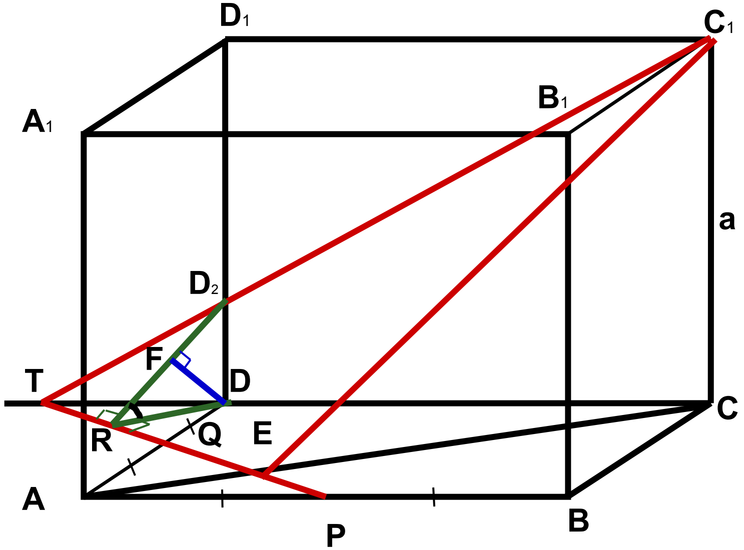


Рис.16

Ответ: $\dfrac{3a}{\sqrt{17}}$; $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$; $\dfrac{a}{\sqrt{17}}$

<u>Задача №6.</u> (рис. 17). В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник, её боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и AB : AD : MB = = 1 : 2 : 1. Считая AB = *a*, найдите расстояние до плоскости MCD от точки P, где точка P лежит на диагонали BD и отношение BP : BD равно:

а) 1 : 4; б) 1 : 2; в) 3 : 4.

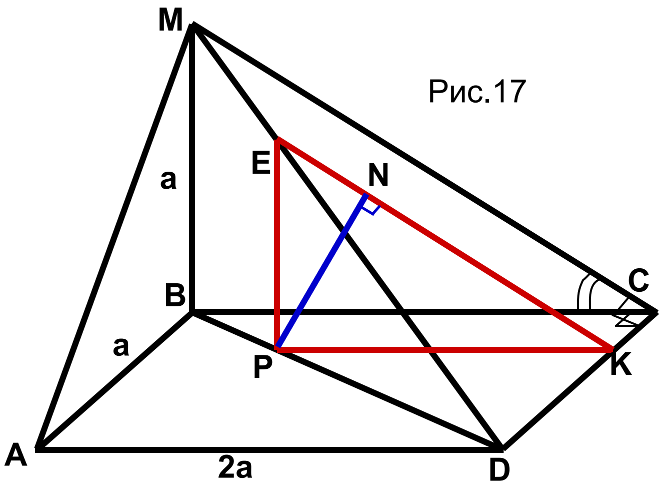


Рис.17

AB = MB = a, AD = 2a.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp DC \\ MC \perp DC \\ DC = (ABC) \cap (MDC) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle MCB = \angle((ABC),(MDC))$$

PN = ρ|P,(MCD)|.

а) BP : BD = 1 : 4.

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{3}{4}a,\quad PK = \frac{3}{4}\cdot 2a = \frac{3a}{2},\quad EK = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \frac{3a}{4}\sqrt{5}$$

$$\rho\left|P,(MCD)\right| = \frac{\frac{3}{4}a\cdot\frac{3}{2}a}{\frac{3a\sqrt{5}}{4}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

б) BP : BD = 1 : 2

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{1}{2}a,\quad PK = \frac{1}{2}\cdot 2a = a,\quad EK = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$\rho\left|P,(MCD)\right| = \frac{\frac{1}{2}a\cdot a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

в) BP : BD = 3 : 4

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{1}{4}a,\quad PK = \frac{1}{4}\cdot 2a = \frac{a}{2},\quad EK = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{5}$$

$$\rho\left|P,(MCD)\right| = \frac{\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{5}}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$$

Ответ: $\dfrac{3a\sqrt{5}}{10},\quad \dfrac{a\sqrt{5}}{5},\quad \dfrac{a\sqrt{5}}{10}$

Координатный метод

β $ax + by + cz + d = 0,$

$M_0(x_0, y_0, z_0),$

$$\rho|\beta, M_0| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача №7. (МИФИ). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 12. На рёбрах AA_1, B_1C_1, CD взяты точки E, F_1 и G такие, что $AE : EA_1 = 1 : 3$, $B_1F_1 : F_1C_1 = 1 : 1$, $CG : GD = 1 : 1$. Найти расстояние от точки B_1 до плоскости (EF_1G).

