Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 11

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Основные понятия.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y=f(x)$ и её производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Основной задачей теории ДУ является нахождение неизвестных функций, входящих в дифференциальные уравнения.

Например, скорость тела v, движущегося под действием силы F, может быть найдена из второго закона Ньютона, т.е. из ДУ

$$m\frac{dv}{dt} = F.$$

Порядок наивысшей производной, входящей в уравнение, называется порядком ДУ.

Общий вид ДУ n-го порядка:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Примеры

$y' + \frac{2}{x} y = \sin x$ - ДУ 1-го порядка,

$y''' + yy' = 0$ - ДУ 3-го порядка.

Решением ДУ называется любая функция $y = f(x)$, которая при подстановке в ДУ, обращает его в тождество.

График этой функции называется **интегральной кривой.**

Общим решением ДУ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ называется решение $y = f\left(x, c_1, c_2, ..., c_n\right)$, которое содержит столько независимых произвольных постоянных $c_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$ каков порядок ДУ.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi\left(x, y, c_1, c_2, ..., c_n\right) = 0,$$

называется **общим интегралом ДУ.**

Всякое решение, которое получается из общего при конкретных значениях произвольных постоянных, называется **частным решением** ДУ.

Пример:

Найти решение ДУ $y'' + y = 0.$

Решение:

Функция $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

удовлетворяет уравнению и является общим решением.

Если $c_1 = 2,\ \ c_2 = 5,$

$y = 2\sin x + 5\cos x$ - частное решение.

2. ДУ первого порядка.

ДУ первого порядка называется уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = \varphi(x, y).$$

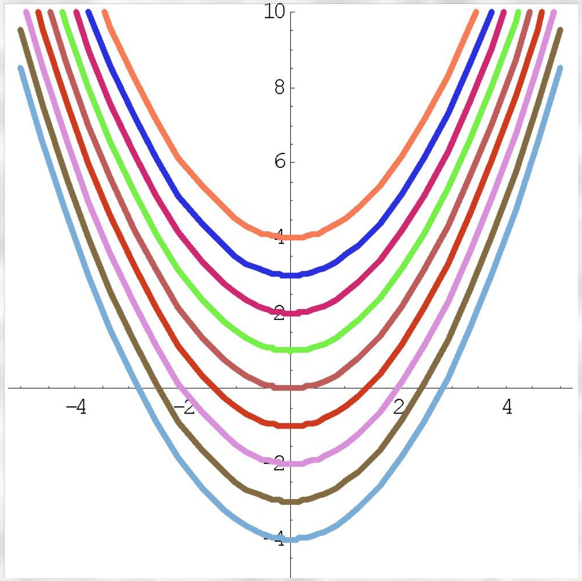
Общее решение: $y = f(x, c)$.

На графике это будет однопараметрическое семейство кривых .

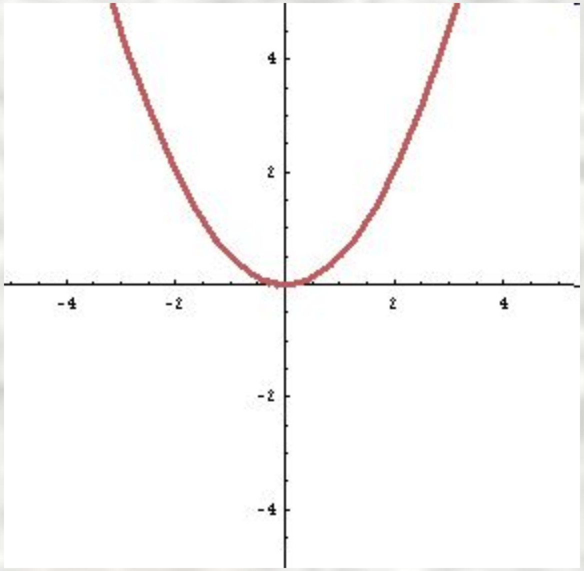
Пример.

$$y' = x$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$ - общее



$$y = \frac{x^2}{2}$$ - частное



Задача Коши

Пусть

1) $y' = \varphi(x, y)$ – ДУ 1-го порядка,

2) $y(x_0) = y_0$ – начальное условие.

Найти

решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию.

Геометрический смысл:

Найти интегральную кривую (частное решение), проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Теорема Коши (теорема существования и единственности решения ДУ)

Т

Если

1) $y' = \varphi(x, y)$

2) $\varphi(x, y)$, $\varphi'_y(x, y)$ непрерывны в области,содержащей точку (x_0, y_0),

то

существует единственное решение $y = f(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы Коши.

