Проблема V постулата Евклида и его решение

Геометрия Евклида

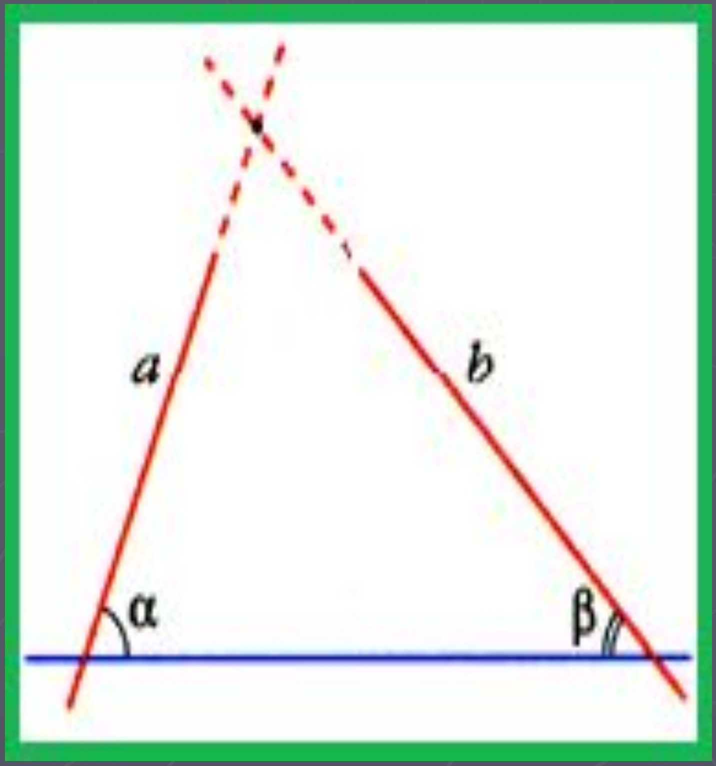
Первым систематическим изложением геометрии, дошедшим до нашего времени, являются “Начала” – сочинения александрийского математика Евклида.

Постулаты Евклида

- Из каждой точки ко всякой другой точке можно провести прямую;
- Каждую ограниченную прямую можно продолжить неопределённо;
- Из любого центра можно описать окружность любого радиуса;
- Все прямые углы равны;
- И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых

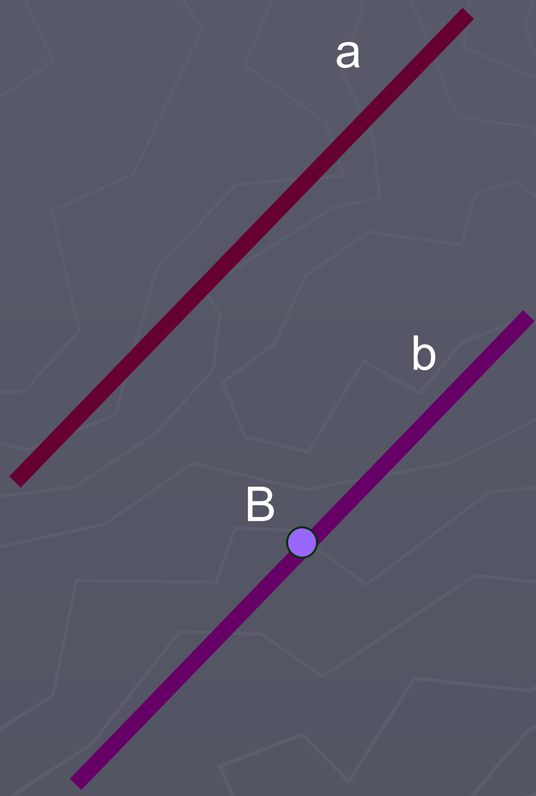
О чем говорится в V постулате Евклида?

Если две прямые **а** и **в** образуют при пересечении с третьей прямой внутренние односторонние углы **а** и **в**, сумма величин которых меньше двух прямых углов (т.е. меньше 180°; рис. 1), то эти две прямые обязательно пересекаются, причем именно с той стороны от третьей прямой, по которую расположены углы а и в (составляющие вместе менее 180°).



Равносильная аксиома параллельности

К данной прямой через данную вне ее точку можно провести не более одной параллельной прямой.