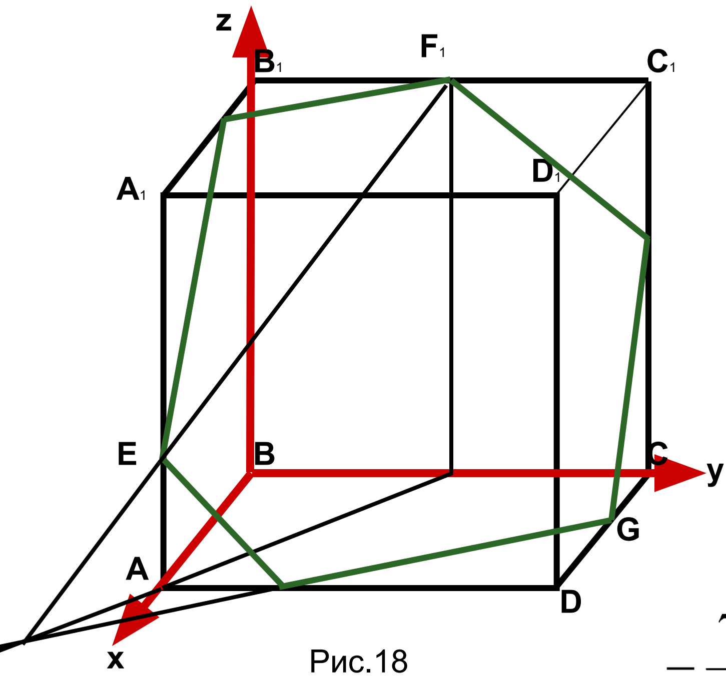


Рис.18

$E(12;0;3)$, $G(6;12;0)$, $F_1(0;6;12)$

(EF_1G): $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} 12a + 3c + d = 0 \\ 6a + 12b + d = 0 \\ 6b + 12c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b = -12c - d \\ 6a = 24c + 2d - d = 24c + d \\ 48c + 2d + 3c + d = 0 \end{cases}$$

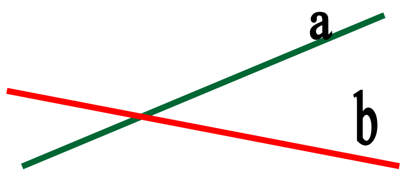
$$c = -\frac{d}{17} \qquad a = -\frac{7d}{102} \qquad b = -\frac{5d}{102}$$

$$-\frac{7d}{102}x - \frac{5d}{102}y - \frac{6d}{102}z + d = 0 \quad 7x + 5y + 6z - 102 = 0$$

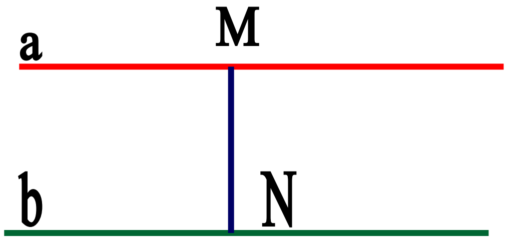
$B_1(0;0;12)$

$$\rho|B_1,(EF_1G)| = \frac{|0 + 0 + 6 \cdot 12 - 102|}{\sqrt{49 + 25 + 36}} = \frac{30}{\sqrt{110}} = \frac{3\sqrt{110}}{11}$$

Расстояние между двумя прямыми



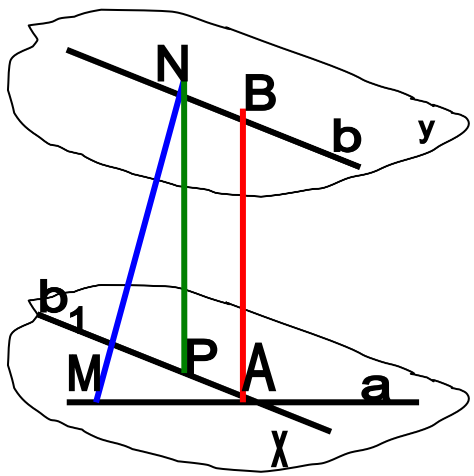
$$\rho|a,b| = 0$$



$$\rho|a,b| = MN$$

Скрещивающиеся прямые

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми – длина их общего перпендикуляра.



Заметим, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими данные прямые.

Задача № 7. (рис.19) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте общий перпендикуляр прямых A_1D и BC_1.

Найдите расстояние между прямыми, если ребро куба равно *a*.

