

# КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

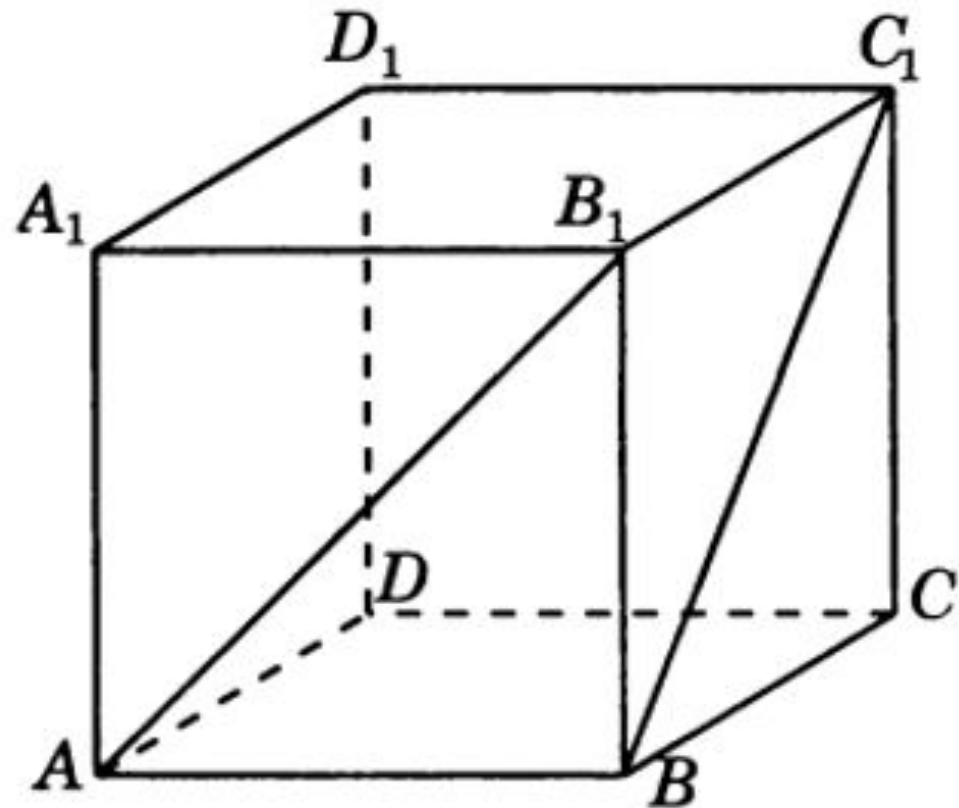
Подготовка к ЕГЭ

Презентацию подготовила: Грекова Т.А.,  
учитель математики

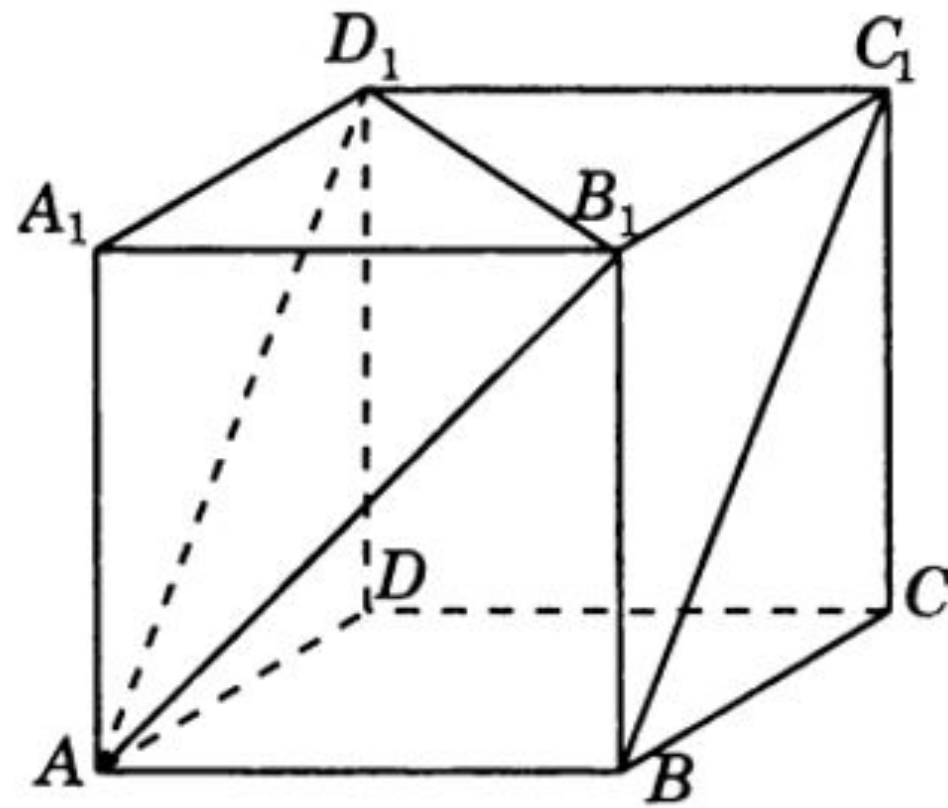
МКОУ «Лапшихинская СШ»

# ЗАДАЧА №1.

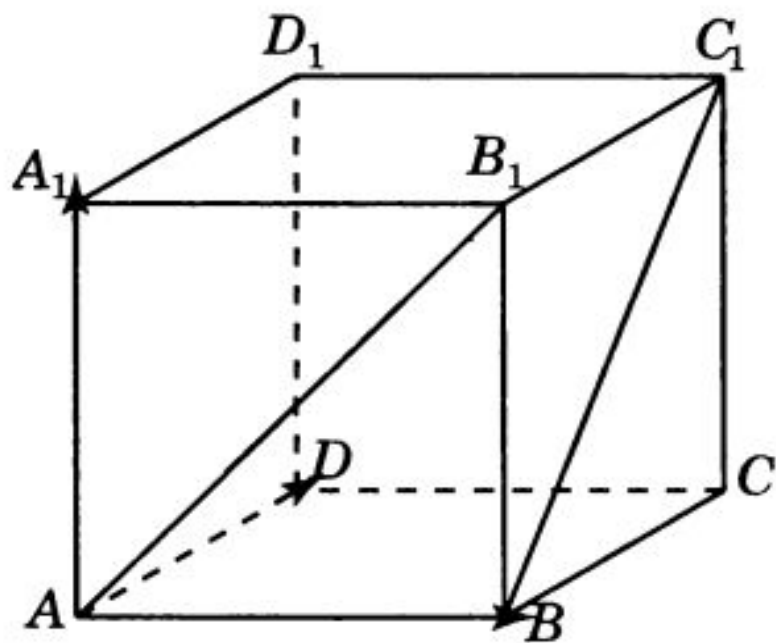
В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .



