

Теорема Пифагора



«Ни о ком не говорят так
много и так необычайно»
(Порфирий).

*Пифагор - древнегреческий
ученый VI в. до н. э.*



Изречения Пифагора

- Статуя формой своей хороша,
А человека украсят дела.



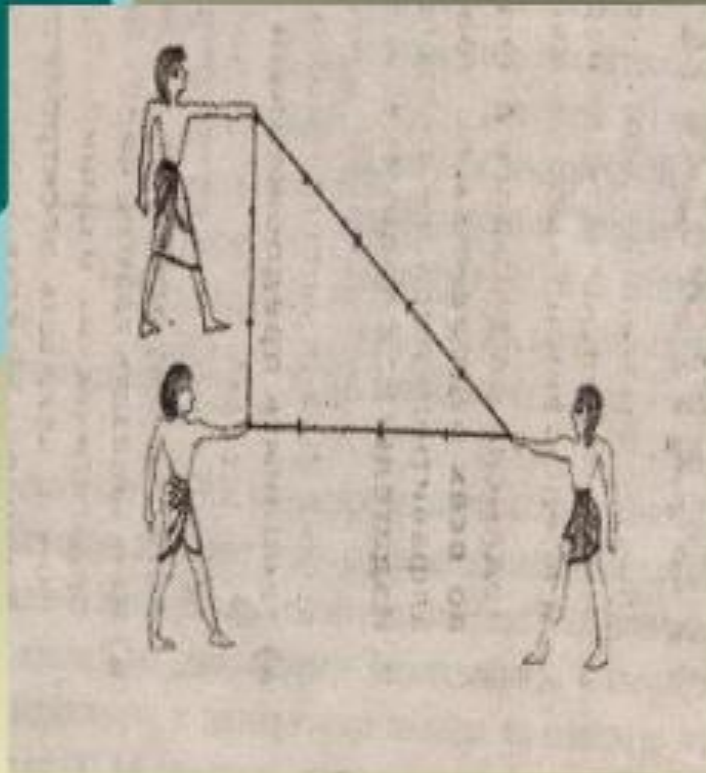
- Шуткой беседу укрась, освети.
Шутка, что соль. Лишь не пересоли...
- Лучше молчи, ну, а коль говоришь,
Пусть будет лучше, чем то, что молчишь.
- Если ты в гневе, не смей говорить!
Действовать резко и злобу сорить.
- Пред тем, как станешь говорить, пусть мысль
созреет
Под языком твоим. Созревшая - все смеет.

Почему же теперь эту теорему называют теоремой Пифагора?

Считают, что Пифагор доказал эту теорему, опираясь на рассуждения. До него утверждение о равенстве квадрата гипотенузы сумме квадратов катетов было известно лишь как факт, замеченный из построений.



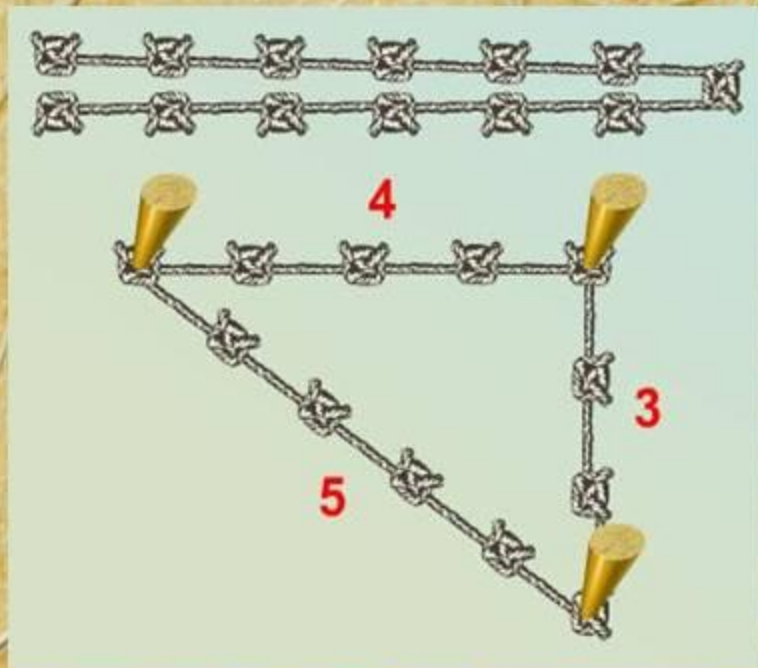
О теореме Пифагора



- Теорема Пифагора – одна из главных теорем геометрии, имеет богатую историю. Оказывается, задолго до Пифагора она была известна египтянам (верёвочным треугольником со сторонами 3, 4, 5 они пользовались для построения прямых углов), вавилонянам, индийцам (они использовали её для построения алтарей). По видимому они не знали её доказательства, а Пифагор доказал.
- Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам 100 быков.
- В настоящее время существует более 100 доказательств теоремы.
- Значение теоремы состоит в том, что с её помощью можно доказывать другие теоремы и решать задачи.

Теорема Пифагора имеет богатую историю.

Она была известна задолго до Пифагора. За 8 веков до н. э. эта теорема была хорошо известна индийцам под названием *«Правила веревки»* и использовалась ими для построения алтарей, которые по священному предписанию должны иметь строгую геометрическую форму, ориентированную относительно четырех сторон горизонта.



Пифагор, не открыл эту теорему, а нашел ее доказательство, хотя доказательство самого Пифагора до нас не дошло.

Значение теоремы состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии и решить множество задач.