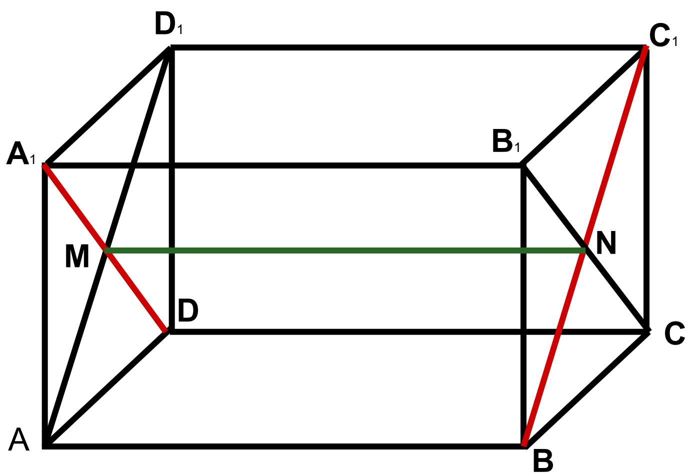


рис. 19

$AD_1 \cap DA_1 = M, \; BC_1 \cap CB_1 = N,$

$MN \perp AD_1, \; MN \perp BC_1,$

$MN = \rho|A_1D, BC_1|, \; MN = a.$

Задача № 8. (рис.20) (Новосибирский государственный университет). Найдите расстояние между диагоналями AD_1 и DC_1 двух смежных граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a.

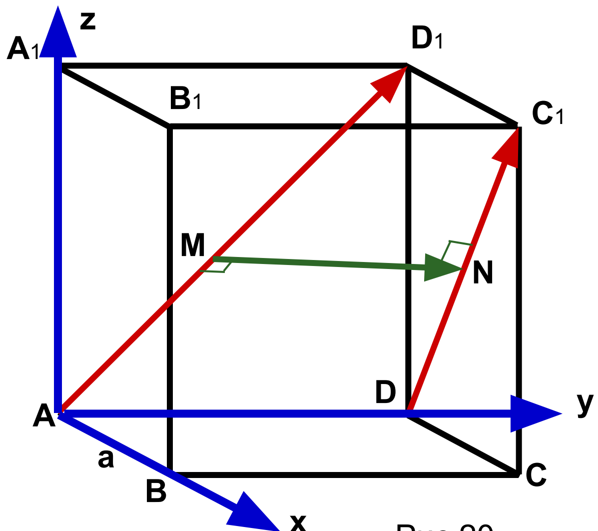


Рис.20

$A(0;0;0)$, $D(0;a;0)$, $D_1(0;a;a)$, $C_1(a;a;a)$.

$MN \perp AD_1$, $MN \perp DC_1$.

$$\overline{AD_1}(0;a;a),\quad \overline{DC_1}(a;0;a),\quad \overline{D_1D}(0;0;-a)$$

$$\overline{MN}=\overline{MD_1}+\overline{D_1D}+\overline{DN}=x\overline{AD_1}+\overline{D_1D}+y\overline{DC_1}=x\overline{(0;a;a)}+\overline{(0;0;-a)}+y\overline{(a;0;a)}=$$
$$=\overline{(ya;xa;xa-a+ya)}$$

$$\overline{MN} \perp \overline{AD_1} \Rightarrow \overline{MN} \cdot \overline{AD_1} = 0 \Rightarrow 0 + xa^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0$$

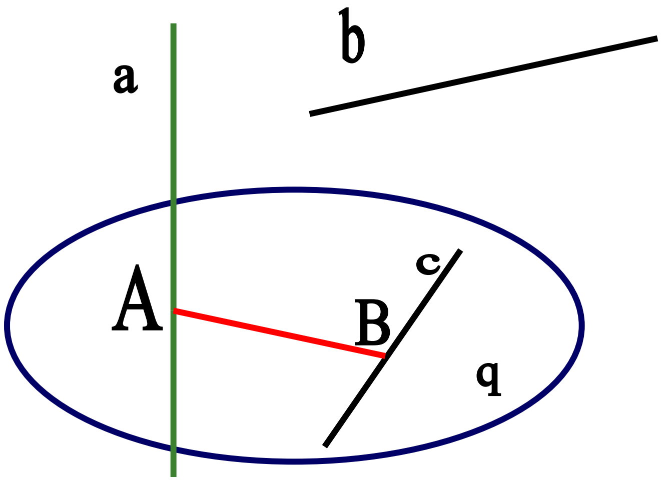
$$\overline{MN} \perp \overline{DC_1} \Rightarrow \overline{NM} \cdot \overline{DC_1} = 0 \Rightarrow ya^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0$$

$$\begin{cases} xa^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0, \\ ya^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xa^2 - ya^2 = 0, \\ 2ya^2 + xa^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ 3xa^2 - a^2 = o \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

$$\overline{MN}(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}), \Rightarrow, \quad NM = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