*Первое решение.* Прямая  $AD_1$  параллельна прямой  $BC_1$  и, следовательно, угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен углу  $B_1AD_1$ . Треугольник  $B_1AD_1$  равносторонний и, значит, угол  $B_1AD_1$  равен  $60^\circ$ .



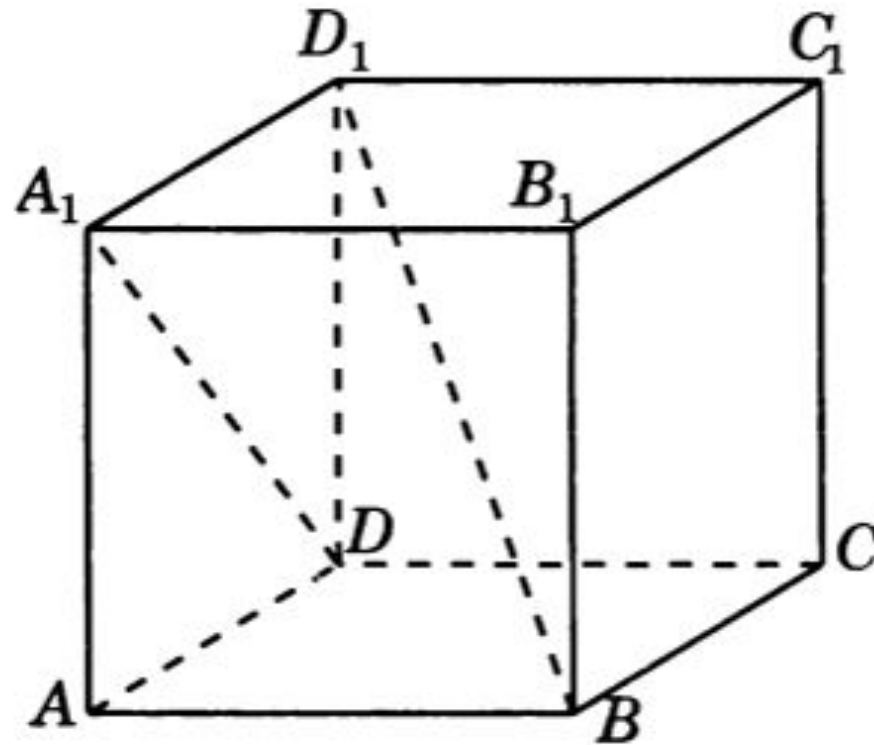
*Второе решение.* Введем систему координат, считая началом координат точку  $A$ , осями координат — прямые  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA_1$ . Вектор  $\vec{AB}_1$  имеет координаты  $(1, 0, 1)$ . Вектор  $\vec{BC}_1$  имеет координаты  $(0, 1, 1)$ . Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{AB}_1$  и  $\vec{BC}_1$ . Получим  $\cos \varphi = \frac{1}{2}$  и, значит, угол  $\varphi$  равен  $60^\circ$ . Следовательно, искомый угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен  $60^\circ$ .



Ответ.  $60^\circ$ .

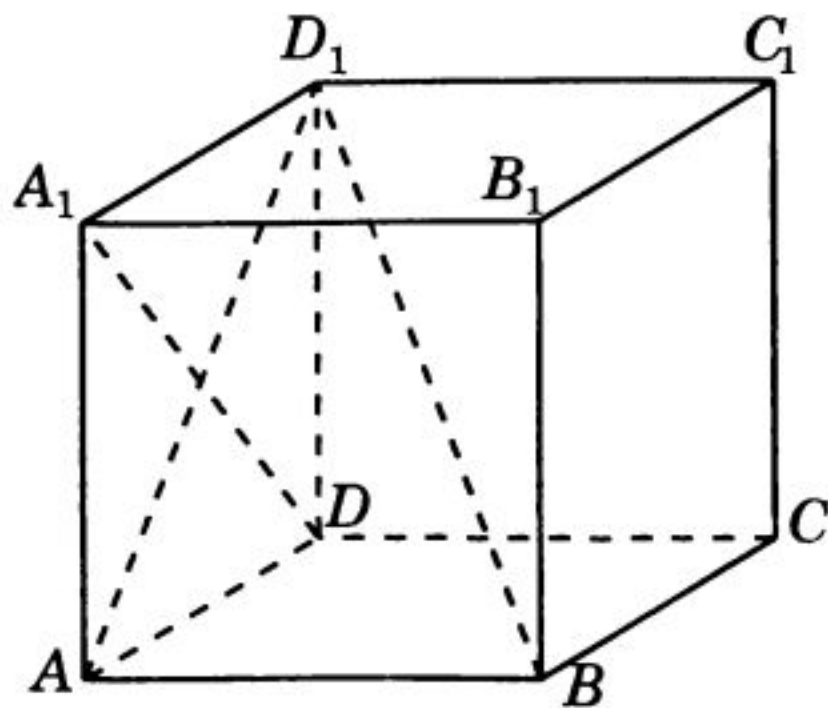
## ЗАДАЧА №2.

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $DA_1$  и  $BD_1$ .

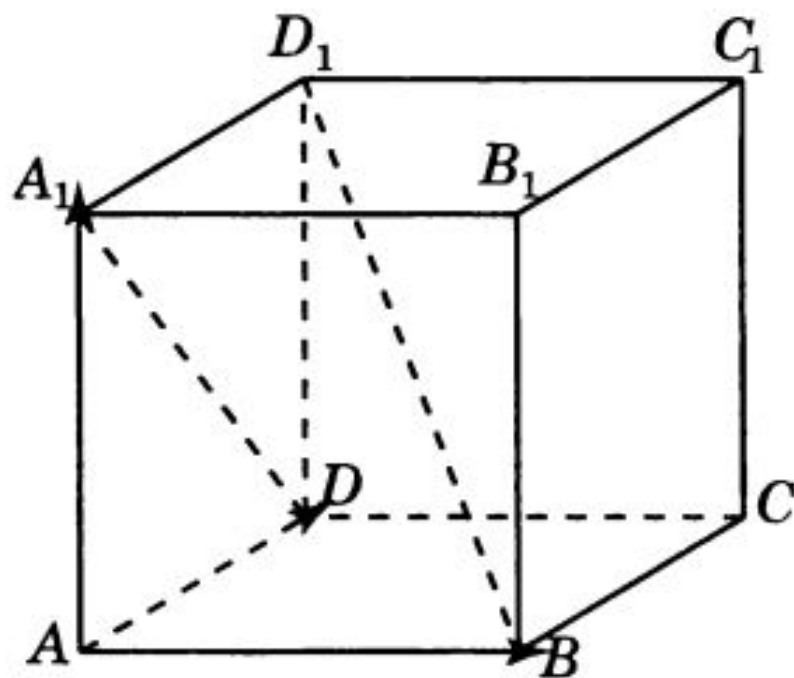


*Первое решение.* Рассмотрим ортогональную проекцию  $AD_1$  прямой  $BD_1$  на плоскость  $ADD_1$ . Прямые  $AD_1$  и  $DA_1$  перпендикулярны. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что прямые  $DA_1$  и  $BD_1$  также перпендикулярны, т. е. искомый угол между прямыми  $DA_1$

и  $BD_1$  равен  $90^\circ$ .



