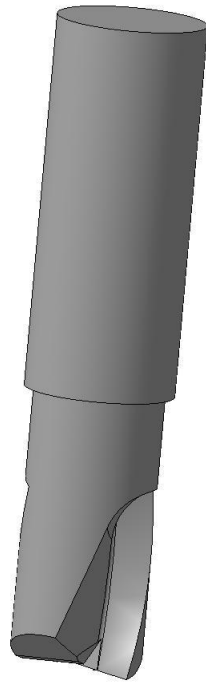
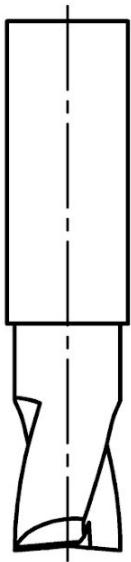


Визначення вихідних інструментальних поверхонь

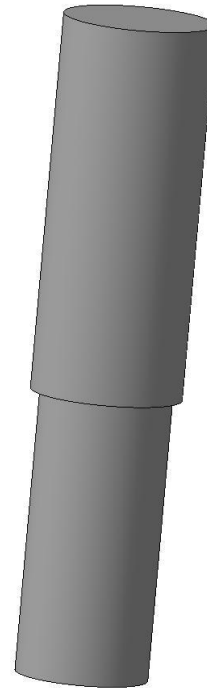
Загальний аналітичний спосіб визначення огинаючих кривих та поверхонь.