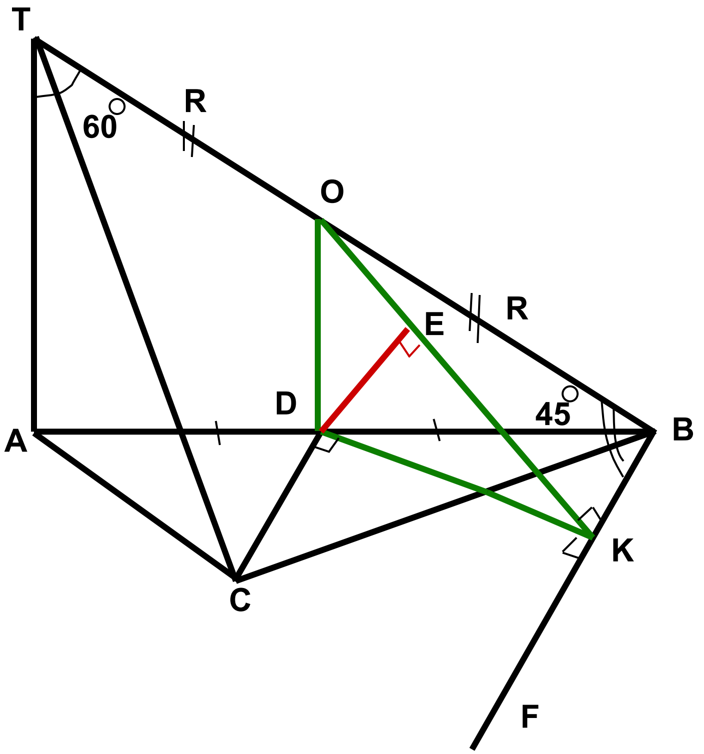
Ответ: $\rho\left|AD_1, DC_1\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ещё один подход к вычислению расстояния между скрещивающимися прямыми.



$a \perp q$, c – пр$_q b$, A – пр$_q a$, AB $\perp$ c, AB = ρ| a, b |

Задача № 9 (рис.21) МГТУ им. Н.Э. Баумана. В сферу радиуса R вписана пирамида TABC, основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC, а высота пирамиды совпадает с ребром TA. Боковое ребро TB образует с высотой пирамиды угол 60°. А угол между TB и медианой основания CD, проведённой к гипотенузе AB, равен 45°. Какую **наименьшую** площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB?



(ODК), BK ⊥ (ODК), ⇒, CD ⊥ (ODK)

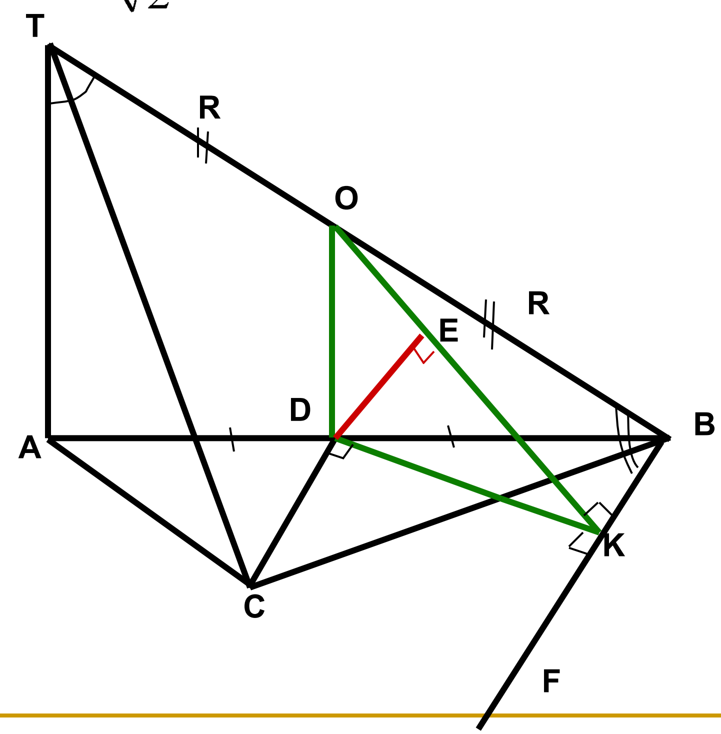
$$\left.\begin{matrix} D - np_{(ODK)}CD \\ OK - np_{(ODK)}OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho\left|CD;TB\right| = \rho\left|D;OK\right| = OE$$

$$\Delta ODB \quad \angle D = 90^0, \quad \angle B = 30^0, \quad OD = \frac{R}{2}, \quad DB = R \cdot \cos 30^0 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = CD$$

$$\Delta OKB \quad OK = KB = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta ODK \quad DK = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2} \quad DE = \frac{OD \cdot DK}{OK} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{R\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{4} = \frac{R^2\sqrt{6}}{16}$$