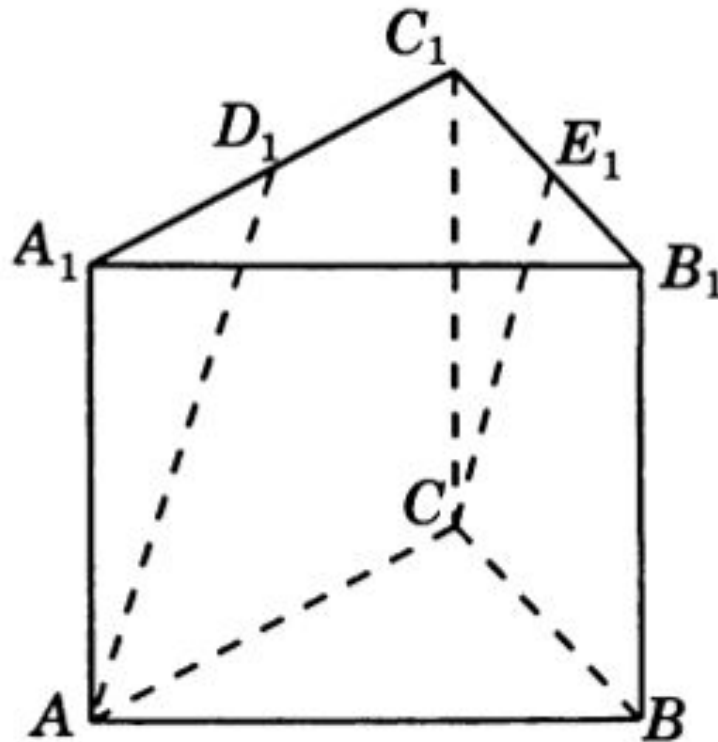
*Второе решение.* Введем систему координат, считая началом координат точку  $A$ , осями координат — прямые  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA_1$ . Вектор  $\vec{DA_1}$  имеет координаты  $(0, -1, 1)$ . Вектор  $\vec{BD_1}$  имеет координаты  $(-1, 1, 1)$ . Скалярное произведение этих векторов равно нулю и, значит, искомый угол между прямыми  $DA_1$  и  $BD_1$  равен  $90^\circ$ .



Ответ.  $90^\circ$ .

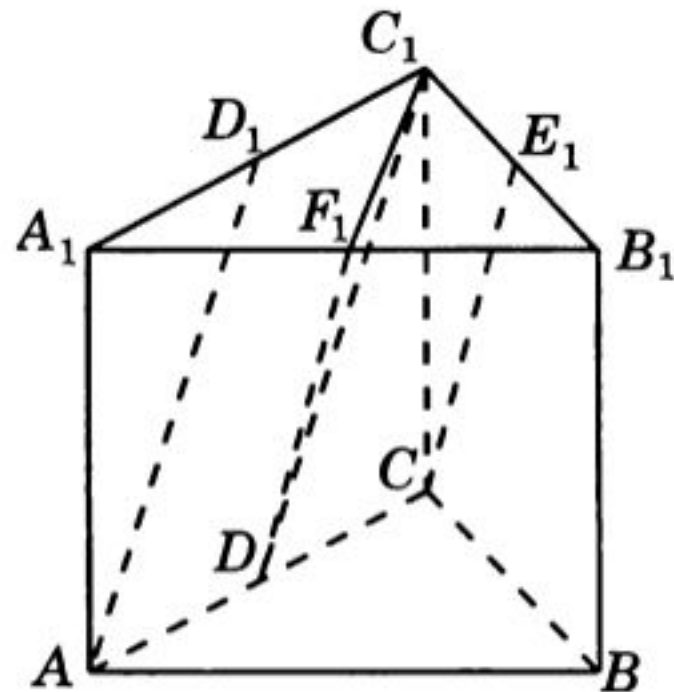
## ЗАДАЧА №3.

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$ , где  $D_1$  и  $E_1$  — соответственно середины ребер  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$ .



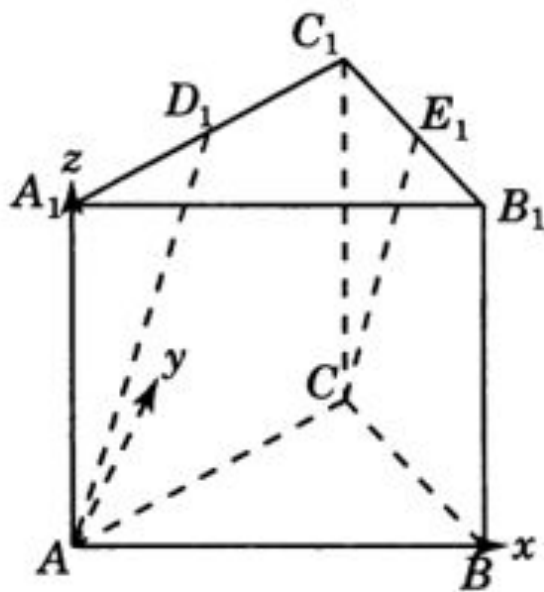


Первое решение. Обозначим  $D$  и  $F_1$  соответственно середины ребер  $AC$  и  $A_1B_1$ .



Прямые  $DC_1$  и  $DF_1$  будут соответственно параллельны прямым  $AD_1$  и  $CE_1$ . Следовательно, угол между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$  будет равен углу  $C_1DF_1$ . Треугольник  $C_1DF_1$  равнобедренный,  $CD_1 = CF_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Используя теорему косинусов, получаем  $\cos \angle C_1DF_1 = 0,7$ .