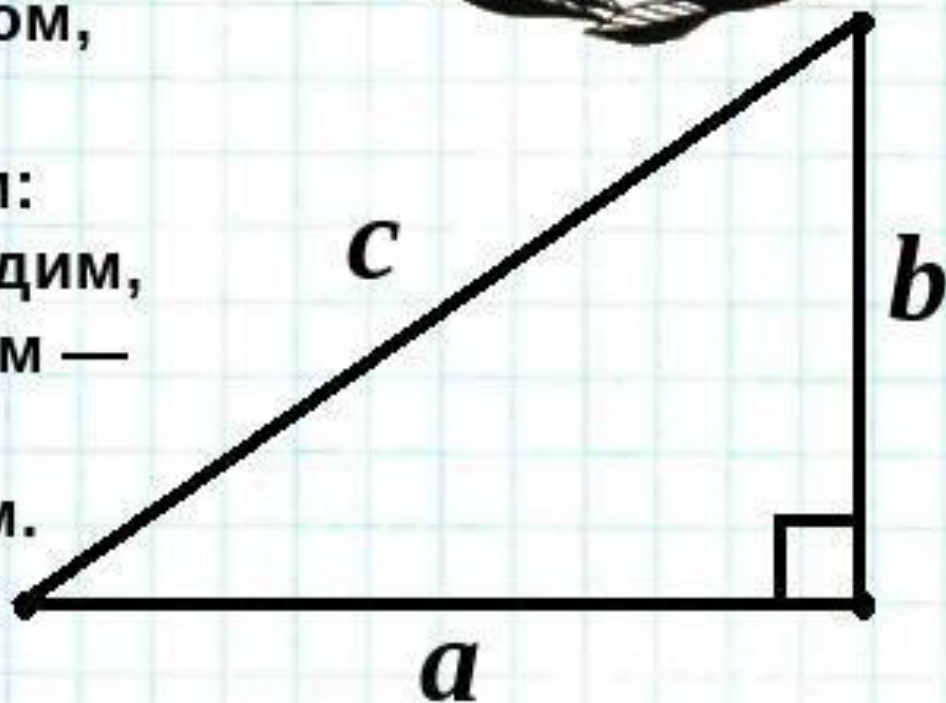
Хронология развития теоремы до Пифагора:

№	Историческое место	дата
1	Древний Китай (математическая книга Чу-пей)	~2400 г. до н. э.
2	Древний Египет (гарпедонапты или "натягиватели веревок")	2300 г. до н. э.
3	Вавилон (Хаммураби)	2000 г. до н. э.
4	Древняя Индия (сборник Сульвасутра)	600 г. до н. э.
5	Пифагор	570 г. до н. э.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Если дан нам треугольник
И притом с прямым углом,
То квадрат гипотенузы
Мы всегда легко найдем:
Катеты в квадрат возводим,
Сумму степеней находим —
И таким простым путем
К результату мы придем.



И. Дырченко

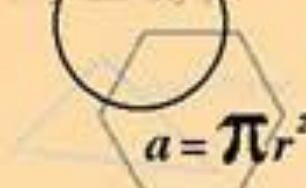
Пифагор и его теорема



Пребудет вечной истина, как скоро
Ее познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далекий век.
Обильно было жертвоприношение
Богам от Пифагора. Сто быков
Он отдал на закланье и сожженье
За света луч, пришедший с облаков.
Поэтому всегда с тех самых пор,
Чуть истина рождается на свет,
Быки ревут, ее почуя, вслед.
Они не в силах свету помешать.
А могут лишь, закрыв глаза, дрожать
От страха, что вселил в них Пифагор.