Ответ: $S_{\min} = \dfrac{R^2\sqrt{6}}{16}$

Расстояние от прямой до плоскости

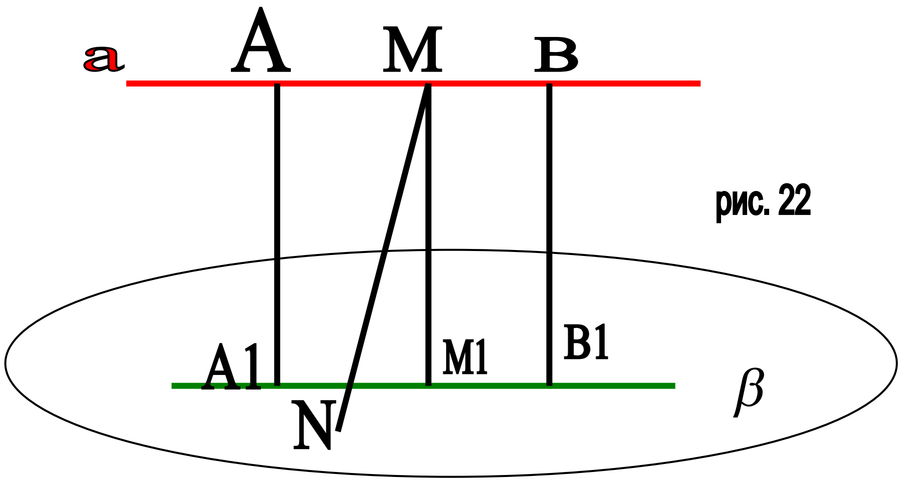


рис. 22

За расстояние от прямой до параллельной ей плоскости берут расстояние от любой (наиболее удобной для решения задачи) точки прямой до плоскости, Задача № 10. (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Основанием пирамиды TABC служит равносторонний треугольник со стороной, равной 8, а её высота проходит через середину стороны основания AB. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро TA, если известно, что **прямая,** проходящая через середину высоты пирамиды и середину стороны основания BC, **параллельна секущей плоскости и находится от неё на расстоянии, равном 1.**

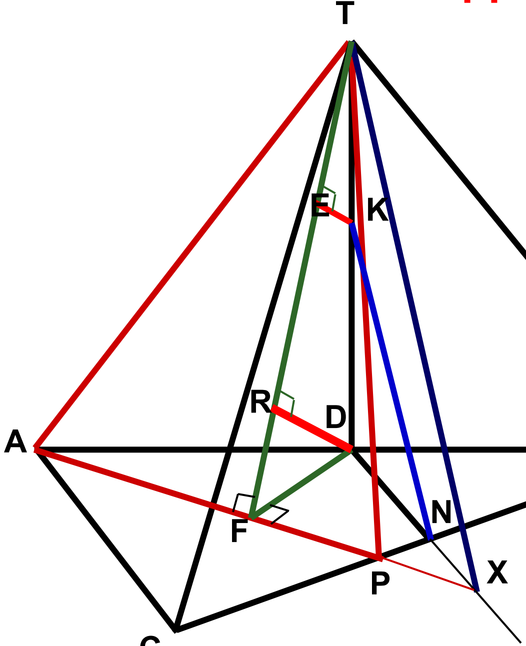


рис. 23

$TX \parallel KN$, $X = TX \cap DN$. $AX \cap CB = P$,

ΔAPT – искомое сечение.

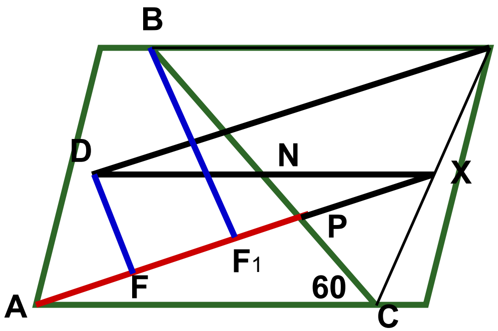
$\angle TFD = \angle((ATP),(ABC))$,

$KE \perp TF$, $\Rightarrow$, $KE = \rho|K,(ATP)| = \rho|KN,(TAP)| = 1$.