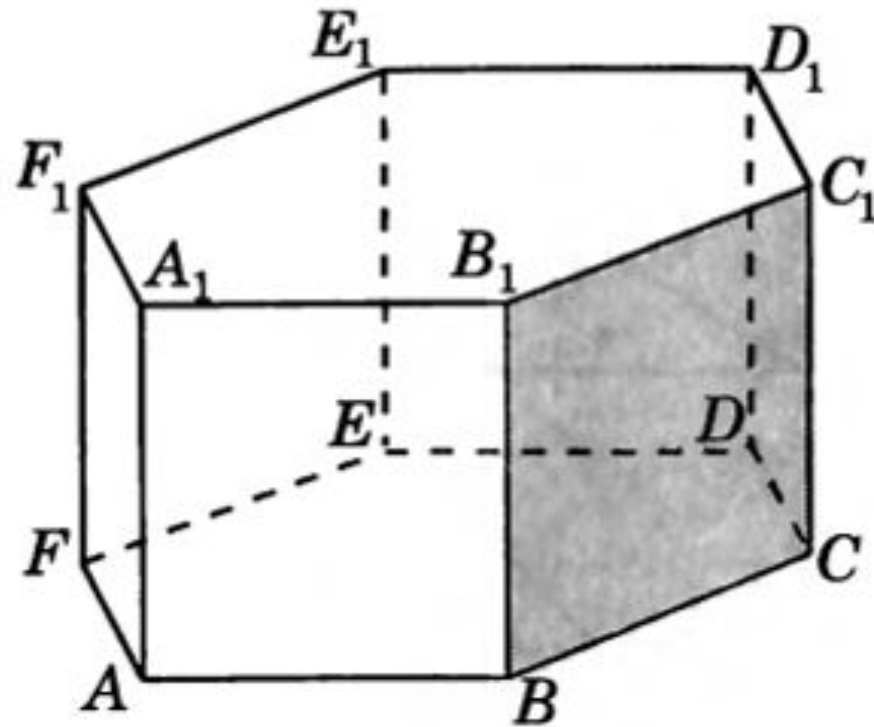
Второе решение. Введем систему координат, считая началом координат точку  $A$ , как показано на рисунке. Точка  $C$  имеет координаты  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ , точка  $D_1$  имеет координаты  $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$ , точка  $E_1$  имеет координаты  $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$ . Вектор  $\overrightarrow{AD_1}$  имеет координаты  $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$ . Вектор  $\overrightarrow{CE_1}$  имеет координаты  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$ . Косинус угла между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$  равен косинусу угла между векторами  $\overrightarrow{AD_1}$  и  $\overrightarrow{CE_1}$ . Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла  $\varphi$  между векторами. Получим  $\cos \varphi = 0,7$ .



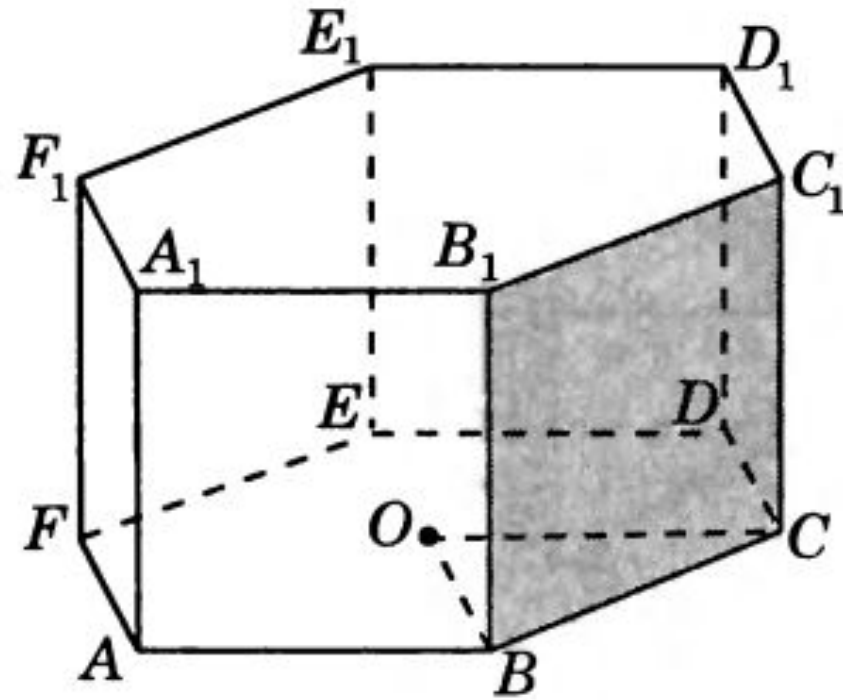
Ответ. 0,7.

# ЗАДАЧА №4.

В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $AF$  и плоскостью  $BCC_1$ .



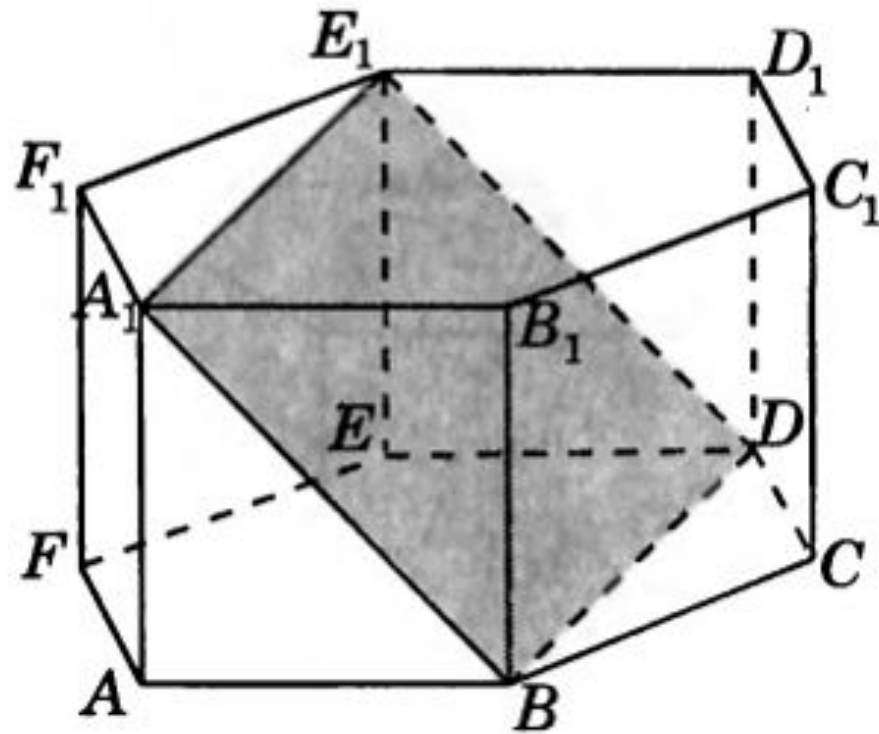
*Решение.* Пусть  $O$  — центр нижнего основания призмы. Прямая  $BO$  параллельна  $AF$ . Так как плоскости  $ABC$  и  $BCC_1$  перпендикулярны, то искомым углом будет угол  $OBC$ . Так как треугольник  $OBC$  равносторонний, то этот угол будет равен  $60^\circ$ .