- Через заданную точку (x_0, y_0) проходит только ***одна*** интегральная кривая уравнения $y' = \varphi(x, y)$.

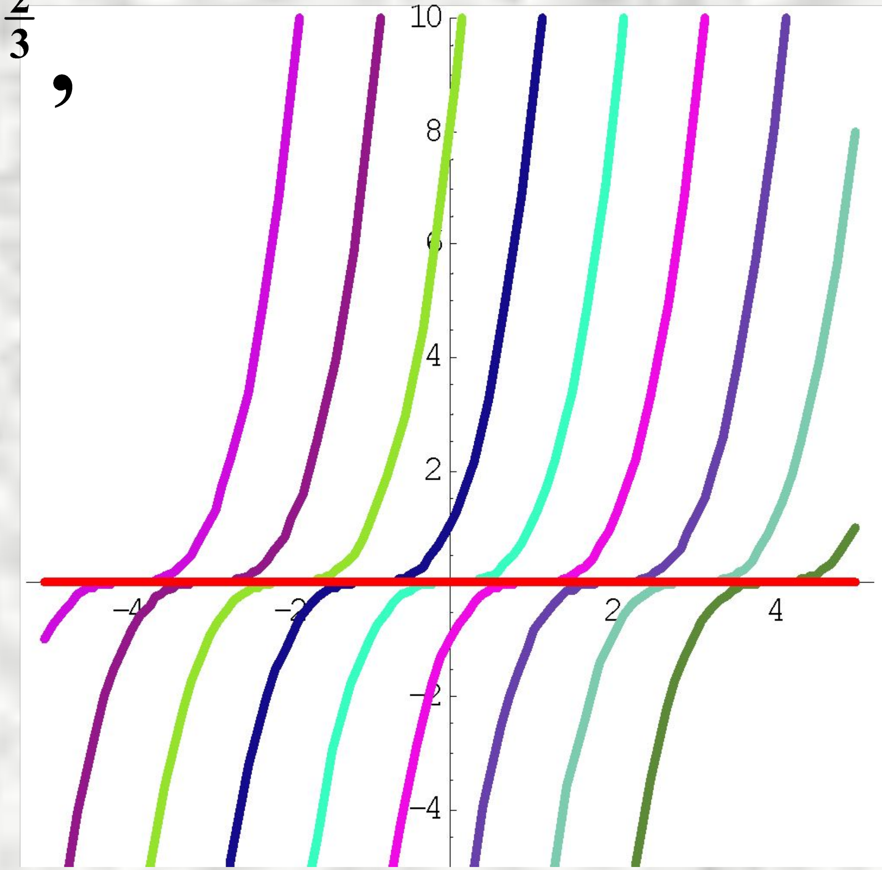
- ***Особая точка*** дифференциального уравнения – точка (x,y), в которой нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример.

Решить уравнение $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$,

удовлетворяющее условию

$$y(0) = 0.$$



Общее решение:

$$y = (x + C)^3.$$

Найдём C.

$$0 = (0 + C)^3 \Rightarrow C = 0.$$

Частное решение: $y = x^3$.

Типы ДУ первого порядка.

I. ДУ с разделяющимися переменными.

ДУ вида $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$

называется ДУ с **разделяющимися переменными**.

Разделив обе части уравнения на $P_2(x)Q_1(y)$,

получим уравнение с **разделёнными переменными:**

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

Пример 1.

Найти общее решение ДУ $y' = x\cdot(y^2+1).$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = x\cdot(y^2+1), \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2+1} = \int xdx$$

$arctgy = \frac{x^2}{2} + C -$ *общий интеграл,*

$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ *-общее решение.*

Пример 2.

Найти общее решение ДУ $y' = \dfrac{y}{x}.$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C,$$

или, представив постоянную интегрирования в логарифмической форме $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|,$

$$\ln|y| = \ln|cx|, \qquad y = cx$$

2. Однородные ДУ.

ДУ вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ называются **однородным ДУ первого порядка.**

С помощью подстановки $\frac{y}{x} = u$ такие уравнения приводятя к уравнениям с разделяющимися переменными.

Пример 1.

$$y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right), \quad y(1) = 1, \quad y - ?$$

Решение.