Визначення огинаючої сімейства плоских кривих

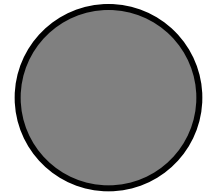
Кінцева фреза



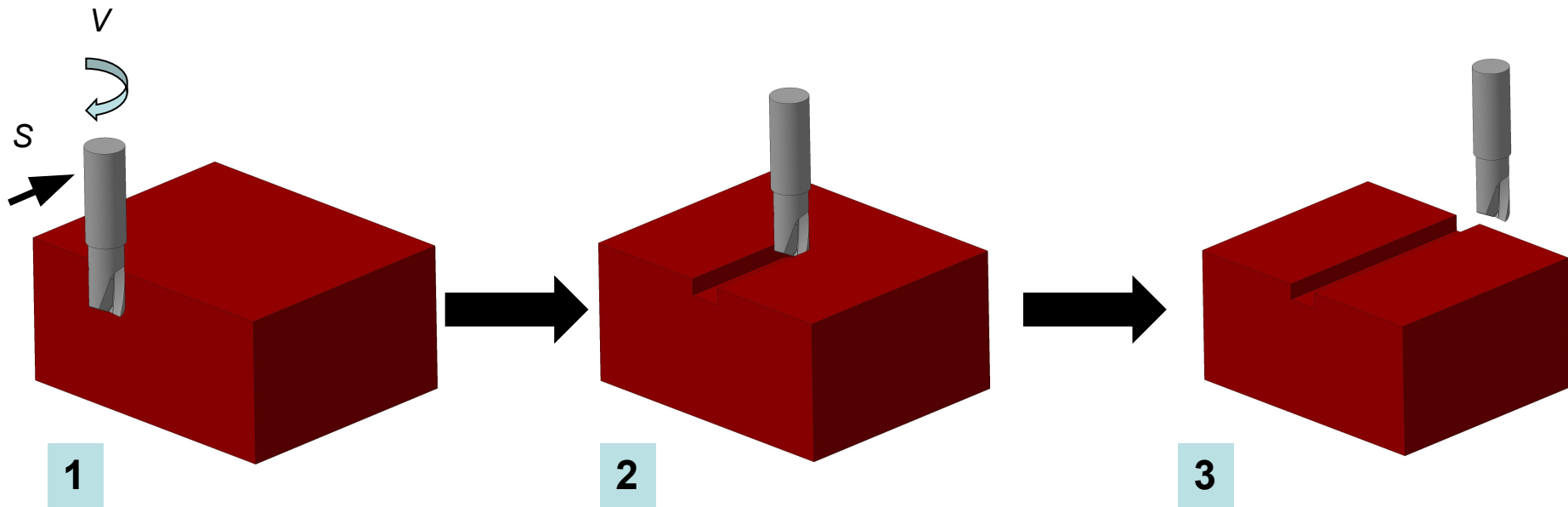
Спрощена модель



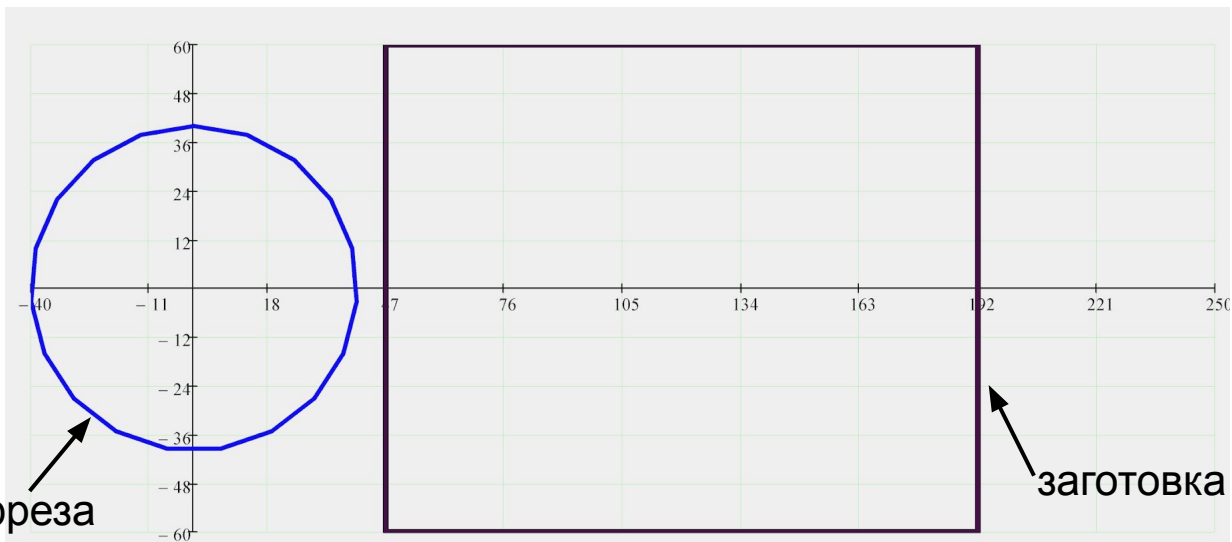
Модель, що розглядається при формоутворенні (плоска крива - коло)



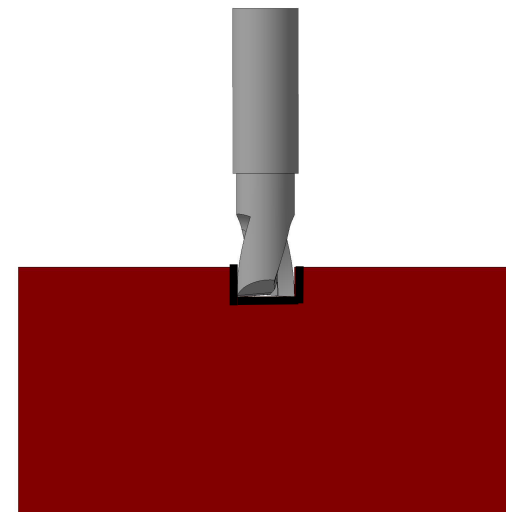
Процес обробки прямокутного паза кінцевою фрезою