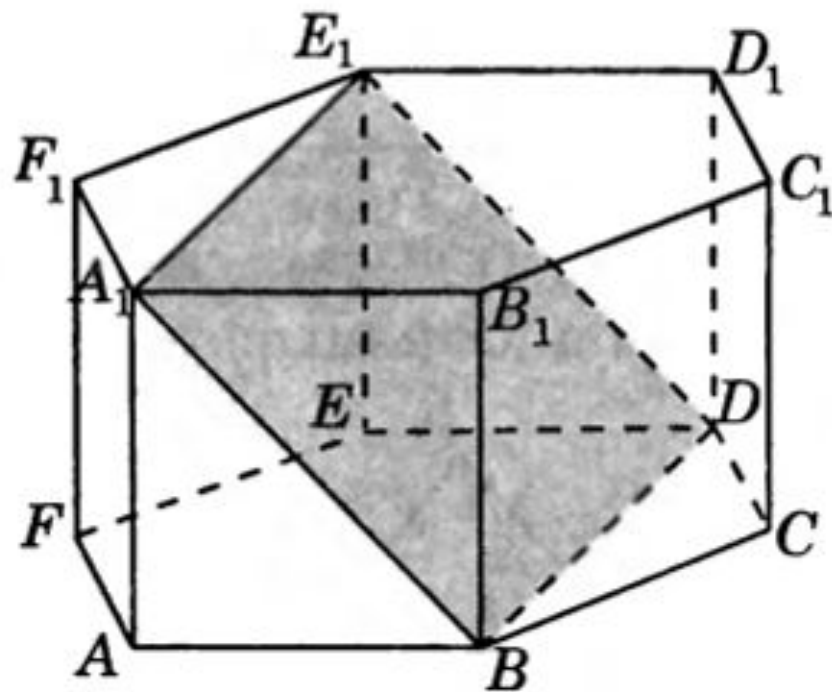
Ответ.  $60^\circ$ .

# ЗАДАЧА №5.

В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $CC_1$  и плоскостью  $BDE_1$ .



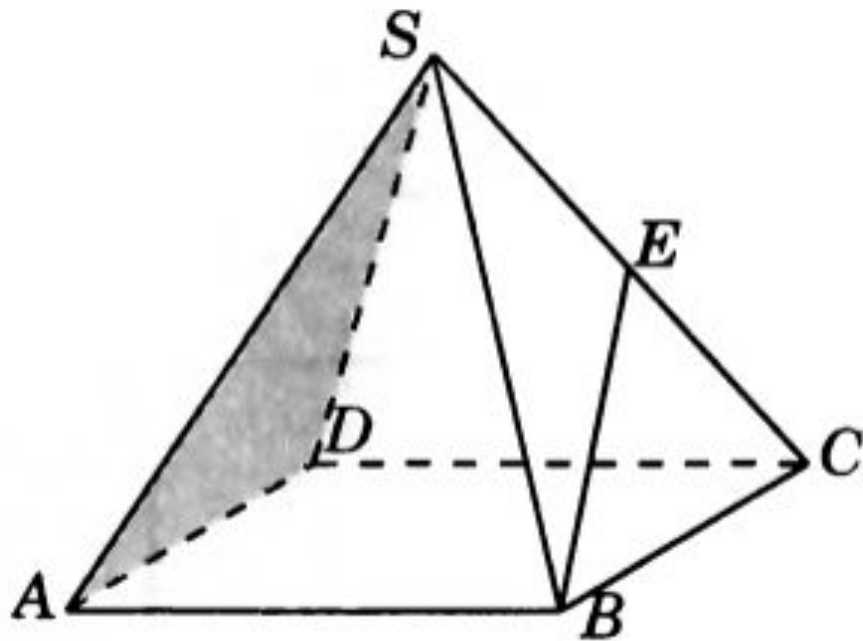
*Решение.* Так как прямые  $BB_1$  и  $CC_1$  параллельны, то искомый угол будет равен углу между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $BDE_1$ . Прямая  $BD$ , через которую проходит плоскость  $BDE_1$ , перпендикулярна плоскости  $ABB_1$  и, значит, плоскость  $BDE_1$  перпендикулярна плоскости  $ABB_1$ . Следовательно, искомый угол будет равен углу  $A_1BB_1$ , т. е. равен  $45^\circ$ .



Ответ.  $45^\circ$ .

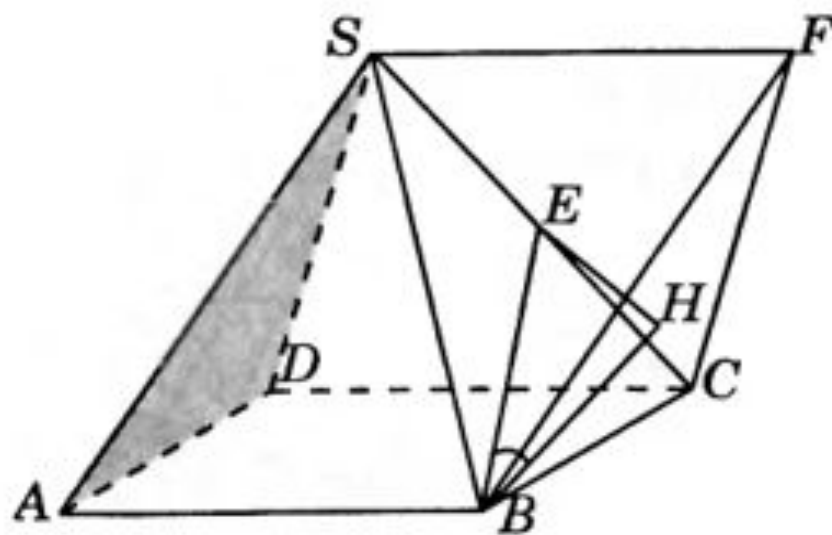
## ЗАДАЧА №6.

В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $BE$  и плоскостью  $SAD$ , где  $E$  — середина ребра  $SC$ .



*Решение.* Через вершину  $S$  проведем прямую, параллельную прямой  $AB$ , и отложим на ней отрезок  $SF$ , равный отрезку  $AB$ . В тетраэдре  $SBCF$  все ребра равны 1 и плоскость  $BCF$  параллельна плоскости  $SAD$ . Перпендикуляр  $EH$ , опущенный из точки  $E$  на плоскость  $BCF$ ,

равен половине высоты тетраэдра, т. е. равен  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . Угол между прямой  $BE$  и плоскостью  $SAD$  равен углу  $EBH$ , синус которого равен  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

