XIX Российская научная конференция школьников «Открытие»

Решение систем уравнений методом итерации функции

Автор – Дюкин Руслан Дамирович

Обучающийся 10 класса

Балезинской средней школы №5

п. Балезино, Удмуртская республика

Научный руководитель –

Касимов Рифхат Шамилович

Учитель математики и физики

Балезинской средней школы №2

Ярославль, 2016

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \\ z = \dfrac{2y^2}{1+y^2} \\ x = \dfrac{2z^2}{1+z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \\ z = \dfrac{2y^2}{1+y^2} \\ x = \dfrac{2z^2}{1+z^2} \end{cases} \qquad x \to y \to z \to x$$

$$y = f(x)$$
$$z = f(y) = f\big(f(x)\big)$$
$$x = f(z) = f\big(f(y)\big) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} \qquad \frac{2x^2}{1+x^2} = x \quad 2x^2 = x + x^3$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$
$$x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ или } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 0\ ;$$
$$x_2 = -\frac{b}{2a} = 1$$

$$x = y = z = 0$$
$$x = y = z = 1$$

Ответ: (0;0;0), (1;1;1).

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1 \\ x_3 + \dfrac{1}{x_4} = 4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 4 \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$$

Для нахождения корней используем последовательность $\{x_1; x_3; \dots; x_{99}\}$:

$$x_3 = \frac{1}{1 - x_2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4 - x_1}} = \frac{1}{\frac{3 - x_1}{4 - x_1}} = \frac{4 - x_1}{3 - x_1} \Longrightarrow x_5 = \frac{4 - x_3}{3 - x_3} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x_{99} = \frac{4 - x_{97}}{3 - x_{97}}$$

$$f(x) = \frac{4 - x}{3 - x} \qquad x = f\Big(f\big(\dots\big(f(x)\big)\dots\big)\Big) = f(x) \qquad \frac{4 - x}{3 - x} = x \qquad 4 - x = 3x - x^2$$

$$\begin{gathered} x^2 - 4x + 4 \\ D = b^2 - 4ac = 0 \\ x_0 = \frac{-b}{2a} = 2 \end{gathered} \Longrightarrow x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 2$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{4 - x_1} \\ x_3 = \dfrac{1}{1 - x_2} \\ x_4 = \dfrac{1}{4 - x_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{100} = \dfrac{1}{4 - x_2} \\ x_1 = \dfrac{1}{1 - x_{100}} \end{cases}$$

Далее подставляем значения;

$$x_2 = \frac{1}{4 - x_1} = \frac{1}{4 - 2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 2$;

$$x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{y}{2} + \frac{1}{2y} \\ y = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \\ z = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{y^2 + 1}{2y} \\ y = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ z = \frac{x^2 + 1}{2x} \end{cases}$$

$$y \longrightarrow x \longrightarrow z \longrightarrow y$$

$$f(f(f(y))) = f(y) = y$$

$$\frac{y^2 + 1}{2y} = y$$

$$y^2 + 1 = 2y^2$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1 \Longrightarrow y = 1$$

Ответ: $(1; 1; 1)$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y + 2z = 4 \\ z + 2t = 4 \\ t + 2x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y = 4 - 2z \\ z = 4 - 2t \\ t = 4 - 2x \end{cases}$$

$$x \longrightarrow t \longrightarrow z \longrightarrow y \longrightarrow x$$

$$x = f\left(f\left(f\big(f(x)\big)\right)\right) = f(x) \implies f(x) = x$$

$$f(x) = 4 - 2x$$

$$4 - 2x = x$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Ответ: $(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3})$

$$\begin{cases} y = \frac{2x^2}{1+x^2} \\ z = \frac{2y^2}{1+y^2} \\ x = \frac{2z^2}{1+z^2} \end{cases}$$

$$xyz = \frac{8(xyz)^2}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$xyz = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ или } y = 0 \text{ или } z = 0$$

$$x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow z = 0$$

$$y = 0 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$z = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$xyz \neq 0$$

$$xyz = \frac{8(xyz)^2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \quad |: xyz \qquad 1 = \frac{8xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$ |сократим дробь на xyz|

$$1 = \frac{8}{(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})(z+\frac{1}{z})}$$

По теореме:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2;\ y + \frac{1}{y} \geq 2;\ \ z + \frac{1}{z} \geq 2 \ \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) \geq 8$$

$$\frac{1}{(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})(z+\frac{1}{z})} \leq \frac{1}{8} \mid *\, 8 \qquad \frac{8}{(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})(z+\frac{1}{z})} \leq 1 \ \Rightarrow \frac{8}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)} = 1$$

Равенство возможно только при x=1, y=1, z=1 (по теореме)

Ответ: (0;0;0), (1;1;1)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Сложим уравненния между собой:

$$x + y + z = \frac{y}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1}{2y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2z}$$

$$\frac{1}{2}(x + y + z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

По теореме:

$$y + \frac{1}{y} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1$$

$$z + \frac{1}{z} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq 1$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1 \Rightarrow z \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \leq 1$$

$$\begin{cases} x + y + z \geq 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix}$$

Ответ: $(1; 1; 1)$

$$\begin{cases} yz = \dfrac{10}{3} \\ zx = \dfrac{10}{3} \\ xy = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{10}{3z} \\ z = \dfrac{10}{3x} \\ x = \dfrac{10}{3y} \end{cases}$$

$$x \longrightarrow z \longrightarrow y \longrightarrow x$$

$$x = f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{10}{3x}$$

$$\frac{10}{3x} = x$$

$$3x^2 = 10$$

$$x^2 = \frac{10}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$$

Ответ: $\left(\pm\sqrt{\dfrac{10}{3}}; \pm\sqrt{\dfrac{10}{3}}; \pm\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)$

$$\begin{cases} y + z^2 = 2 \\ z + x^2 = 2 \\ x + y^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 - z^2 \\ z = 2 - x^2 \\ x = 2 - y^2 \end{cases}$$

$$x \longrightarrow z \longrightarrow y \longrightarrow x$$

$$x = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)$$

$$f(x) = 2 - x^2$$

$$2 - x^2 = x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = 1$$

Ответ:(-2;-2;-2); (1;1;1)

- Я познакомился с методом итерации как с теоретической, так и с практической точки зрения:
- 1. Мне удалось указанным методом решить 5 систем уравнений;
- 2. Все эти системы (каждую) мне удалось решить ещё другими способами, что подтвердило мне:
- Во-первых, рациональность метода итерации;
- Во-вторых,правильность полученных методом итерации решений.

Спасибо за внимание