постулатом. Многие ученые, жившие в разные века в различных странах, приняли в ней участие, но особенно далеко продвинулись "в сражениях" Саккери, Лежандр *Сложность формулировки пятого постулата и его неубедительность привели к тому, что очень многие математики, жившие после Евклида, стремились заменить аксиому о параллельных прямых более простой, интуитивно ясной, либо доказать ее как теорему, опираясь на другие аксиомы "Начал". Шла подлинная затяжная "война" математиков с пятым постулатом. Многие ученые, жившие в разные века в различных странах, приняли в ней участие, но особенно далеко продвинулись "в сражениях" Саккери, Лежандр,* Гаусс *Сложность формулировки пятого постулата и его неубедительность привели к тому, что очень многие математики, жившие после Евклида, стремились заменить аксиому о параллельных прямых более простой, интуитивно ясной, либо доказать ее как теорему, опираясь на другие аксиомы "Начал". Шла подлинная затяжная "война" математиков*

- Итак, на базе этих постулатов шло успешное развитие геометрии, но в то время как другие постулаты считались совершенно очевидными, очевидность пятого постулата оспаривалась. Много веков усилия большого числа ученых были направлены на доказательство пятого постулата. Это объяснялось тем, что число аксиом стремились свести к минимуму.
- Ученые думали, что пятый постулат можно доказать как теорему, опираясь на остальные. Многие геометры пытались обойти его, заменяя пятый постулат другим, казавшимся более очевидным. На этом пути было сформулировано много положений, но все они были эквивалентны пятому постулату Евклида.

Например:

- сумма углов треугольника равна 180°,
- во всех треугольниках сумма углов одна и та же,
- через любую точку внутри угла можно провести секущую, пересекающую обе стороны угла,
- существуют два подобных, но не равных треугольника,
- теорема Пифагора,
- для всякого треугольника существует описанная окружность и др.

В конце 18 века у некоторых геометров возникла мысль о невозможности доказать пятый постулат. Допустив, что пятый постулат неверен, математики пытались прийти к логическому противоречию. Они приходили к утверждениям, противоречащим нашей геометрической интуиции, но логического противоречия не получалось.

Геометрия Лобачевского

- Лобачевский построил новую геометрию, откинув постулат Евклида, заменив его другим, прямо противоположным по смыслу: “Через точку *А* вне прямой *а* в плоскости, определяемой точкой *А* и прямой *а*, проходит по крайней мере две прямые *с* и *в* не имеющие общей точки с прямой *а*”.

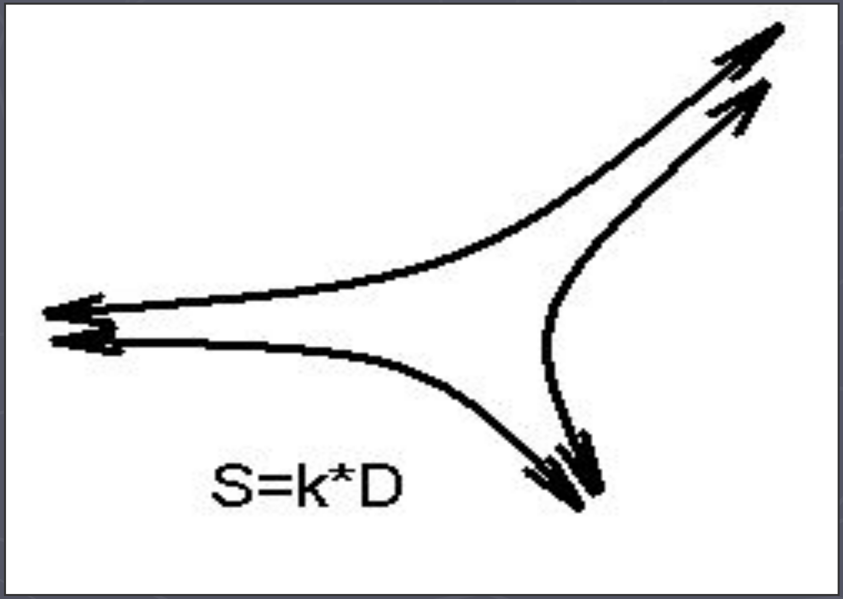
- И не получил противоречия.
- Отсюда следует, что таких прямых может быть бесконечное количество.
- Доказывая много десятков теорем, не обнаруживая логических противоречий, Лобачевскому пришла в голову догадка о непротиворечивости такой геометрии, он назвал её воображаемой.
- В геометрии Лобачевского сохраняются все теоремы, которые в евклидовой геометрии можно доказать без использования пятого постулата.