Дифференциальное уравнение– однородное.

$$\frac{y}{x} = u, \qquad y = ux$$

$$y' = u' \cdot x + u \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x + u = u(\ln u + 1)$$

$$u' \cdot x = u \ln u, \qquad \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln\left|\ln u\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|$$

$$\ln u = Cx, \qquad u = e^{Cx},$$

$\boxed{y = xe^{Cx}}$ - общее решение.

$$C: \begin{cases} y(1) = 1\cdot e^{C\cdot 1}, \\ y(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{C = 0}$$

$\boxed{y = x}$ - частное решение.

Пример 2.

$$(x+y)dx + xdy = 0, \quad y - ?$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{y}{x}$$

Дифференциальное уравнение– однородное.

$$\frac{y}{x} = u, \qquad y = ux, \qquad y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = -1 - u, \qquad u' \cdot x = -1 - 2u$$

$$u'\cdot x=-1-2u,\qquad \frac{du}{1+2u}=-\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{1+2u}=-\int\frac{dx}{x},\qquad \frac{1}{2}\ln(1+2u)=-\ln x+\ln C,$$

$$1+2u=\frac{C}{x^2},\qquad \boxed{y=-\frac{x}{2}+\frac{C}{2x}}$$

Переопределим $\boxed{\frac{C}{2}\to C}$ ⇨ $\boxed{y=-\frac{x}{2}+\frac{C}{x}}$

Замечания.

1. ДУ вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right)$$

-однородное, т.к. оно равносильно уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a+b\dfrac{y}{x}}{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}\right)$$

2. ДУ вида $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+d}{a_1x+b_1y+d_1}\right)$$

в случае $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ приводится к однородному

с помощью замены: $$x = u+\alpha$$ $$y = v+\beta$$

Числа α, β находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + d = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + d_1 = 0 \end{cases}$$

Уравнение становится однородным относительно функции $v(u)$. (Это новая функция,а u – новый аргумент.)

Если $$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

замена $$u = a_1 x + b_1 y$$

приводит исходное ДУ к уравнению с разделяющимися переменными.

3. Линейные ДУ первого порядка.

ДУ вида $y' + P(x)y = Q(x)$, содержащее y и y' в первой степени, называется **линейным ДУ первого порядка.**

Решение ищем в виде $y = u(x) \cdot v(x)$.

Функцию v будем считать произвольной, u найдём из уравнения.

Если $y = uv$, то $y' = uv' + vu'$, $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

Уравнение принимает вид: $u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx} + Puv = Q,$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q \qquad (*)$$

v -произвольна, выберем её так, чтобы

$\dfrac{dv}{dx} + Pv = 0,$ тогда $\dfrac{dv}{v} = -Pdx,$

$$\ln|v| = -\int Pdx + \ln c_1, \qquad v = c_1 e^{-\int Pdx}.$$

Положим $c_1 = 1, \quad \Rightarrow \quad v = e^{-\int P dx}.$

Подставим найденное v в ДУ $(*)$

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + c$$

В итоге общее решение имеет вид:

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + c\right].$$

Пример. $$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=\left(x+1\right)^3,\quad y-?$$

Решение.

$$y=uv,\qquad \frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-\frac{2}{x+1}uv=\left(x+1\right)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}v\right)+v\frac{du}{dx}=\left(x+1\right)^3\qquad(*),$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}v=0,\qquad \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|, \qquad v = (x+1)^2$$

Найдём u , подставив $v = (x+1)^2$ в уравнение $(*)$

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3, \qquad \frac{du}{dx} = (x+1)$$

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + c.$$

Общее решение: $$y = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2.$$

4. Уравнение Бернулли.

ДУ вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ при $n \neq 0;1$

называется уравнением **Бернулли.**

При $n = 1$ или $n = 0$ - это линейное уравнение,или уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение Бернулли также решается с помощью подстановки ***y=u(x)v(x)***

Пример:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3, \ \ y - ?$$

Решение.

Разделим ДУ на y^3

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3.$$

Замена $\boxed{z = y^{-n+1} = y^{-2}} \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$$ - линейное.

Замена $\boxed{z = uv} \Rightarrow$ $$\frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv = -2x^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = -2x^3 \quad (*)$$

$v:$ $$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \qquad \frac{dv}{v} = 2xdx,$$

$$\ln|v| = x^2, \quad v = e^{x^2}.$$

Найдём u, подставив $v = e^{x^2}$ в уравнение $(*)$

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = -2x^3, \qquad du = -2e^{-x^2}x^3dx,$$

$u = -2\int e^{-x^2}x^3dx =$ (по частям) $= x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c,$

$$z = uv = x^2 + 1 + ce^{x^2}, \quad y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}.$$