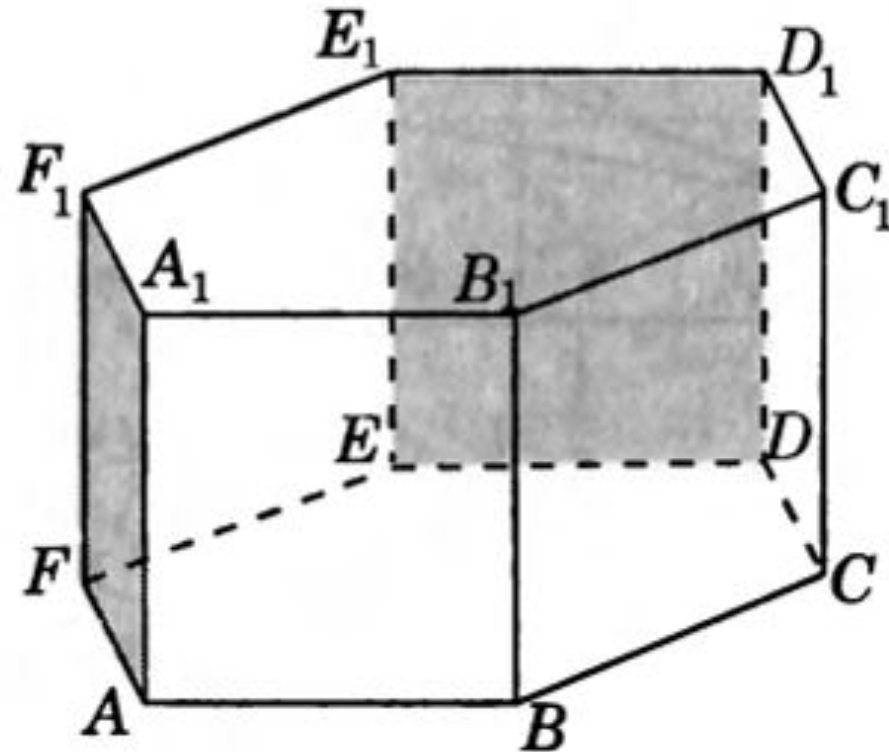


Ответ.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

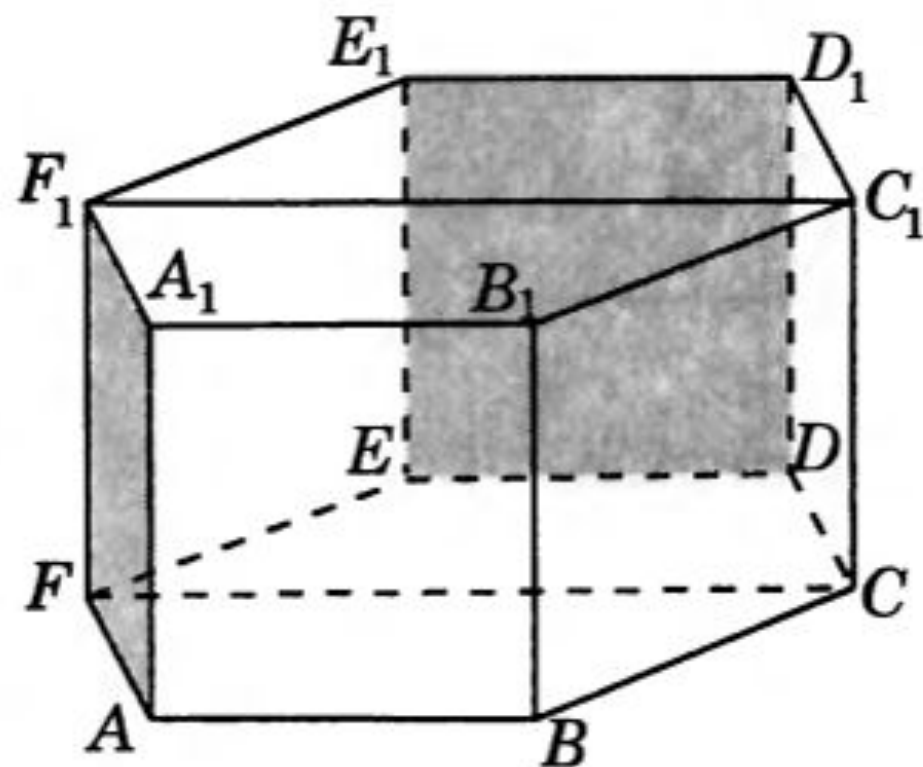


# ЗАДАЧА №7.

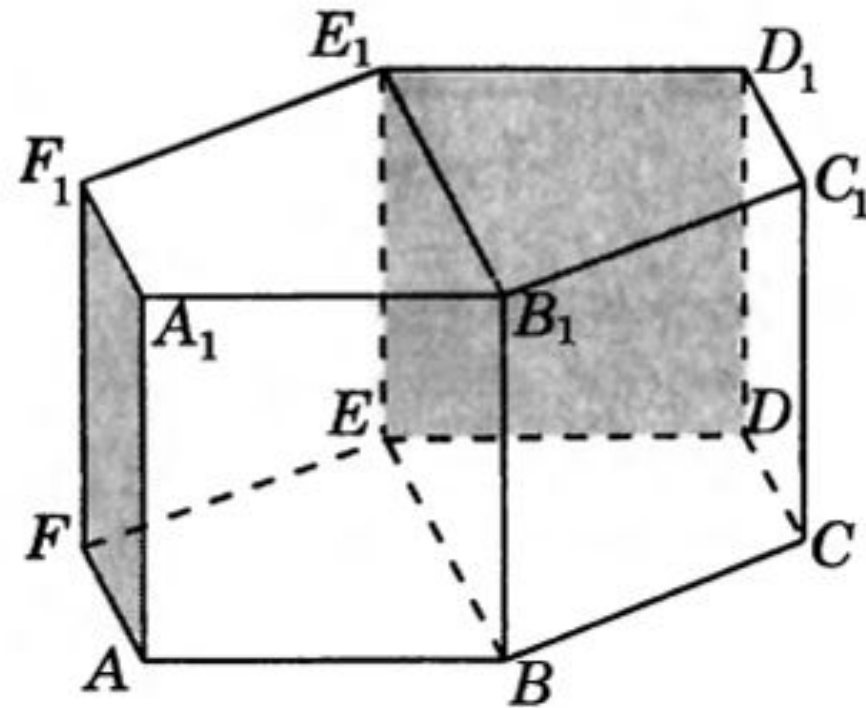
В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями  $AFF_1$  и  $DEE_1$ .



*Первое решение.* Так как плоскость  $FCC_1$  параллельна плоскости  $DEE_1$ , то искомый угол равен углу между плоскостями  $AFF_1$  и  $FCC_1$ . Так как плоскости  $AFF_1$  и  $FCC_1$  перпендикулярны плоскости  $ABC$ , то соответствующим линейным углом будет угол  $AFC$ , который равен  $60^\circ$ .