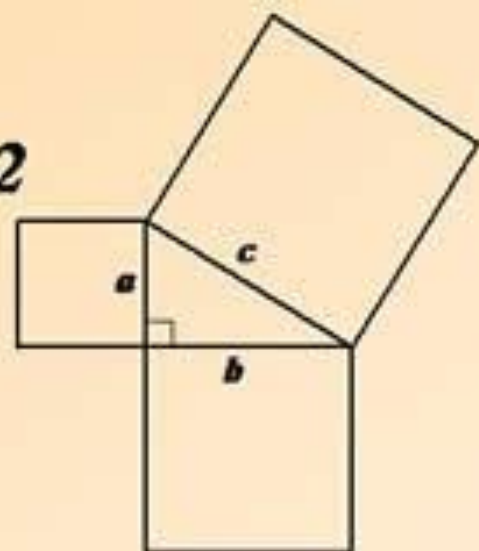
А. Шамиссо

$$x^2 + y^2 + 2dx + 2ay + c = 0$$



*Современная
формулировка
теоремы Пифагора*

$$c^2 = a^2 + b^2$$



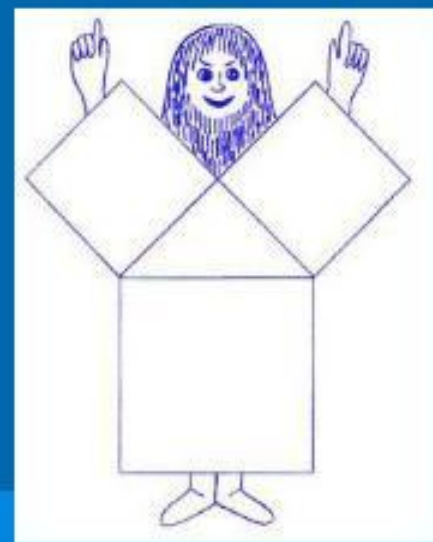
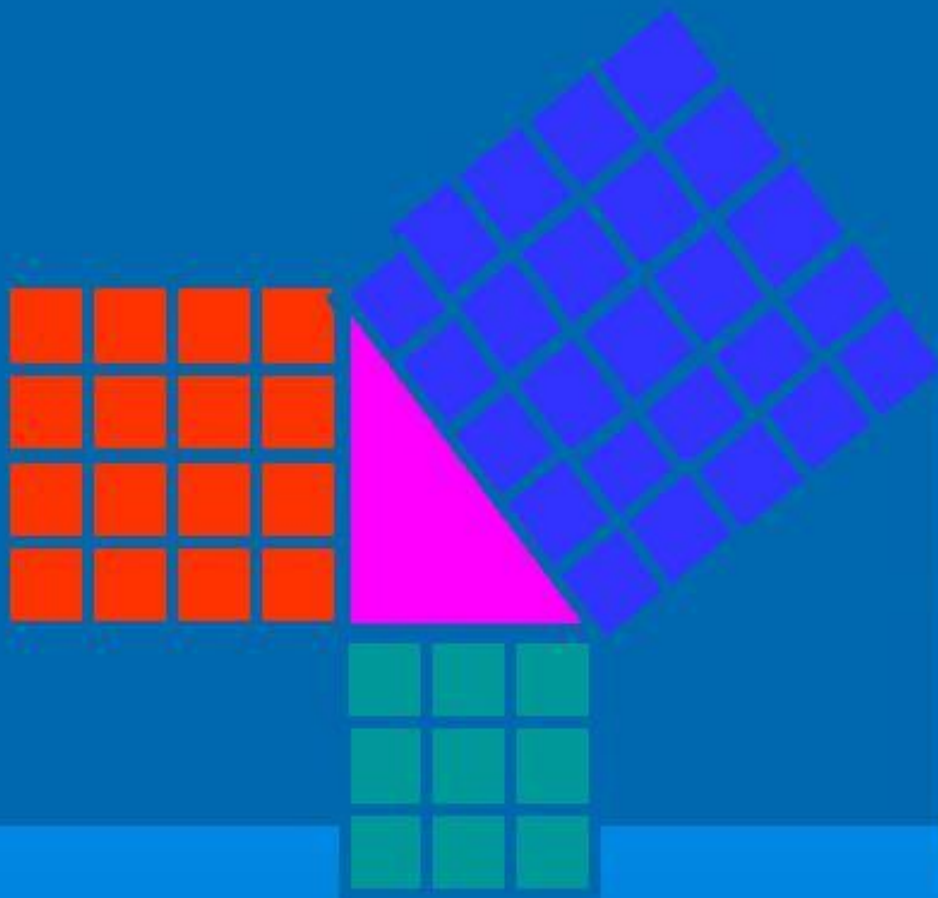
**«В прямоугольном
треугольнике квадрат
гипотенузы равен
сумме квадратов
катетов».**

*Во времена Пифагора
формулировка теоремы
звучала так:*

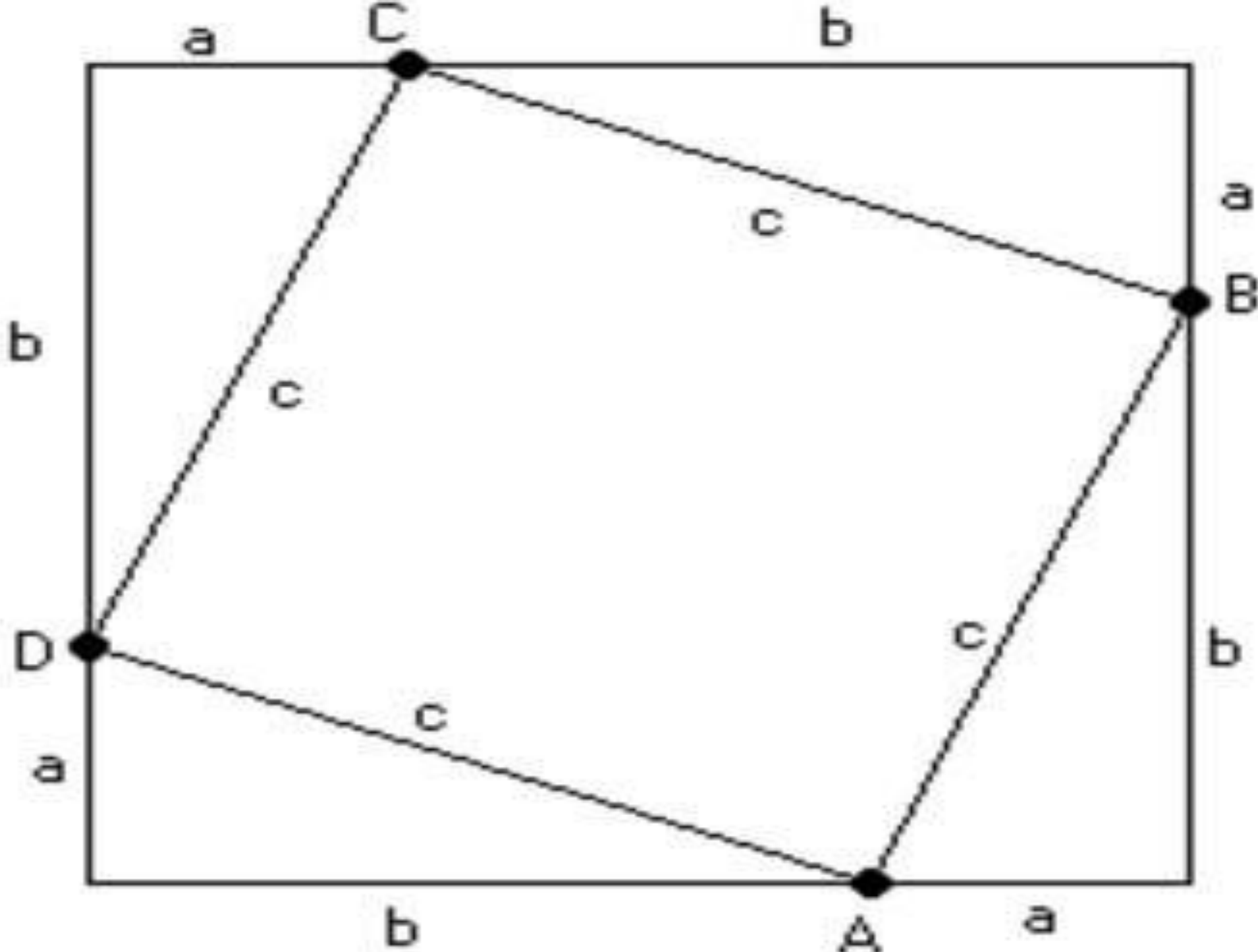


**«Квадрат, построенный
на гипотенузе прямо-
угольного треугольника,
равновелик сумме
квадратов, построенных
на катетах».**

