Теоремы Чевы и Менелая

Геометрия 10 класс
(профильный уровень)

Изучение нового материала

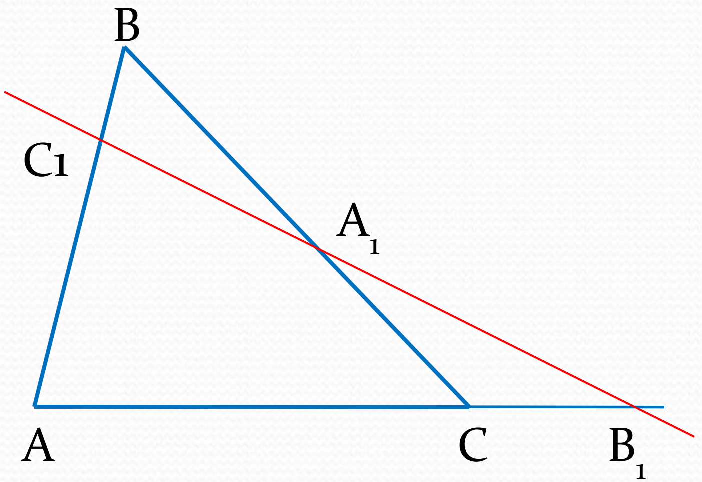
Теорема Менелая

Менелай Александрийский – древнегреческий математик (Iв.н.э.)

Пусть на сторонах или продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1, не совпадающие с его вершинами, причем

$$\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}, \ \overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}, \ \overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$$

Тогда если точки C_1, A_1, B_1 лежат на одной прямой, то pqr=-1; обратно: если pqr=-1, то точки C_1, A_1, B_1 лежат на одной прямой.



Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка C_1 – на стороне AB, точка B_1 – на продолжении стороны AC за точку C. Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\boxed{\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1}$$

Изучение нового материала

<u>Теорема Чевы</u>

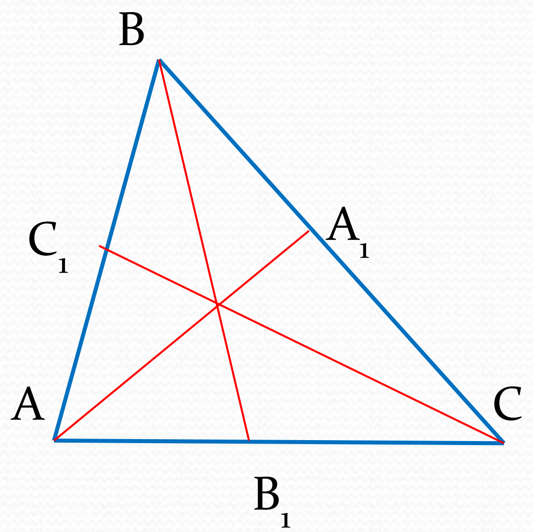
(Джованни Чева - итальянский математик 1678г)

Пусть на сторонах или продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1, не совпадающие с его вершинами, причем

$$\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B},\ \overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C},\ \overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$$

Тогда если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны, то

pqr=1; обратно: если pqr=1, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.



Пусть точка в треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 – на стороне AC, точка C_1 – на стороне AB. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство

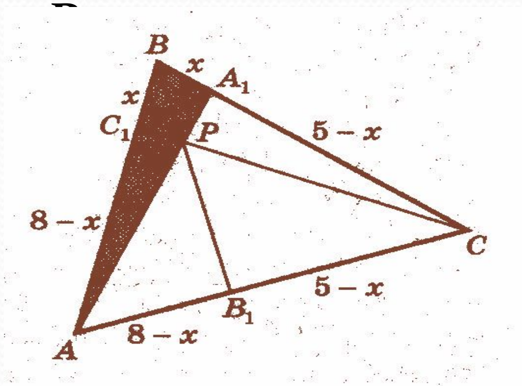
$$\boxed{\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = 1}$$

Решение задач

№1. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC=3BN; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что MA=AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найдите отношение $\frac{BF}{FA}$.

Решение задач

№2. В треугольнике АВС, описанном около окружности, АВ = 8, ВС = 5, АС = 4. A_1 и C_1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам ВС и ВА. Р – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1. Точка Р лежит на биссектрисе BB_1. Найдите $AP : PA_1$.



1. … со стороной АС не совпадает с B_1, так как треугольник АВС
2. …льзуя свойство касательных, проведенных к окружности из … ачения 8 – х + 5 – х = 4, х =4,5.
3. … $_1$С = 5 – 4,5= 0,5 AC_1 = 8 – 4,5=3,5 .
4. …мая C_1C пересекает две его стороны и продолжение третьей стороны. По теореме Менелая …

Ответ: 70 : 9.

Решение задач

№2. В треугольнике ABC, описанном около окружности, AB=13, BC=12, AC=9, A_1 и C_1 – точки касания, лежащие соответственно на сторонах BC и AB. N – точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Точка N лежит на высоте BB_1. Найдите отношение $BN:NB_1$.

.

Домашнее задание

пп.95,96

Задачи.

1. В треугольнике ABC AD – медиана, точка O– середина медианы. Прямая BO пересекает сторону AC в точке K. В каком отношении точка K делит AC, считая от точки A? (*Примечание. Рассмотрите треугольник ADC*)
2. Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.