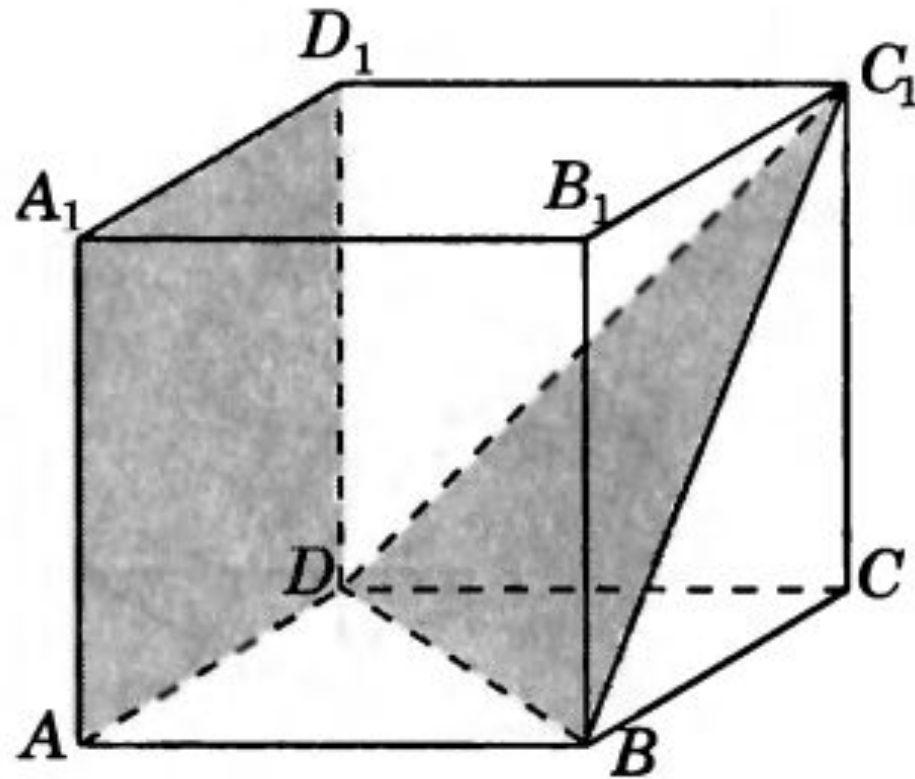
*Второе решение.* Так как плоскость  $AFF_1$  параллельна плоскости  $BEE_1$ , то искомый угол равен углу между плоскостями  $BEE_1$  и  $DEE_1$ . Так как плоскости  $BEE_1$  и  $DEE_1$  перпендикулярны плоскости  $ABC$ , то соответствующим линейным углом будет угол  $BED$ , который равен  $60^\circ$ .



Ответ.  $60^\circ$ .

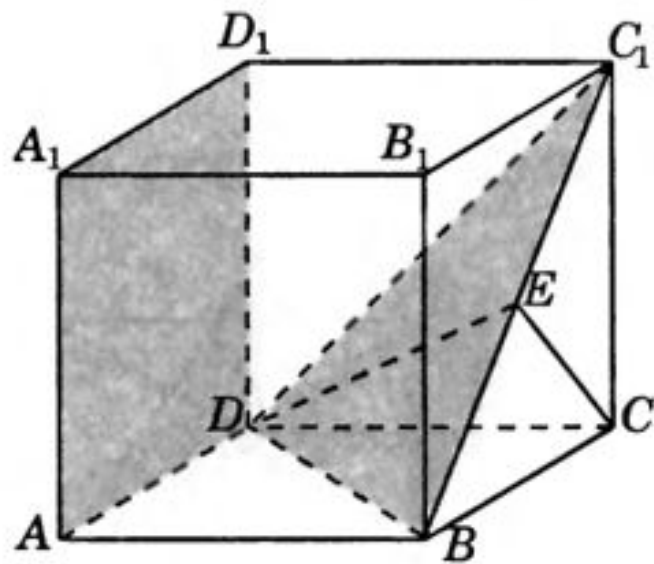
# ЗАДАЧА №8.

В единичном кубе  $A...D_1$  найдите тангенс угла между плоскостями  $ADD_1$  и  $BDC_1$ .



Решение. Так как плоскость  $ADD_1$  параллельна плоскости  $BCC_1$ , то искомый угол равен углу между плоскостями  $BCC_1$  и  $BDC_1$ . Пусть  $E$  — середина отрезка  $BC_1$ . Тогда прямые  $CE$  и  $DE$  будут перпендикулярны прямой  $BC_1$  и, следовательно, угол  $CED$  будет линейным углом между плоскостями  $BCC_1$  и  $BDC_1$ . Треугольник  $CED$  прямоугольный, катет  $CD$  равен 1, катет  $CE$  равен  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно,

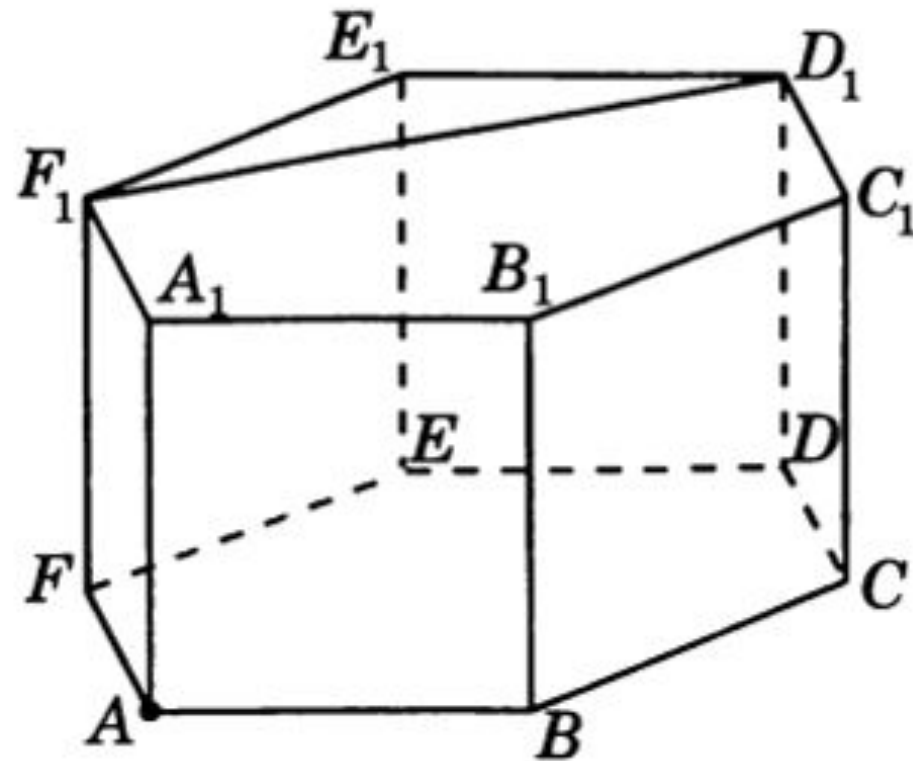
$$\operatorname{tg} \angle CED = \sqrt{2}.$$