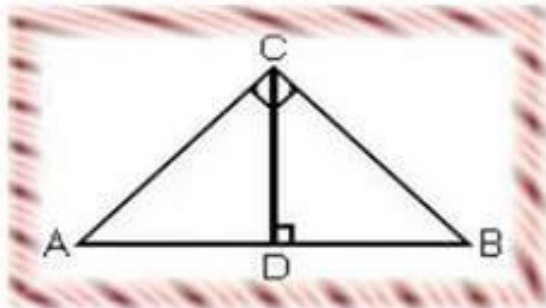
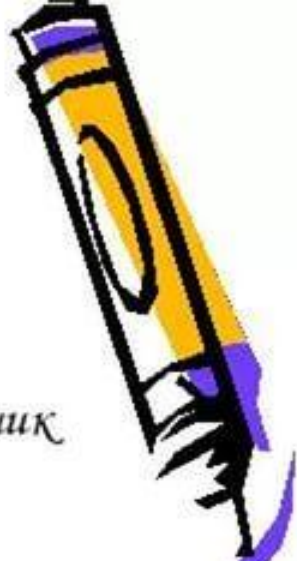
- Пифагоровы штаны на все стороны равны



Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме квадратов, построенных на его катетах.



I. Алгебраическое доказательство



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный треугольник
Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Доказательство:

- 1) Проведем высоту CD из вершины прямого угла C .
- 2) По определению косинуса угла $\cos A = AD/AC = AC/AB$, отсюда следует

$$AB \cdot AD = AC^2.$$

- 3) Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$, значит

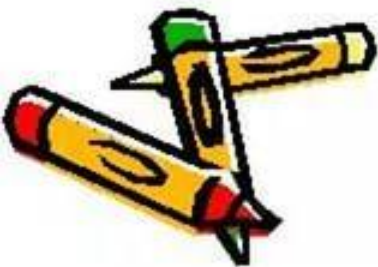
$$AB \cdot BD = BC^2.$$

- 4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

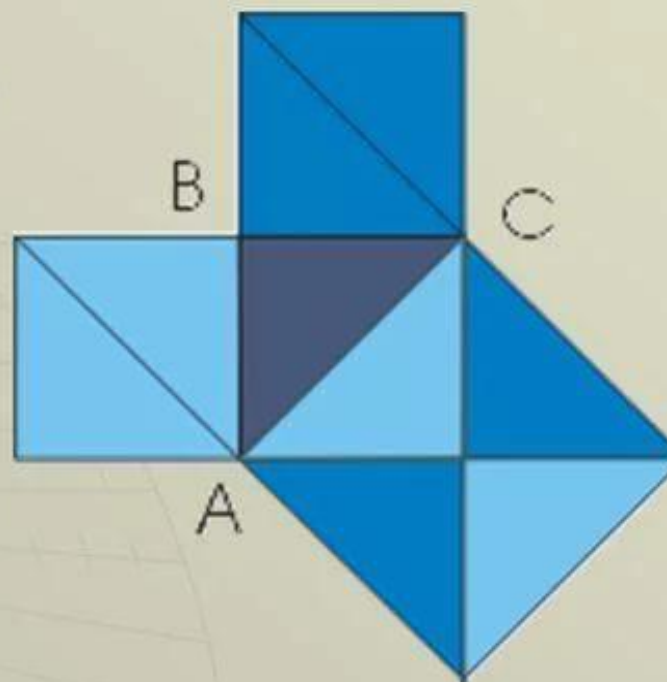
Что и требовалось доказать.



Доказательства теоремы Пифагора.

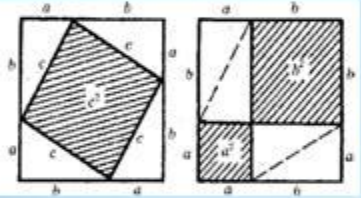
✓ Простейшее доказательство.

Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для треугольника ABC : квадрат, построенный на гипотенузе AC , содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах - по два.



Древнеиндийское доказательство

Доказывая эту теорему просто говорили: «Смотри!» Квадрат, сторона которого имеет длину $a + b$, можно разбить на части. Ясно, что невыделенные части на обоих рисунках одинаковы.



