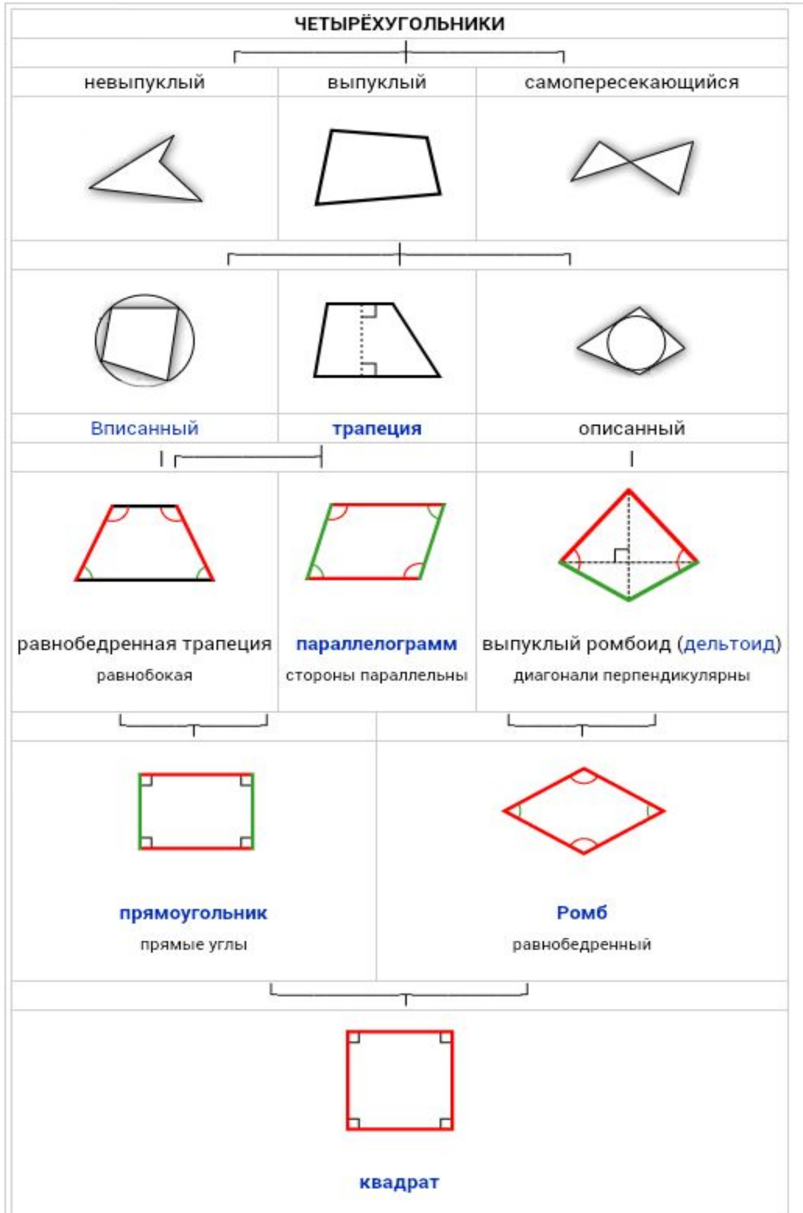
Четырёхугольник

Учитель математики Гладышева Е.М

Определение

- Четырёхугольник — это геометрическая фигура (многоугольник), состоящая из четырёх точек (вершин), никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четырёх отрезков (сторон), попарно соединяющих эти точки. Различают выпуклые и невыпуклые четырёхугольники


ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ
невыпуклый
выпуклый
самопересекающийся
Вписанный
трапеция
описанный
равнобедренная трапеция
равнобокая
параллелограмм
стороны параллельны
выпуклый ромбоид (дельтоид)
диагонали перпендикулярны
прямоугольник
прямые углы
Ромб
равнобедренный
квадрат

Прямоугольник

- Прямоугольник — четырёхугольник, у которого все углы прямые;

Квадрат

- Квадрат — четырёхугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны;

Параллелограмм

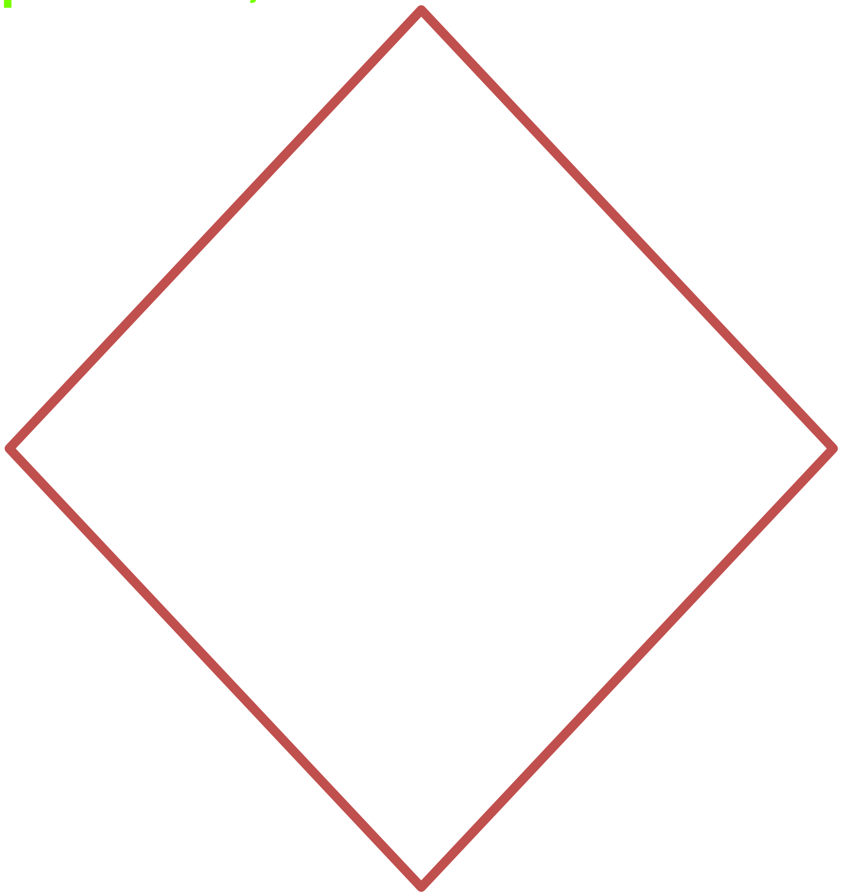
- Параллелограмм — четырёхугольник, у которого все противоположные стороны равны и лежат на параллельных прямых;

