ТЕОРЕМА О ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПЛОСКОСТИ.

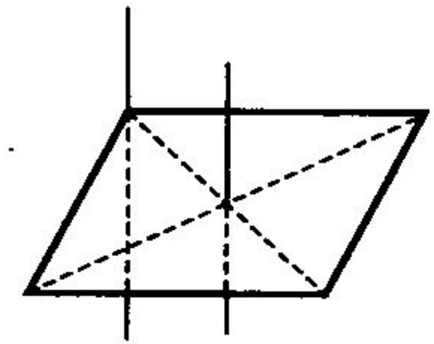


Рис. 1

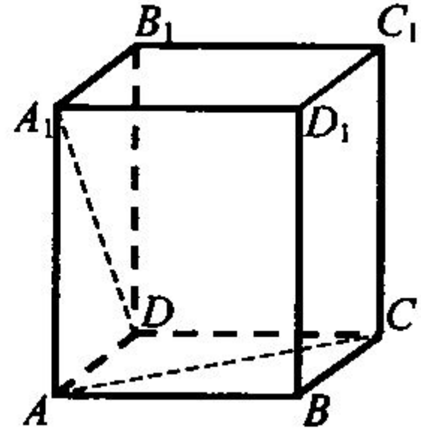
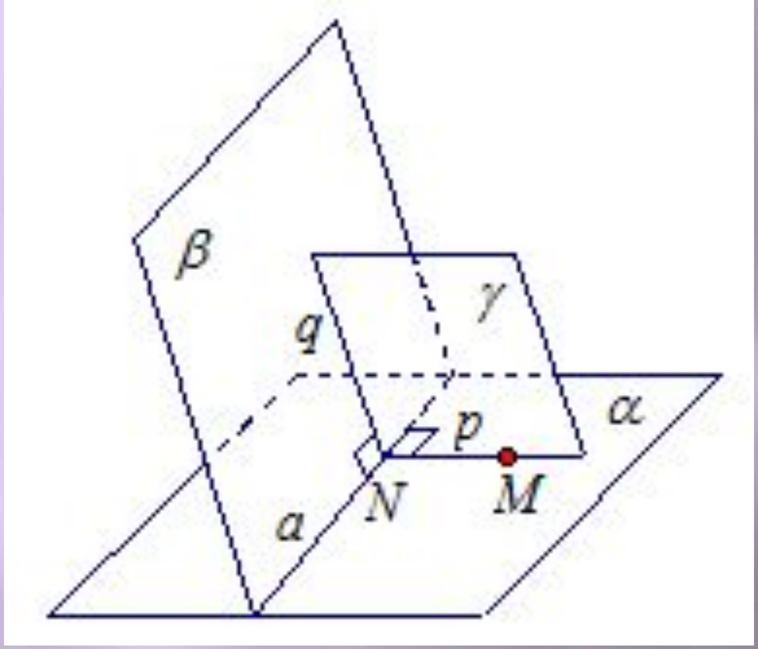


Рис. 2

6. Дано: $ABCD$ – куб (рис. 2).

Заполните пропуски о взаимном расположении прямых и плоскостей: $CC_1...(DCB)$; $AA_1...(DCB)$; $D_1C_1...(DCB)$; $B_1C_1...(DD_1C_1)$; $B_1C_1...DC_1$; $A_1D_1...DC_1$; $BB_1...AC$; $A_1B...BC$; $A_1B...DC_1$.