Доказательство Мёльманна

$$2. \text{ Имеем: } 0,5ab = 0,5pr = 0,5(a+b+c) \cdot 0,5(a+b-c)$$

$$0,5ab = 0,5(a+b+c) \cdot 0,5(a+b-c)$$

$$ab = 0,5(a^2 + ab - ac - ab + b^2 - bc + ca + cb - c^2)$$

$$ab = 0,5(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) / \cdot 2$$

$$2ab = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$$

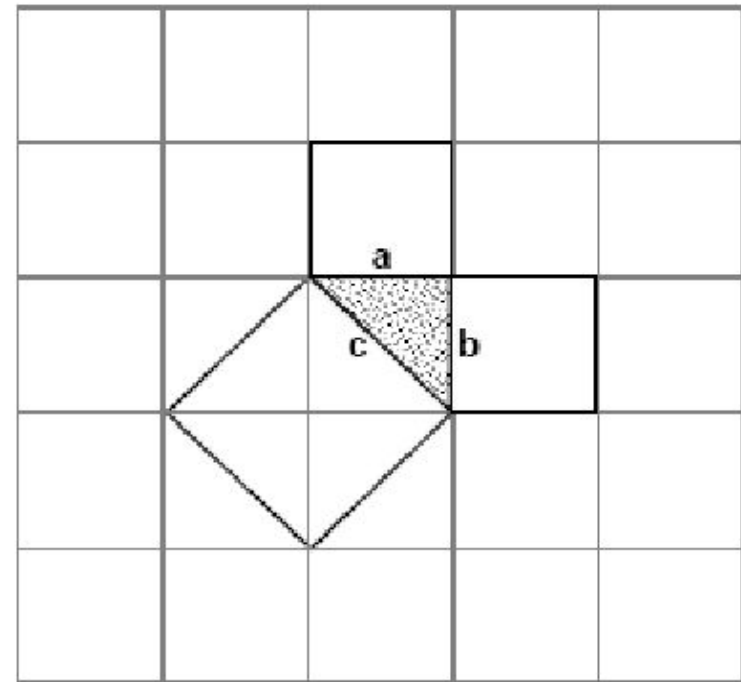
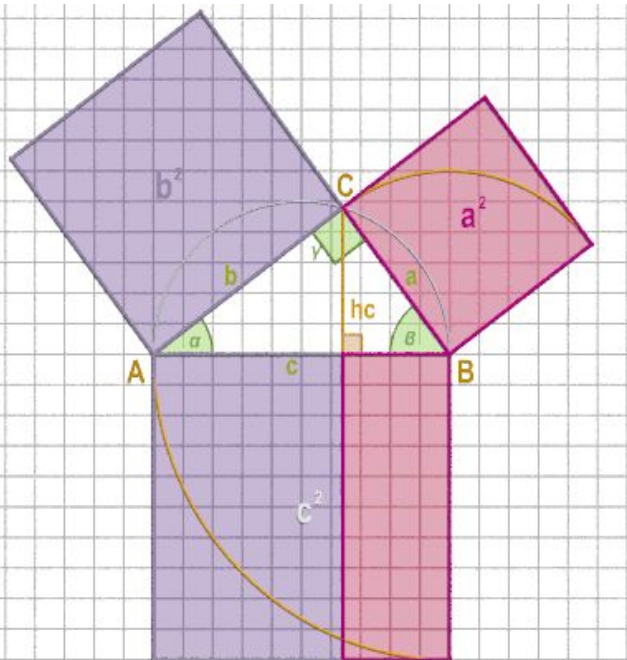
$$a^2 + b^2 - c^2 = 0$$



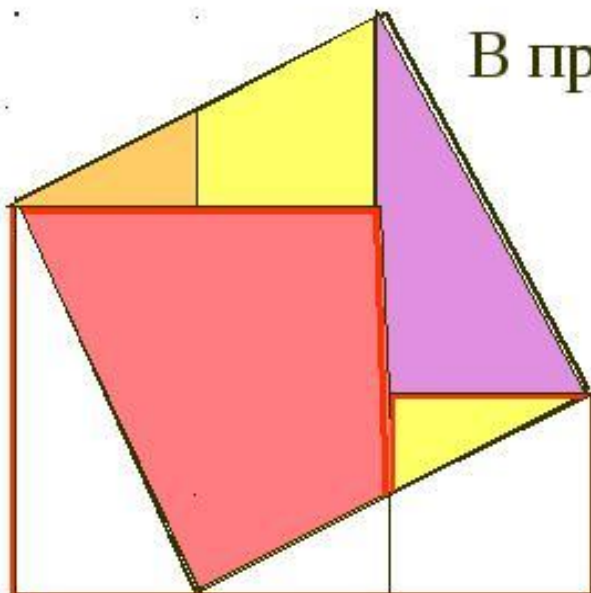
3. Отсюда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$

Что и требовалось доказать!

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



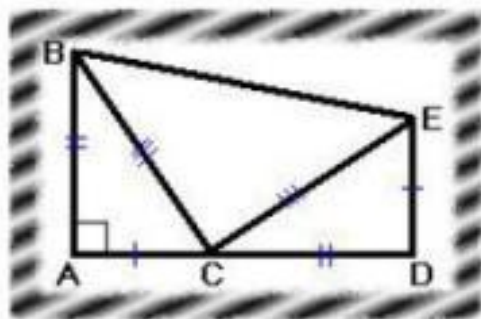
Доказательство из учебников XIX и XX вв.



В прямоугольном треугольнике
квадрат, построенный на
гипотенузе
может быть составлен
из частей квадратов,
построенных на катетах

Теорема доказана

IV. Геометрическое доказательство



Дано: ABC -прямоугольный треугольник
Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Доказательство:

- 1) Построим отрезок CD равный отрезку AB на продолжении катета AC прямоугольного треугольника ABC . Затем опустим перпендикуляр ED к отрезку AD , равный отрезку AC , соединим точки B и E .
- 2) Площадь фигуры $ABED$ можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED} = 2 \cdot AB \cdot AC / 2 + BC^2 / 2$$

- 3) Фигура $ABED$ является трапецией, значит, её площадь равна

$$S_{ABED} = (DE + AB) \cdot AD / 2$$

- 4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (DE + AB) \cdot (CD + AC) / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (AC + AB) \cdot AC / 2$$

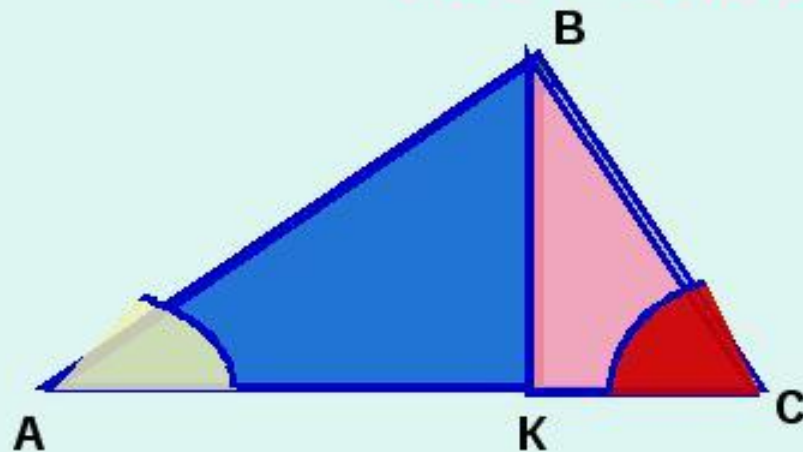
$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = AC^2 / 2 + AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.



ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



ДАНО: $\triangle ABC$ – прямоугольный,
 $\angle ABC = 90^\circ$, BK – высота

ДОКАЗАТЬ:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\text{Из } \triangle ABK \rightarrow \cos \angle A = AK : AB$$

$$\text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle A = AB : AC$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Из } \triangle ABK \rightarrow \cos \angle A = AK : AB \\ \text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle A = AB : AC \end{array} \right\} \rightarrow AK : AB = AB : AC \rightarrow AB^2 = AK \cdot AC$$

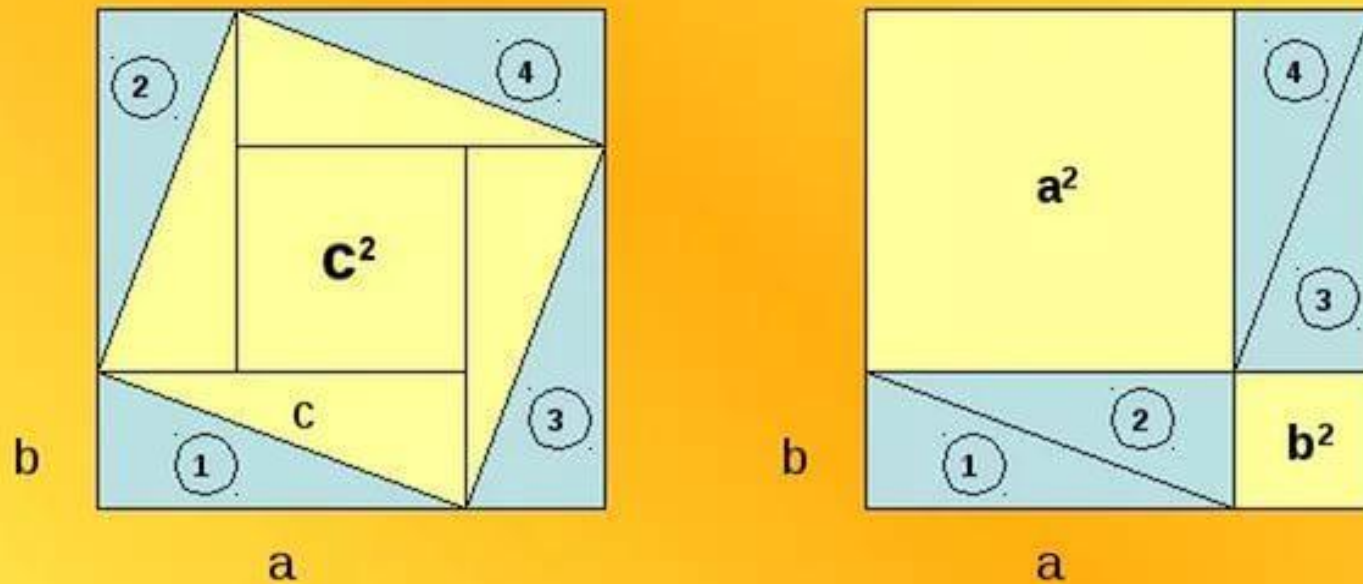
$$\text{Из } \triangle BCK \rightarrow \cos \angle C = KC : BC$$

$$\text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle C = BC : AC$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Из } \triangle BCK \rightarrow \cos \angle C = KC : BC \\ \text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle C = BC : AC \end{array} \right\} \rightarrow KC : BC = BC : AC \rightarrow BC^2 = KC \cdot AC$$

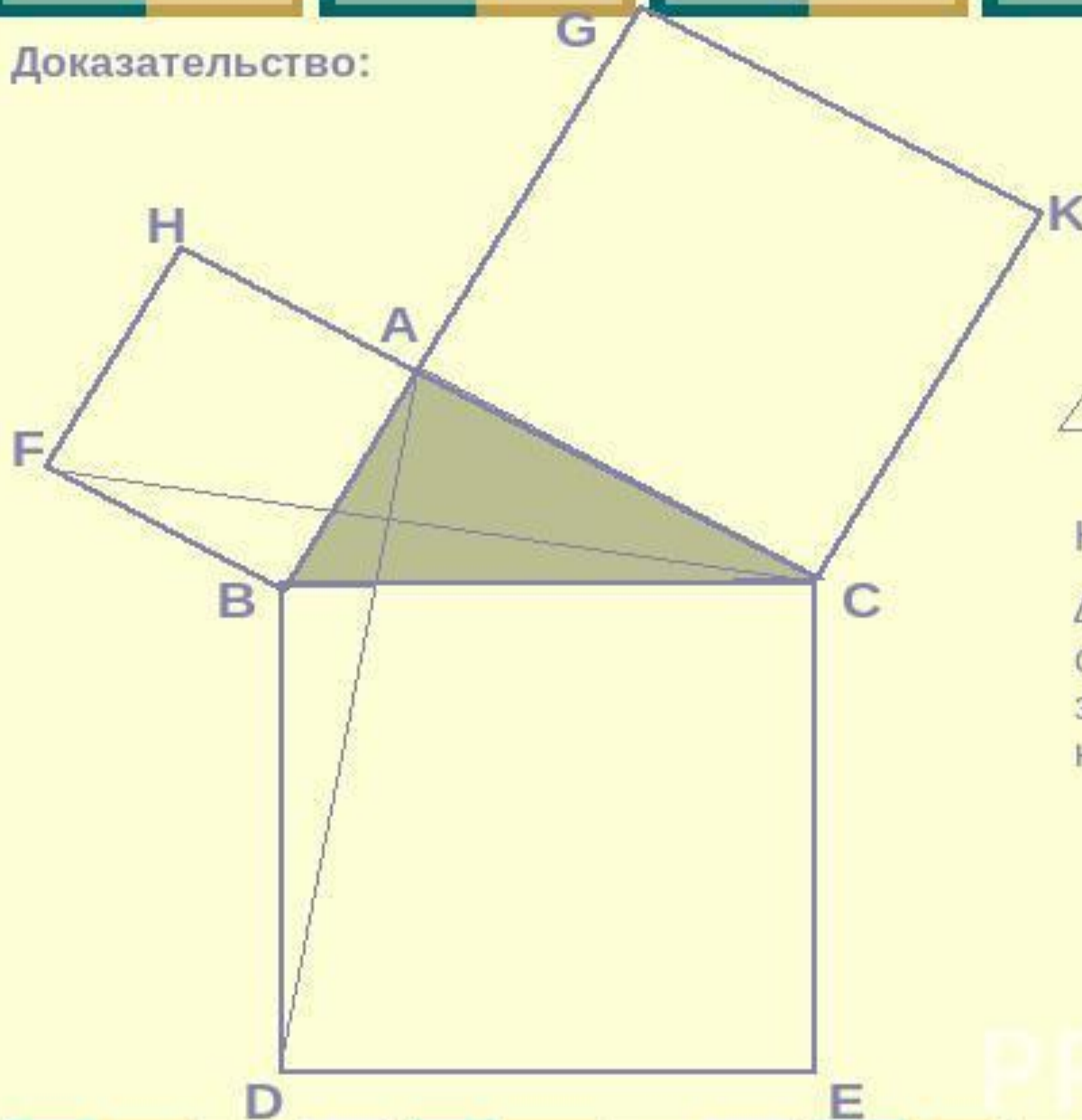
$$AB^2 + BC^2 = AK \cdot AC + KC \cdot AC = AC \cdot (AK + KC) = AC \cdot AC = AC^2$$