Например:

- вертикальные углы равны;
- углы при основании равнобедренного треугольника равны;
- из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр
- и др.

Однако, теоремы, где применяется аксиома параллельности прямых, видоизменяются:

- *Теорема о сумме углов треугольника готовит первый "сюрприз": в геометрии Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше 180°. Разность между 180° и суммой углов треугольника положительна и называется дефектом (D) этого треугольника. Формула для площади треугольника S=k*D, то есть площадь связана с его дефектом. Самую большую площадь имеет треугольник с нулевыми углами, а его стороны имеют бесконечную длину*

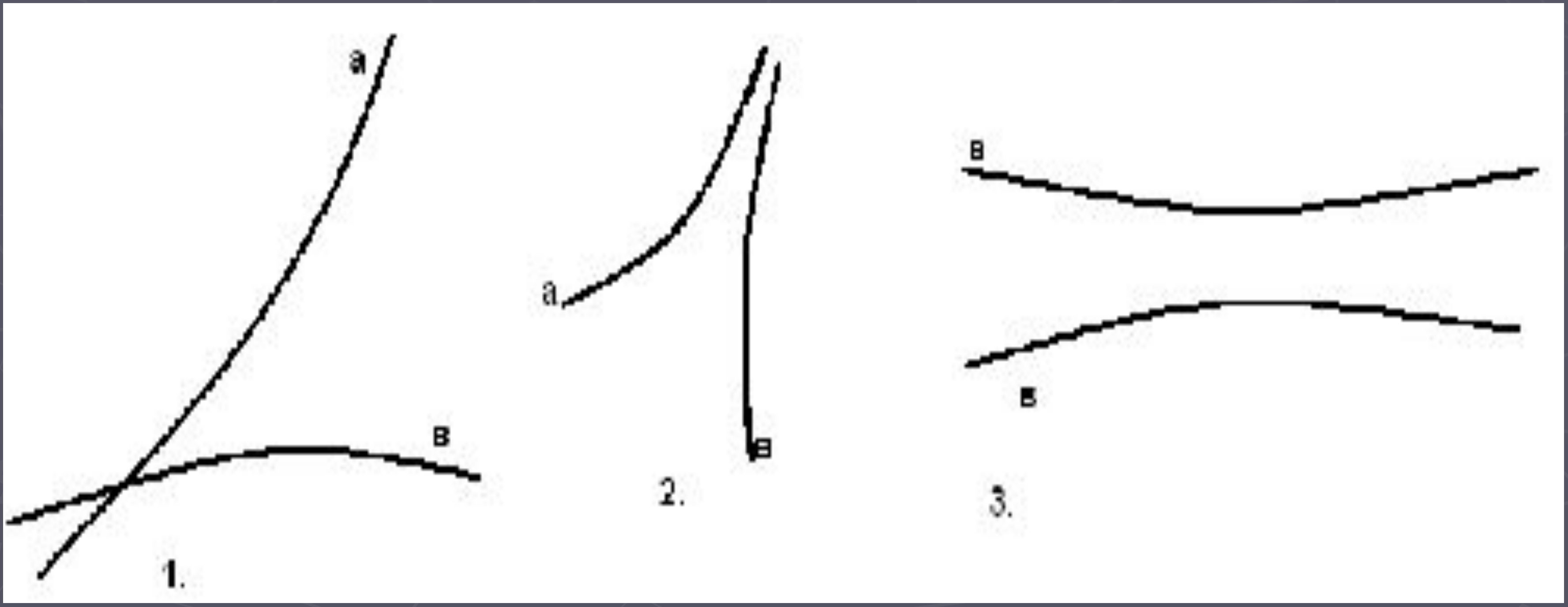


В геометрии Лобачевского:

- Два неравных равносторонних треугольника имеют неравные углы.
- В геометрии Лобачевского не существует подобных фигур.
- Если углы одного треугольника равны соответственно углам другого треугольника, то эти треугольники равны.
- Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону есть кривая линия, которая называется эквидистантой.