$DR \perp TF$, $DR = 2$.

$$S_{TAP} = \frac{1}{2} AP \cdot TF$$

рис. 24



BP : PC = 2 : 1, $S_{ABC} = \dfrac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$

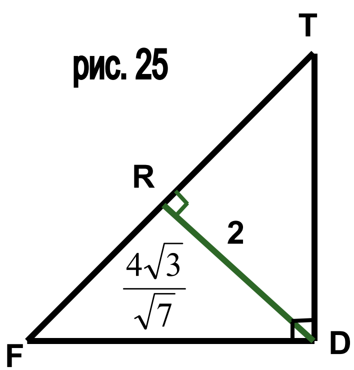
$$S_{ABP} = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

ΔAPC, AC = 8, PC=8/3, $\angle$C=60°, по теореме косинусов

$$AP = \sqrt{64 + \frac{64}{9} - 2 \cdot 8 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot BF_1 = \frac{32}{\sqrt{3}} \qquad BF_1 = \frac{2 \cdot 32 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \qquad DF = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

рис. 25

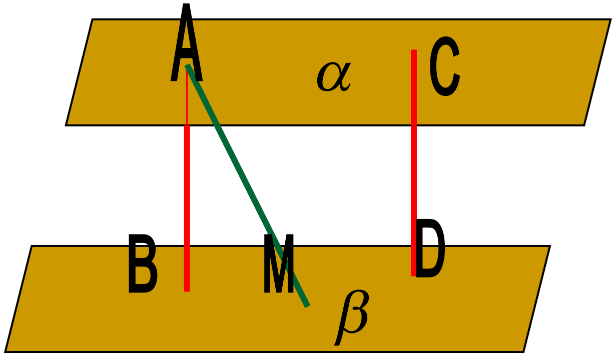


ΔFDT: $FR = \sqrt{\dfrac{16 \cdot 3}{7} - 4} = \sqrt{\dfrac{48 - 28}{7}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

$$TF = \frac{FD^2}{FR} = \frac{\frac{16 \cdot 3}{7}}{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}} = \frac{24}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} \qquad S_{TAP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} \cdot \frac{8\sqrt{7}}{3} = \frac{32}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $S_{TAP} = \dfrac{32}{\sqrt{5}}$

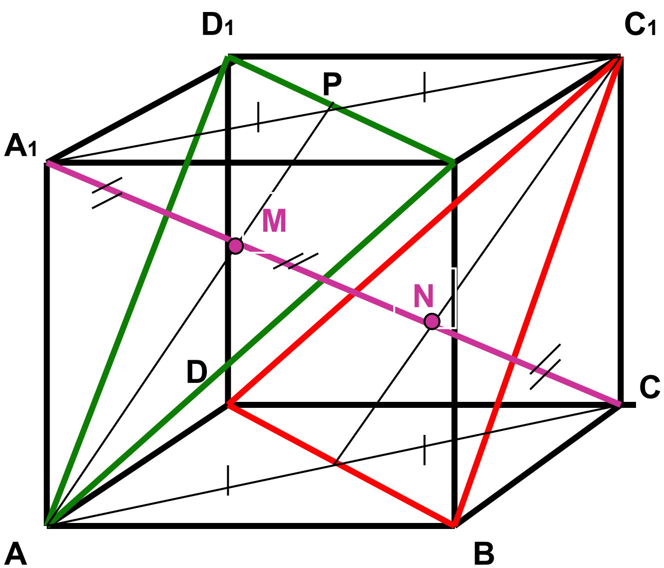
Расстояние между параллельными плоскостями



Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости

Задача № 11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1, если $AB = a$. (рис.27)

рис. 27



$(AB_1D_1) \| (BDC_1)$.

$A_1C \perp D_1B_1$ и $A_1C \perp AD_1$, $D_1B_1 \cap AD_1 = D_1$, ⇒, $A_1C \perp (AB_1D_1)$, ⇒, $A_1C \perp (BDC_1)$

Докажем, что **$A_1C \perp D_1B_1$**
(остальное доказывается аналогично)

$$\left.\begin{aligned} &A_1C_1 - np_{(A_1D_1B_1)} A_1C \\ &A_1C_1 \perp D_1B_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1C \perp D_1B_1$$

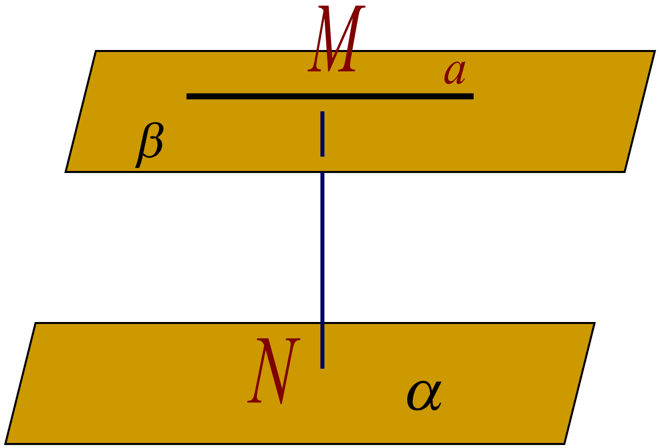
$A_1C \cap (AB_1D_1) = M$, $A_1C \cap (BDC_1) = N$, $MN = \rho|(AB_1D_1),(BDC_1)|$,

По теореме Фалеса $A_1M = MN = NC$

$$MN = \frac{1}{3} A_1C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\rho|(AB_1D_1),(BDC_1)| = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Если через прямую, параллельную плоскости, провести плоскость, параллельную данной плоскости, то можно находить расстояние между прямой и плоскостью как расстояние между параллельными плоскостями.