Задача 133

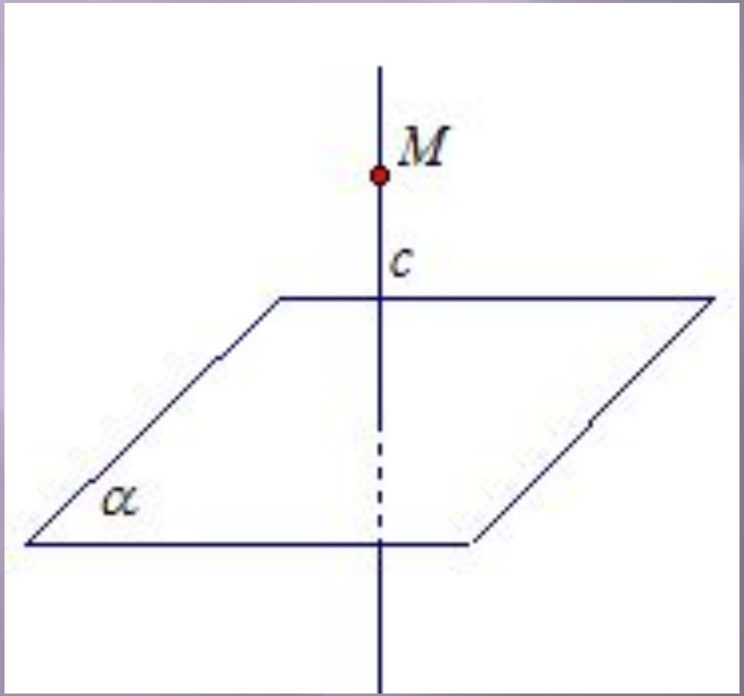


Доказательство

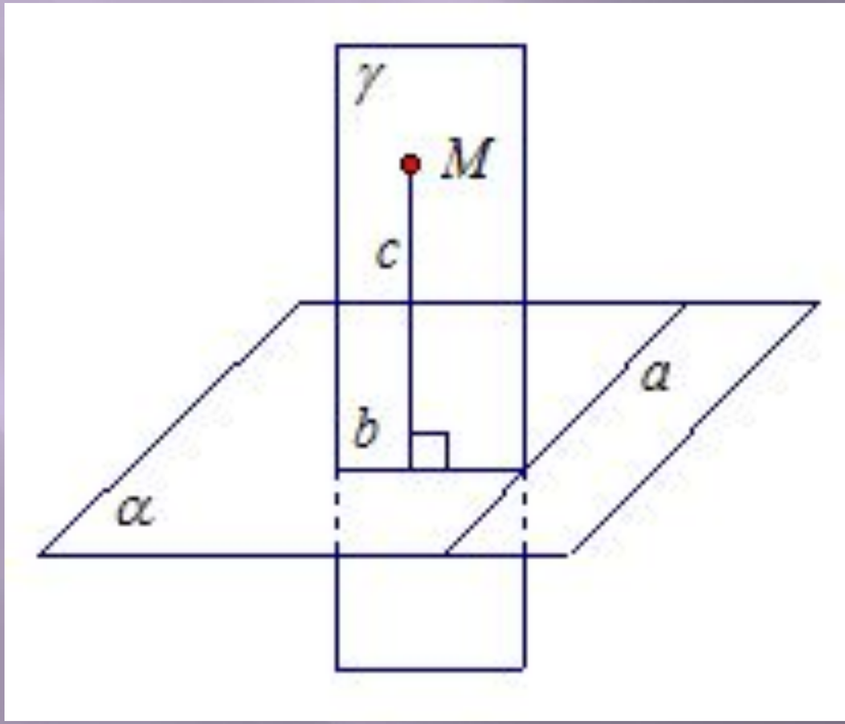
Пусть нам ***дана*** прямая *a* и точка *M*. ***Докажем,*** что существует плоскость γ, которая проходит через точку *M* и которая ⊥ прямой *a*.

Через прямую *a* проведем плоскости α и β так, что точка *M* ∈ плоскости α. Плоскости α и β пересекаются по прямой *a*. В плоскости α через точку *M* проведем перпендикуляр *MN* (или *p*) к прямой *a*, . В плоскости β из точки *N* восстановим перпендикуляр *q* к прямой *a*. Прямые *p* и *q* пересекаются, пусть через них проходит плоскость γ. Получаем, что прямая *a* перпендикулярна двум пересекающимся прямым *p* и *q* из плоскости γ. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая *a* перпендикулярна плоскости γ.