Возможные расположения двух прямых на плоскости Лобачевского:

- Две несовпадающие прямые либо пересекаются в одной точке, либо параллельны, либо являются расходящимися



Геометрия Римана

Через некоторое время идеи Лобачевского были приняты математиками, и следующим этапом развития геометрии стала эллиптическая геометрия Римана. Риман исходил из того, что через точку, не лежащую на данной прямой, вообще нельзя провести прямую, не пересекающую данную.

В геометрии Римана:

- две прямые всегда пересекаются, параллельных прямых совсем нет;
- сумма углов прямолинейного треугольника больше 180°;
- прямая имеет конечную длину, плоскость – конечную площадь и др.

Исследования Саккери

Итальянец Саккери рассматривал четырехугольник с тремя прямыми углами (рис. 3). Четвертый угол (обозначим его через ф) мог оказаться прямым, тупым или острым. Саккери установил, что гипотеза прямого угла, т.е. утверждение о том, что четвертый угол ф всегда равен 900, позволяет доказать пятый постулат. Иначе говоря, гипотеза прямого угла представляет собой новую аксиому, эквивалентную пятому постулату.

Гипотезу тупого угла, допускающую существование четырехугольника, у которого четвертый угол ф тупой, Саккери отверг при *помощи* ***строгого рассуждения. Однако доказать, что и гипотеза острого угла неверна, ни сам Саккери, ни его последователи не смогли. Неприступная "крепость" пятого постулата осталась непокоренной.***

Исследования Гаусса

Гаусс обратился к теории параллельных в 1792 г. Сначала он надеялся доказать пятый постулат, но затем пришел к мысли о построении новой геометрии, которую назвал неевклидовой.

В 1817 г. в одном из писем признался: "Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана". Но обнародовать эти идеи он не решился из боязни быть непонятым.

Гаусс не опубликовал ни один из своих результатов, хотя из его писем и личных бумаг видно, что он разработал основные положения неевклидовой геометрии.

Исследования Януша Больяй

- *Творцом новой геометрии стал так же и венгерский математик Янош Больяй (1802 - 1860). В отличие от Гаусса он стремился распространить свои идеи, но большинство математиков тогда еще не были готовы их воспринять.*
- *Результаты Яноша Больяя были сжато изложены в 1832 г. в приложении книге его отца, Фаркаша Больяя. Труд Я. Больяя "Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)" обычно кратко называют "Аппендикс" (от лат. "приложение").*

Исследования Лобачевского

Русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский, писал, что задача о параллельных прямых представляет собой "трудность, до сих пор непобедимую, но между тем заключающую в себе истины ощутительные, вне всякого сомнения, и столь важные для целей науки, что никак не могут быть обойдены".

НАСКОЛЬКО ВЕЛИК ТРУД, ЗАТРАЧЕННЫЙ НА ИССЛЕДОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОБЛЕМОЙ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА V ПОСТУЛАТА, МОЖНО СУДИТЬ ПО ТОМУ, ЧТО ИЗВЕСТНО ОКОЛО 250 СЕРЬЁЗНЫХ СОЧИНЕНИЙ, ПОСВЯЩЁННЫХ ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И НЕ ДОСТИГШИХ ПОСТАВЛЕННОЙ ЦЕЛИ. ОДНАКО, НЕСМОТРЯ НА БЕЗРЕЗУЛЬТАТНОСТЬ И ТЩЕТНОСТЬ ВСЕХ ПОПЫТОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА V ПОСТУЛАТА, ОНИ ВСЁ ЖЕ НЕ БЫЛИ БЕСПОЛЕЗНЫ. В РЕЗУЛЬТАТЕ ЭТИХ МНОГОВЕКОВЫХ ПОИСКОВ БЫЛИ ВЫЯВЛЕНЫ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ВАЖНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПРЕДЛОЖЕНИЯМИ И, В ЧАСТНОСТИ, БЫЛИ ОТКРЫТЫ ПРЕДЛОЖЕНИЯ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ V ПОСТУЛАТУ. НАПРИМЕР, В СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЬНОЙ ПРАКТИКЕ V ПОСТУЛАТ ИЗВЕСТЕН, КАК АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛЕЙФЕРА: «ЧЕРЕЗ ТОЧКУ, ЛЕЖАЩУЮ ВНЕ ДАННОЙ ПРЯМОЙ, МОЖНО ПРОВЕСТИ ТОЛЬКО ОДНУ ПРЯМУЮ, ПАРАЛЛЕЛЬНУЮ ДАННОЙ».