$a \parallel \alpha$, построим плоскость $\beta \parallel \alpha$, $a \subset \beta$.

$$\rho|a,\alpha| = \rho|\alpha,\beta|$$

$(CPA_1) \,||\, (MNC_1),\ A_1C \subset (CPA_1),\ \Rightarrow,$

$\rho|A_1C, (MNC_1)| = \rho|(CPA_1),(MNC_1)| = \rho|K,(CPA_1)|$

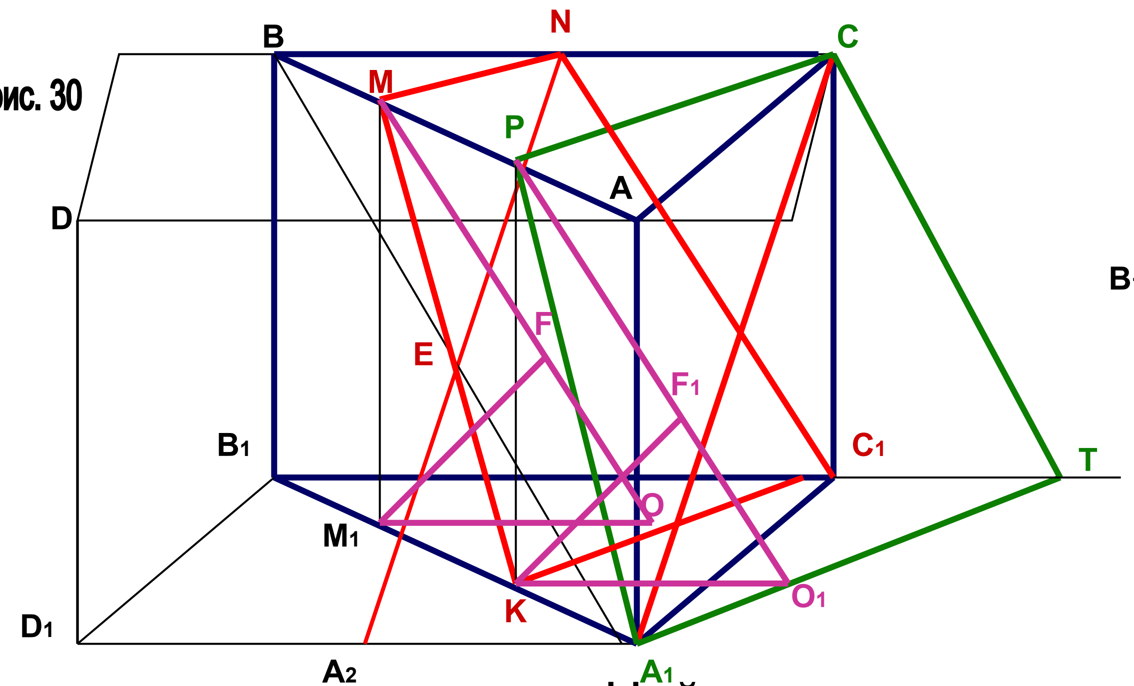


рис. 30

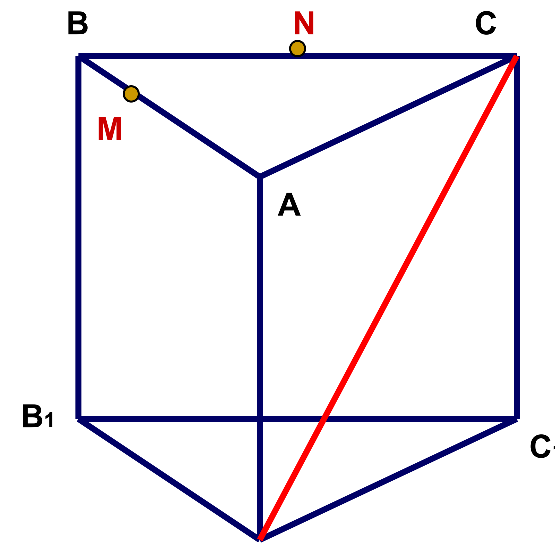
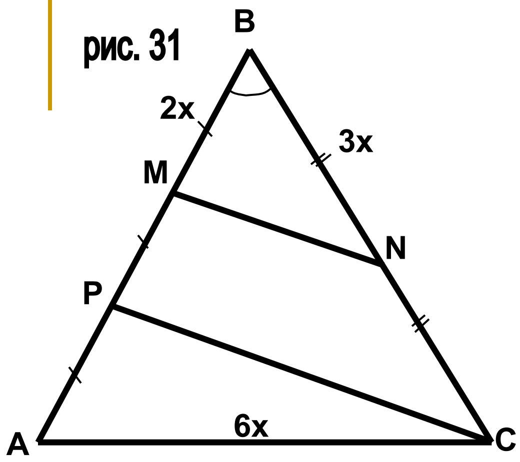