Трапеция

- Трапеция — четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны;

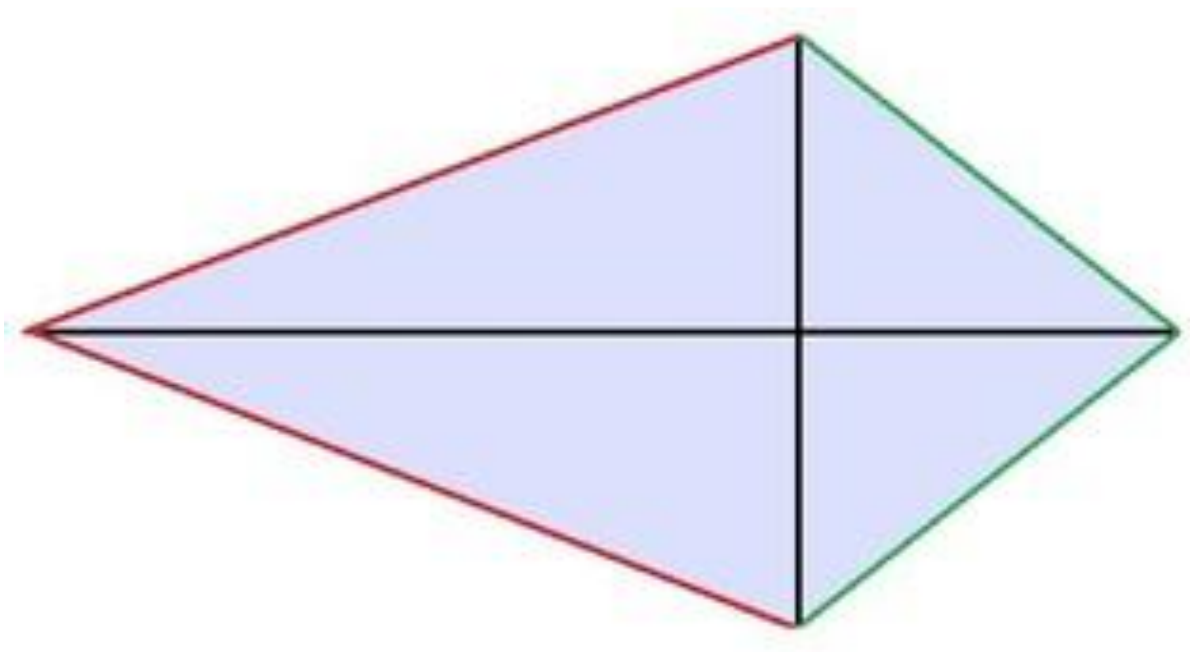
Ромб

- Ромб — четырёхугольник, у которого все стороны равны;



Дельтоид

- Дельтоид — четырёхугольник, у которого две пары смежных сторон равны.



Свойства

Свойства

- Сумма углов четырёхугольника равна 2 π = 360°.
- Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°

($\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$). См. также теорема Птолемея.

- Выпуклый четырёхугольник является описанным около окружности тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны ($AB + CD = BC + AD$)
- **Формула Эйлера**: учетверённый квадрат расстояния между серединами диагоналей равен сумме квадратов сторон четырёхугольника минус сумма квадратов его диагоналей.
- Средние линии четырёхугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.
- Четыре отрезка, каждый из которых соединяет вершину четырёхугольника с центроидом треугольника, образованного оставшимися тремя вершинами, пересекаются в центроиде четырёхугольника и делятся им в отношении 3:1, считая от вершин.
- Две противоположные стороны четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух других противоположных сторон равна сумме квадратов диагоналей.
- Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.
- Средние линии четырёхугольника равны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.

Площадь S

Площадь

Площадь произвольного четырёхугольника с диагоналями d_1, d_2 и острым углом α между ними (или их продолжениями), равна:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$$

Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника равна:

- $16S^2 = 4d_1^2 d_2^2 - \left(b^2 + d^2 - a^2 - c^2\right)^2$, где d_1, d_2 – длины диагоналей, a, b, c, d – длины сторон.
- $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\theta}$, где p – полупериметр, а θ есть полусумма противоположных углов четырёхугольника. (Какую именно пару противоположных углов взять роли не играет, так как если полусумма одной пары противоположных углов равна θ, то полусумма двух других углов будет $180^\circ - \theta$ и $\cos^2(180^\circ - \theta) = \cos^2\theta$). Из этой формулы для вписанных 4-угольников следует формула Брахмагупты.

Особые случаи

Если 4-угольник и вписан, и описан, то $S = \sqrt{abcd}$. Если он описан, то площадь равна половине его периметра умноженная на радиус вписанной окружности

История

В древности египтяне и некоторые другие народы использовали для определения площади четырёхугольника **неверную** формулу – произведение полусумм его противоположных сторон a, b, c, d[1]:

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Интересные факты о прямоугольнике