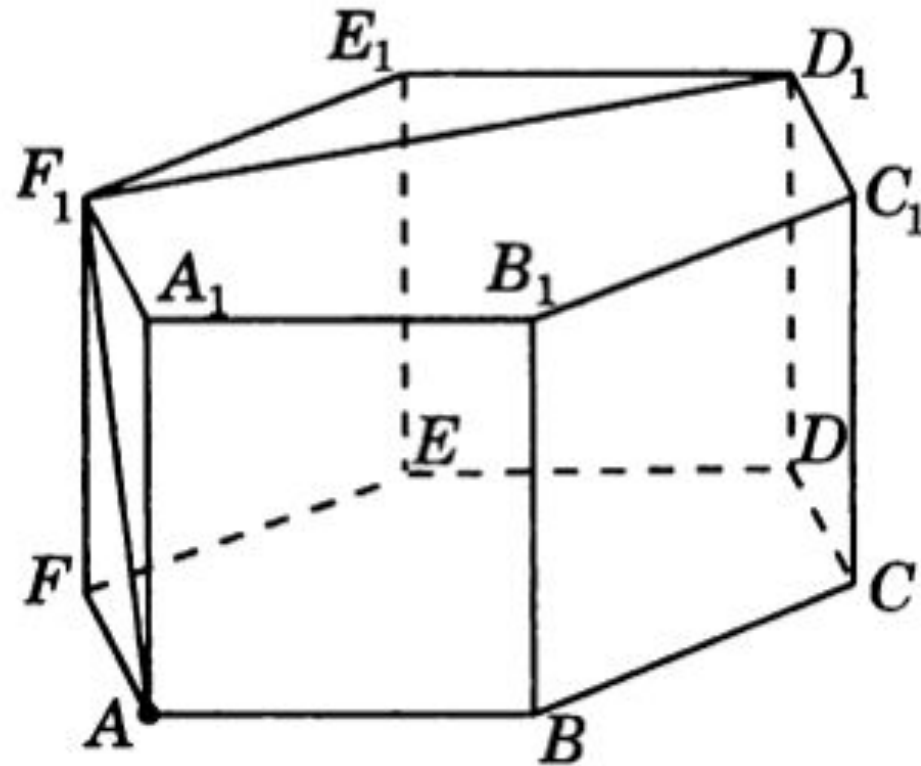
Ответ.  $\sqrt{2}$ .

# ЗАДАЧА №9.

В правильной шестиугольной призме  $A\dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $D_1F_1$ .



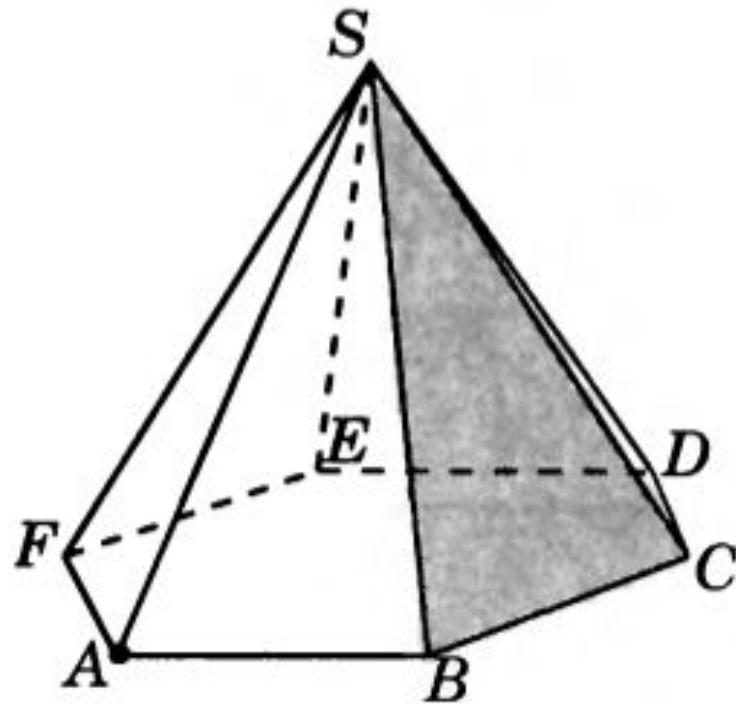
Решение. Так как прямая  $D_1F_1$  перпендикулярна плоскости  $AFF_1$ , то отрезок  $AF_1$  будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $A$  на прямую  $D_1F_1$ . Его длина равна  $\sqrt{2}$ .



Ответ.  $\sqrt{2}$ .

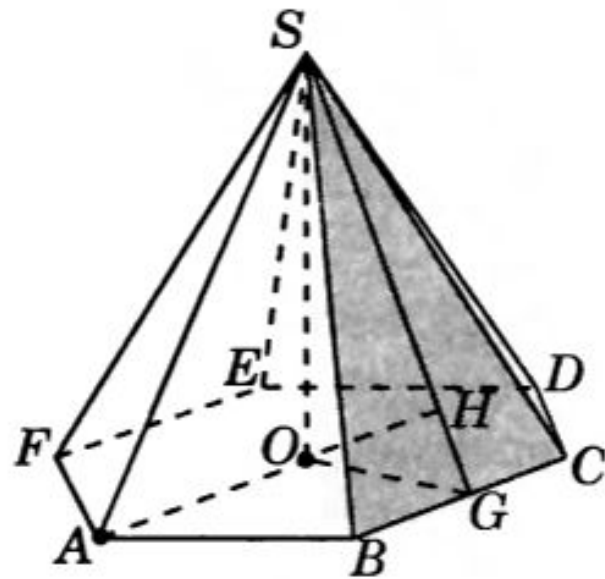
## ЗАДАЧА №10.

В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SBC$ .





Первое решение. Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Прямая  $AO$  параллельна прямой  $BC$  и, значит, параллельна плоскости  $SBC$ . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки  $O$  до плоскости  $SBC$ . Пусть  $G$  — середина отрезка  $BC$ . Тогда прямая  $OG$  перпендикулярна  $BC$  и искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $O$  на плоскость  $SBC$ , является высота  $OH$  прямоугольного треугольника  $SOG$ . В этом треугольнике  $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$ ,  $SO = \sqrt{3}$ . Для площади  $S$  этого треугольника имеют место равенства  $2S = OG \cdot SO = SG \cdot OH$ . Откуда находим  $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$ .



*Второе решение.* Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Прямая  $AO$  параллельна прямой  $BC$  и, значит, параллельна плоскости  $SBC$ . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки  $O$  до плоскости  $SBC$ . Пусть  $G$  — середина отрезка  $BC$ . Тогда прямая  $OG$  перпендикулярна  $BC$  и искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $O$  на плоскость  $SBC$ , является высота  $OH$  прямоугольного треугольника  $SOG$ . В этом треугольнике

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad SG = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad SO = \sqrt{3}.$$

Треугольники  $SOG$  и  $OHG$  подобны по трем углам. Следовательно,  $SO : SG = OH : OG$ . Откуда находим  $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$ .

Ответ.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

Использованы материалы вебинара «Повторение и обобщение. Задачи по геометрии в ЕГЭ по математике», проведённого центром математического образования КК КИПК, ноябрь 2016 г.