рис. 29

Задача № 12. (МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004 год). Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, которая параллельна диагонали A_1C боковой грани AA_1C_1C, проходит через середину стороны BC основания ABC и точку M, лежащую на стороне AB, если AM = 2MB, расстояние между A_1C и секущей плоскостью равно 2, а высота призмы равна 2



2) Пусть AB = 6x, тогда MB = 2x, BN = 3x.

ΔMBN: (рис.30)

$$MN^2 = 4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos 60°$$

$$MN^2 = 13x^2 - 6x^2 = 7x^2,\ MN = x\sqrt{7}$$

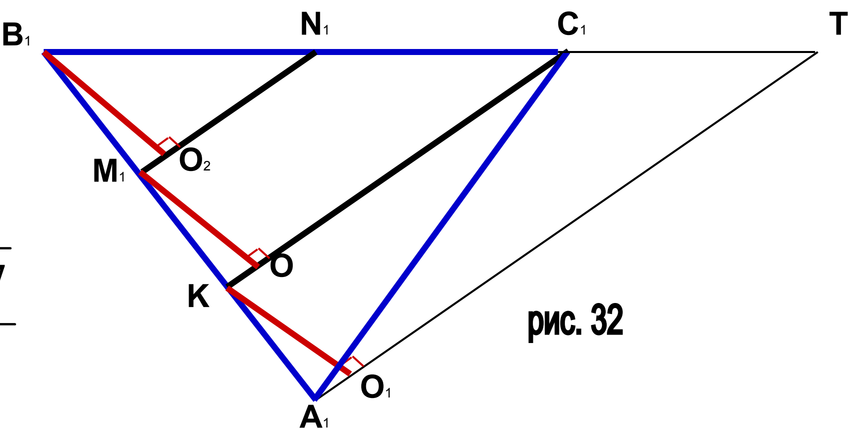
$$PC = 2x\sqrt{7}$$

3) $\Delta M_1 B_1 N_1$: (рис.32)

$$S_{M_1B_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \sin 60^0 = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{M_1B_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot M_1N_1 \cdot B_1O_2 = \frac{B_1O_2 \cdot x\sqrt{7}}{2}$$

$$B_1O_2 = \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = KO_1$$



4) ΔPKO_1 (рис.33):

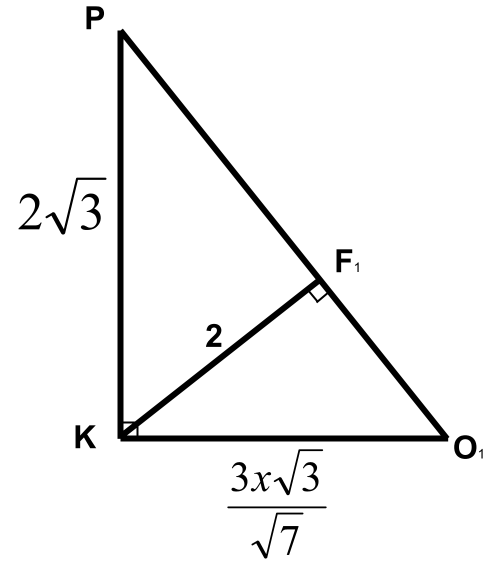


рис. 33

$$KF_1 = \frac{KP \cdot KO_1}{PO_1}, \Rightarrow, PO_1 = \frac{KP \cdot KO_1}{KF_1} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{2} = \frac{9x}{\sqrt{7}} = MO$$

$$PF_1 = \sqrt{12-4} = 2\sqrt{2}, \quad PF_1 \cdot F_1O_1 = KF_1^2, \quad F_1O_1 = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$PO_1 = 2\sqrt{2} + 2 = 3\sqrt{2} = \frac{9x}{\sqrt{7}}, \quad x = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{3}$$

5) $S_{сеч} = \frac{MN + KC_1}{2} \cdot MO = \frac{x\sqrt{7} + 2x\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{9x}{\sqrt{7}} = \frac{27x^2}{2} = \frac{27 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 9} = 21$

Ответ: $S_{сеч} = 21$