7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ существует:

1) для непрерывных функций,
2) на конечном промежутке.

7.1. Несобственные интегралы I-го рода

О п р е д е л е н и е

. Это интегралы от непрерывных функций в бесконечном промежутке.

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \leq x < \infty$. Рассмотрим

$$J(b) = \int_a^b f(x)dx . \tag{7.1.1}$$

Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменении b интеграл меняется, он является непрерывной функцией b. Рассмотрим вопрос о поведении этого интеграла при $b \to \infty$.

О п р е д е л е н и е

Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интеграле $[a,\pm\infty[$ и обозначается $\int_a^\infty f(x)dx$.

Итак:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{7.1.2}$$

Говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ существует или сходится. Если $\int_a^b f(x)dx$ при $b\to\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что $\int_a^\infty f(x)dx$ не существует или расходится.

ПРИМЕРЫ

Пример 1. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\leftarrow\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right]=1$. Сходится.

Пример 2. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\leftarrow\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\ln b-\ln 1\right]=\infty$. Расходится.

Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

1) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, $f(x)$ непрерывна в $]-\infty,b]$.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_c^{\infty} f(x)dx$, $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси.

7.2. Несобственные интегралы II-го рода

Это интегралы в конечном промежутке от разрывных функций, а именно уходящих в ∞.

1) Пусть $f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x < b$, при $x = b$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ как о переделе интегральных сумм, так как $f(x)$ не непрерывна на $[a,b]$ и поэтому этот предел может и не существовать.

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$, разрывной в точке $x = b$ определяется следующим образом (рис. 7.2.1):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (7.2.1)$$

Если предел, стоящий справа существует, то интеграл называется несобственным интегралом II-го рода. В противном случае говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится.

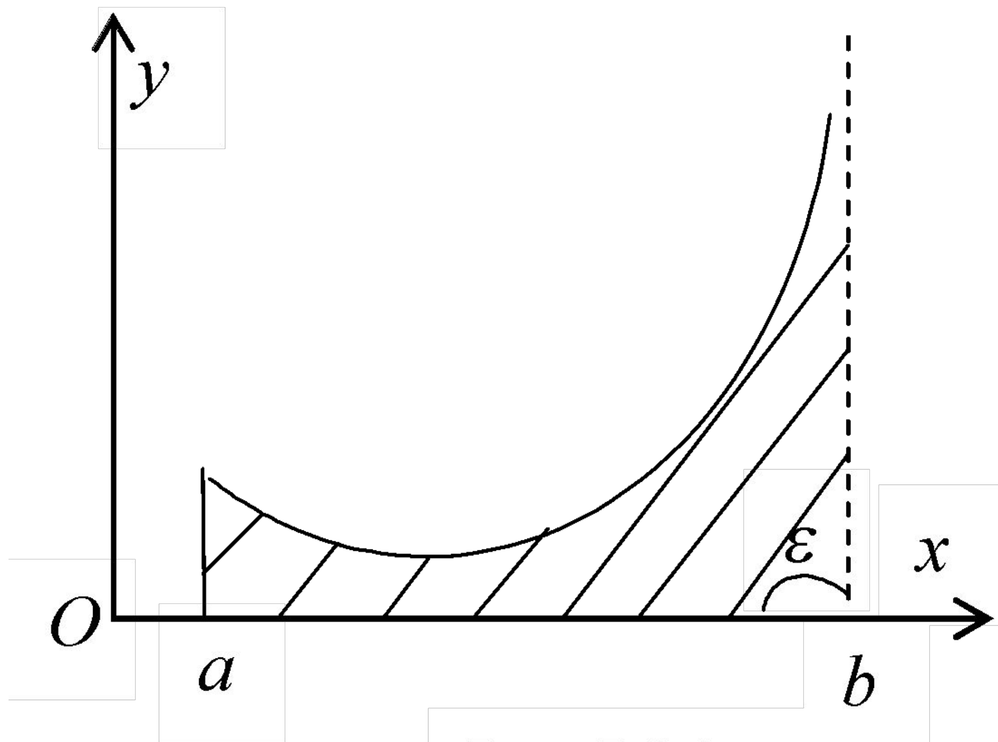

Рис. 7.2.1

2) Если $f(x)$ терпит разрыв на левом конце отрезка $[a,b]$, т.е. при $x=a$, то по определению (рис. 7.2.2)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b f(x)dx\,. \qquad (7.2.2)$$