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



Доказательство.
Пусть дана плоскость α и точка *M* (см. рис. 2). Нужно доказать, что через точку *M* проходит единственная прямая *c*, перпендикулярная плоскости *α*. Проведем прямую *a* в плоскости α (см. рис. 3). Согласно доказанному выше утверждению, через точку *M* можно провести плоскость γ перпендикулярную прямой *a*. Пусть прямая *b*– линия пересечения плоскостей α и γ.



В плоскости γ через точку M проведем прямую c, перпендикулярную прямой b. Прямая c перпендикулярна b по построению, прямая c перпендикулярна a (так как прямая a перпендикулярна плоскости γ, а значит, и прямой c, лежащей в плоскости γ). Получаем, что прямая c перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости α. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая c перпендикулярна плоскости α. Докажем, что такая прямая c единственная.

Предположим, что существует прямая c_1, проходящая через точку M и перпендикулярная плоскости α. Получаем, что прямые c и c_1 перпендикулярны плоскости α. Значит, прямые c и c_1 параллельны. Но по построению прямые c и c_1 пересекаются в точке M. Получили противоречие. Значит, существует единственная прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная плоскости α, что и требовалось доказать.

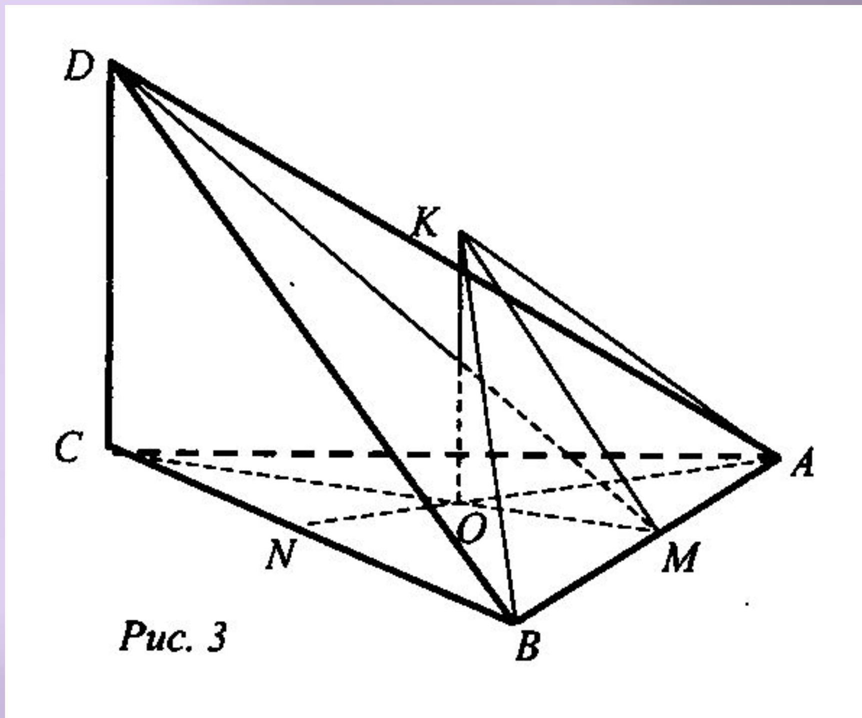


Рис. 3

Задача № 122 (рис. 3)

Найти: AK, DA, BD.

Решение:

1. $BD = AD$, так как $\Delta BCD = \Delta ACD$ (как прямоугольные, по двум катетам).
2. $AD = \sqrt{16^2 + (16\sqrt{3})^2} = \sqrt{16^2 \cdot 4} = 16 \cdot 2 = 32$ см.
3. $AK = BC$, так как $\Delta AOK = \Delta BOK$ (как прямоугольные, по двум катетам).
4. $AO = OB = OC = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = 16$ см.
5. $AK = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ см.

(*Ответ*: $AK = BK = 20$ см; $AD = BD = 32$ см.)