Древнекитайское доказательство теоремы Пифагора – 1-й вар. (2)



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Доказательство:



$$\angle DBC = \angle FBA = 90^\circ$$

$$\angle DBC + \angle ABC =$$

$$\angle FBA + \angle ABC$$

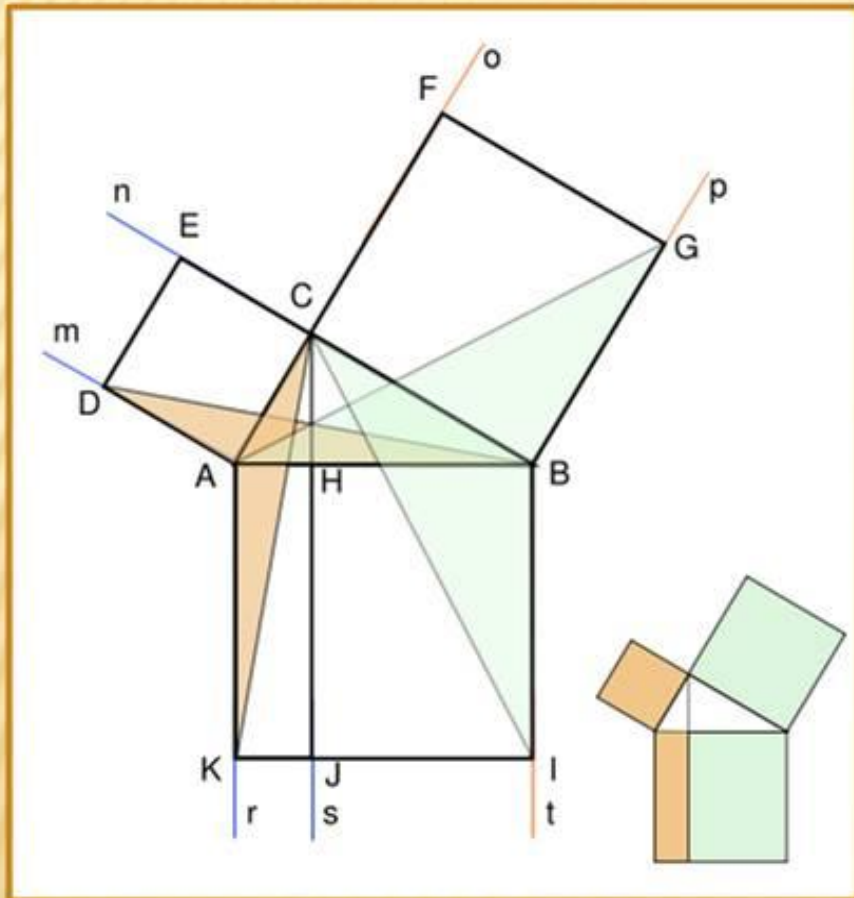
Значит,

$$\angle DBA = \angle FBC.$$

Но $AB=FB$, $BC=BD$.

$\triangle ABD = \triangle FBC$ (по двум сторонам и углу, заключенному между ними).

Доказательство Евклида



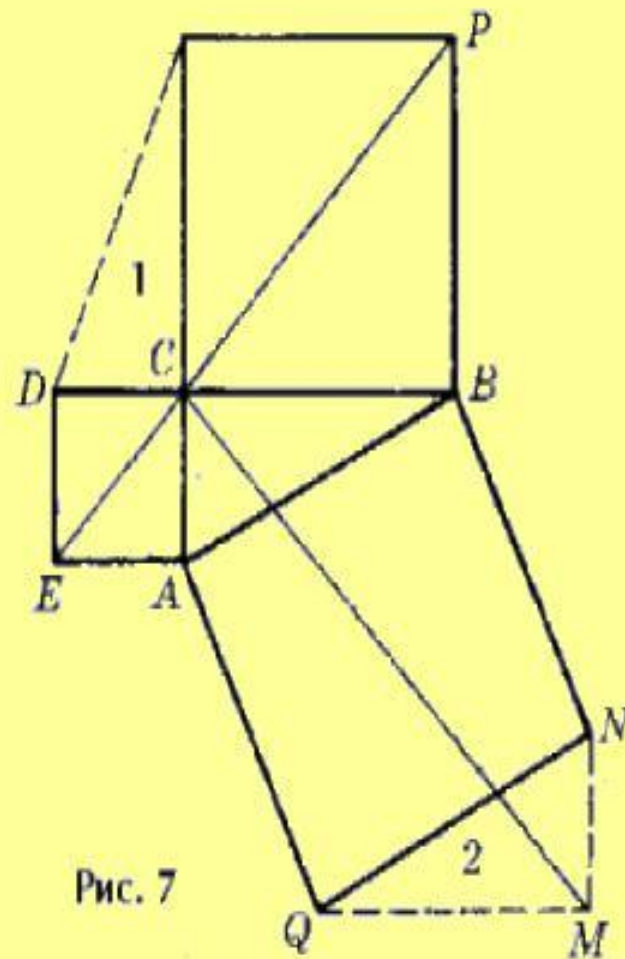
В течение двух тысячелетий наиболее распространённым доказательством теоремы Пифагора было придуманное Евклидом.