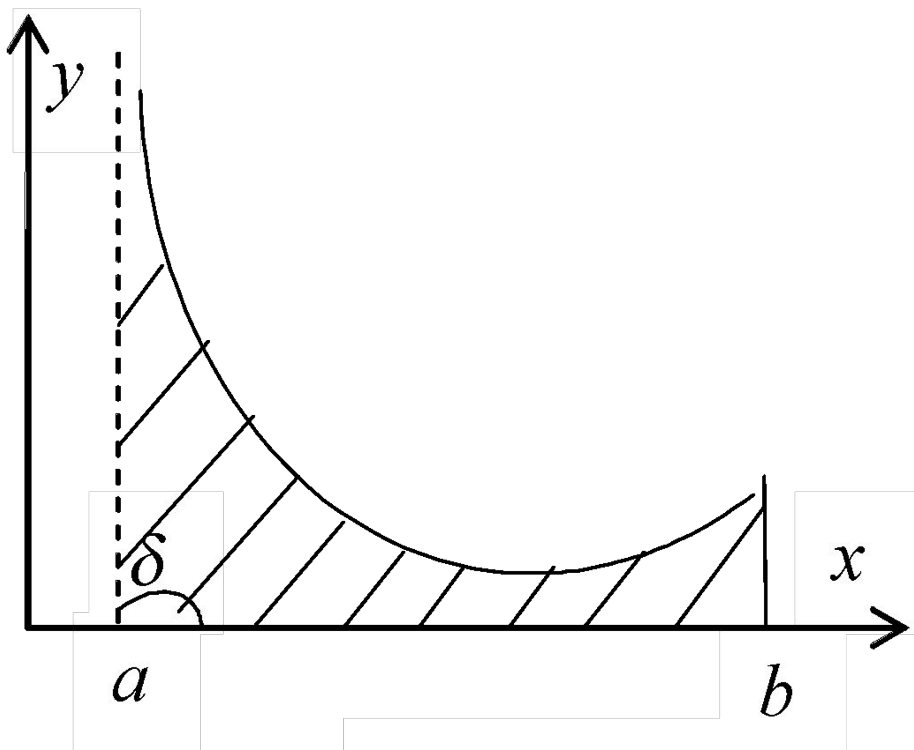

Рис. 7.2.2

3) Если $f(x)$ терпит разрыв в некоторой точке c внутри $[a,b]$, т.е. $a<c<b$ (рис. 7.2.3), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

Интеграл сходится.

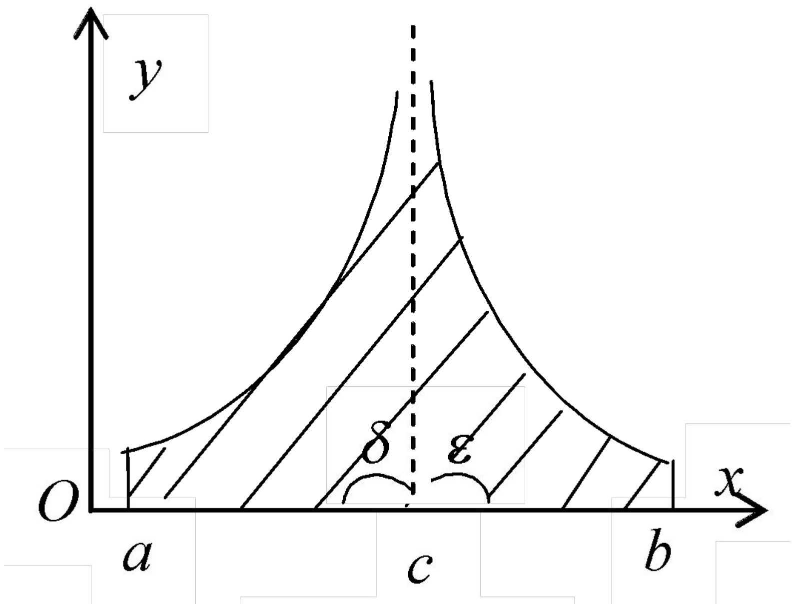

Рис. 7.2.3

Примеры

П р и м е р 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon} =$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\left[\sqrt{1-1+\varepsilon} - 1\right] = 2.$$

П р и м е р 2.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta\to 0} \int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\delta} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{\delta} - 1\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \infty.$$

Интеграл расходится.

З а м е ч а н и е

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится данный интеграл или расходится, и оценить его значение. Для этого могут быть полезными следующие теоремы, которые примем без доказательства.

Т е о р е м а 1

Если для всех x $(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и если $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ также сходится, при этом

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty \varphi(x)dx. \tag{7.2.4}$$

Т е о р е м а 2

Если для всех $x \quad (x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, причем $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ также расходится, при этом

$$\int_a^\infty f(x)dx \geq \int_a^\infty \varphi(x)dx. \tag{7.2.5}$$

З а м е ч а н и е

В теоремах 1 и 2 рассматривались несобственные интегралы от неотрицательных функций. Для случая $f(x)$, меняющей знак в бесконечном интервале, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Если интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx. \qquad (7.2.6)$$

В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

З а м е ч а н и е. Аналогичные теоремы имеются и для интегралов II-го рода.