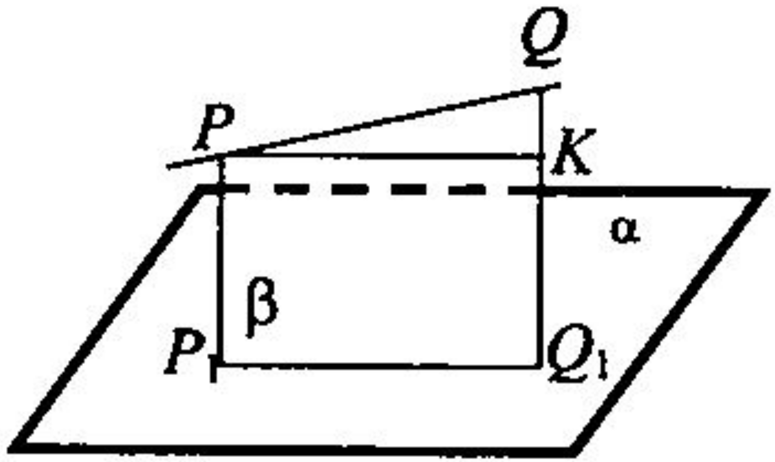


Рис. 4

Задача № 125 (рис. 4).
Найти: P_1Q_1.

Решение:

1. $(PP_1 \perp \alpha,\ QQ_1 \perp \alpha) \Rightarrow PP_1 \perp QQ_1$.
2. $(PP_1,\ QQ_1) = \beta,\ \alpha \cap \beta = P_1Q_1$.
3. $QK = 33{,}5 - 21{,}5 = 12$ см.
4. $P_1Q_1 = PK = 9$ см.

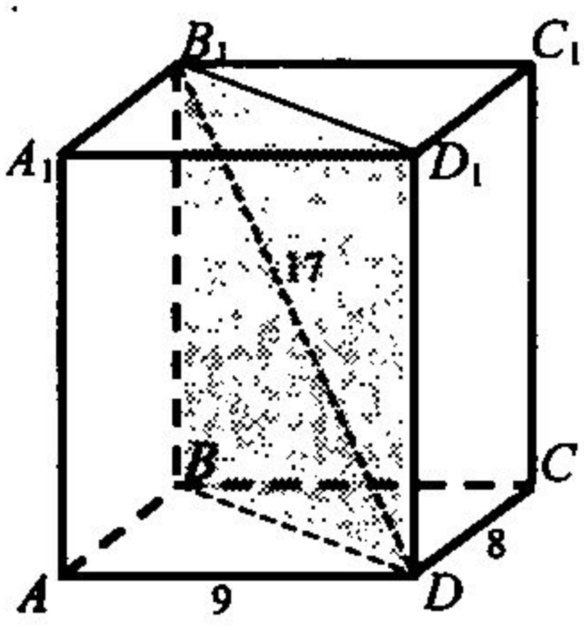


Рис. 5

1) *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AD = 9$ дм; $DC = 8$ дм; $DB_1 = 17$ дм (рис. 5).

Найти: $S_{BB_1D_1D}$.

Решение: ΔADB: $\angle BAD = 90°$; $AB = DC = 8$ дм. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$; $BD = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64+81} = \sqrt{145}$ (дм). ΔB_1BD: $\angle B_1BD = 90°$. По теореме Пифагора $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 + AD^2}$; $BB_1 = \sqrt{17^2 - (\sqrt{145})^2} = \sqrt{289-145} = \sqrt{144} = 12$ (дм). $S_{сеч} = B_1B \cdot BD$. $S_{сеч} = 12\sqrt{145}$ (дм^2).

(*Ответ*: $12\sqrt{145}$ дм^2.)

Смоделируйте в классной комнате описанную ниже ситуацию: Три луча *OM*, *OK*, *OT* попарно перпендикулярны. Как расположен каждый из лучей по отношению к плоскости, определяемой двумя другими лучами? (Угол; перпендикулярно).