Евклид опускал высоту CH из вершины прямого угла на гипотенузу и доказывал, что её продолжение делит достроенный на гипотенузе квадрат на два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих квадратов, построенных на катетах.

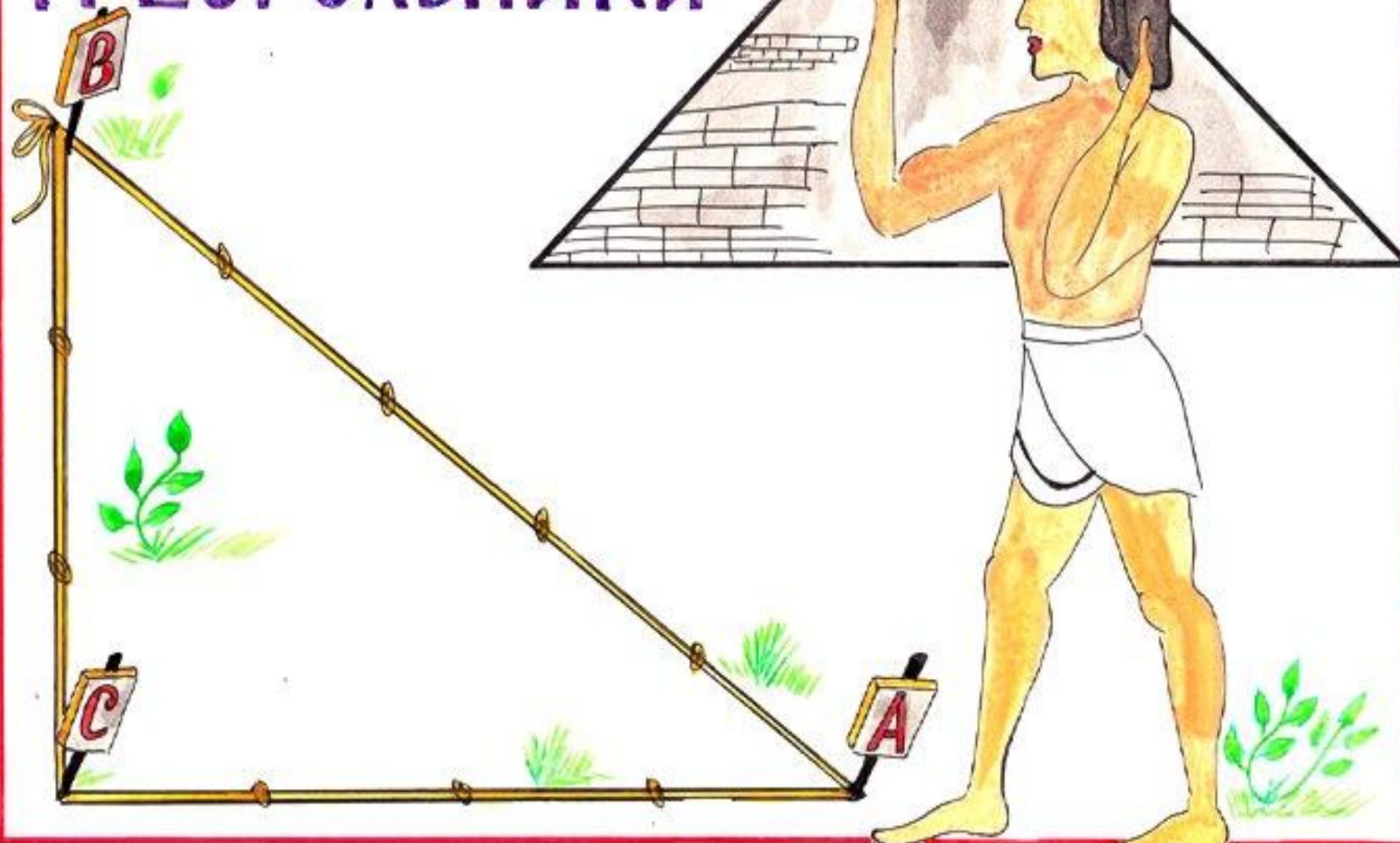
Доказательство методом достроения

Сущность этого метода состоит в том, что к квадратам, построенным на катетах, и к квадрату, построенному на гипотенузе, присоединяют равные фигуры таким образом, чтобы получились равновеликие фигуры.

На рис. 7 изображена обычная Пифагорова фигура – прямоугольный треугольник ABC с построенными на его сторонах квадратами. К этой фигуре присоединены треугольники 1 и 2, равные исходному прямоугольному треугольнику.



ПИФАГОРОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ



Применение теоремы Пифагора

- Пифагоины тройки
- Астрономия
- Архитектура
- Мобильная связь
- Масштабы



Применение теоремы Пифагора в строительстве



Значение теоремы Пифагора



В конце 19 века высказывались предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку.. Было решено передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора. Математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал

Память.

- Памятник Пифагору находится в порту города Пифагория и напоминает всем о теореме Пифагора, наиболее известном его открытии. Катет, лежащий в основании треугольника - мраморный, гипотенуза и фигура самого Пифагора в виде второго катета - медные.