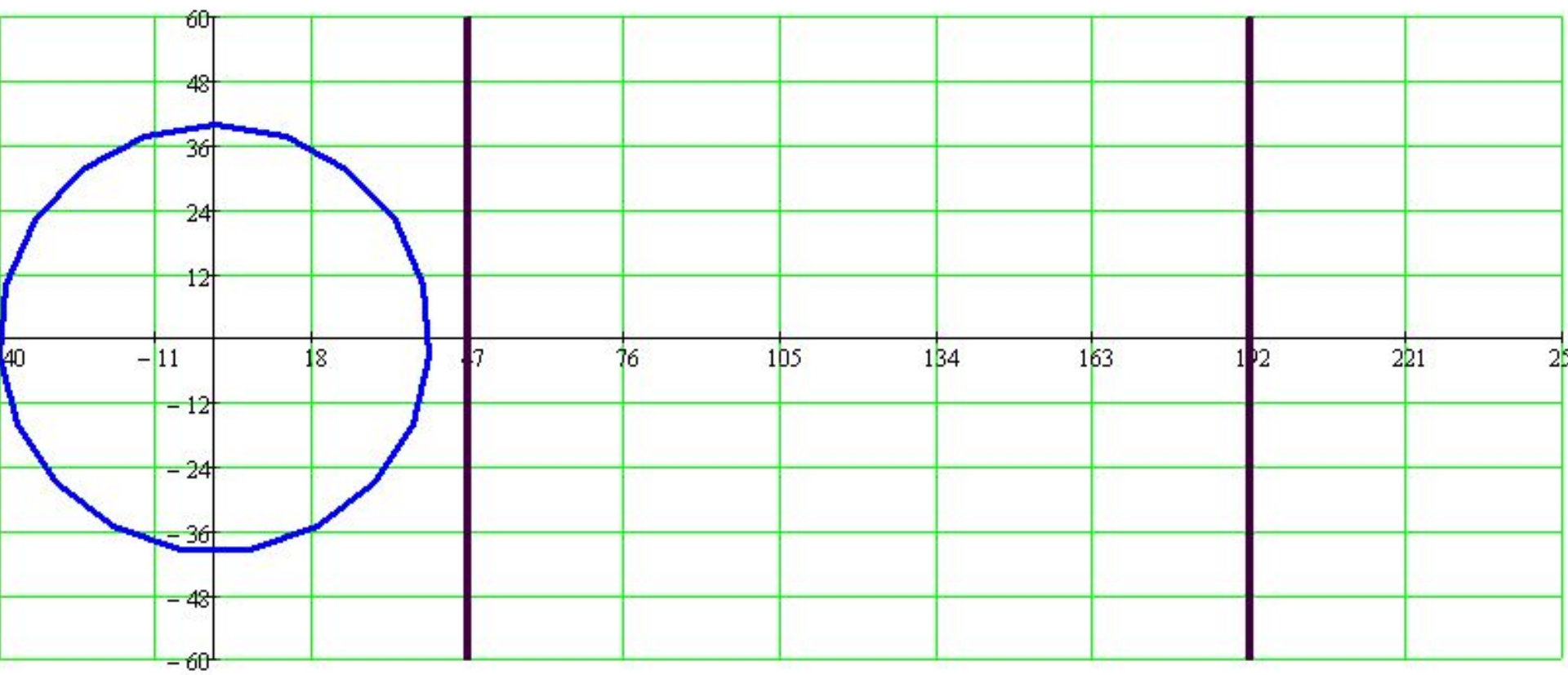


Математична модель процесу формоутворення



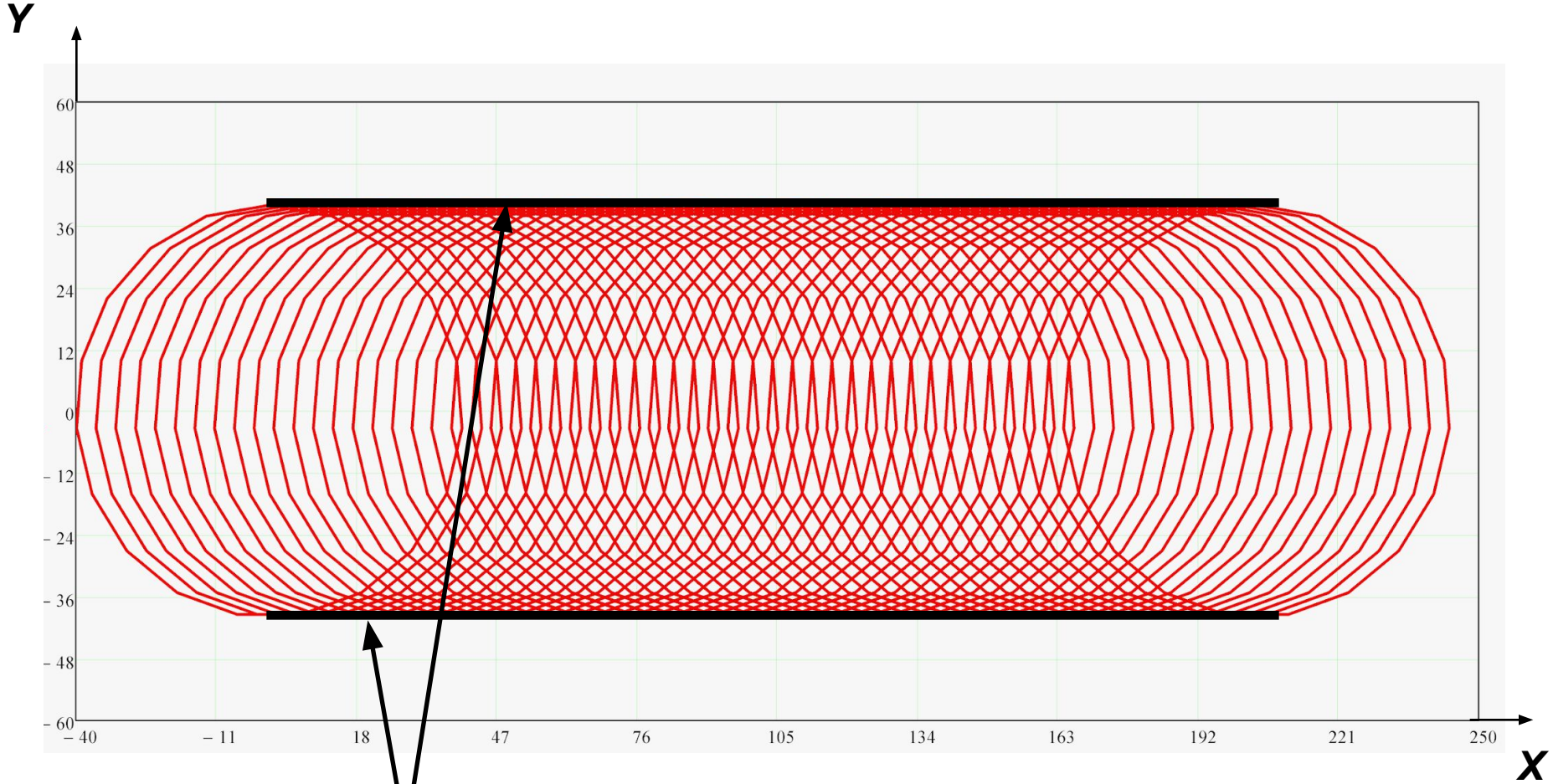
Форма паза





Огинаюча сімейства плоских кривих

Прямолінійно поступальний рух кола



Огинаючі – прямі лінії

Сімейство кривих, яке залежить від параметру t :

$$f(x, y, t) = 0$$

Огинаюча сімейства кривих, яке залежить від параметру t :

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Приклад 1. Огинаюча сімейства кіл:

$$(x + t)^2 + y^2 = R^2$$

Система рівнянь для визначення огинаючої:

$$\begin{cases} (x - t)^2 + y^2 = R^2 \\ -2(x - t) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = t) \Rightarrow y = \pm R$$

Сімейство кривих (*задано параметричними рівняннями*),
яке залежить від параметру t :

$$x = f_1(t, c); \quad y = f_2(t, c)$$

Огинаюча сімейства кривих, яке залежить від параметру t :

$$x = f_1(t, c);$$

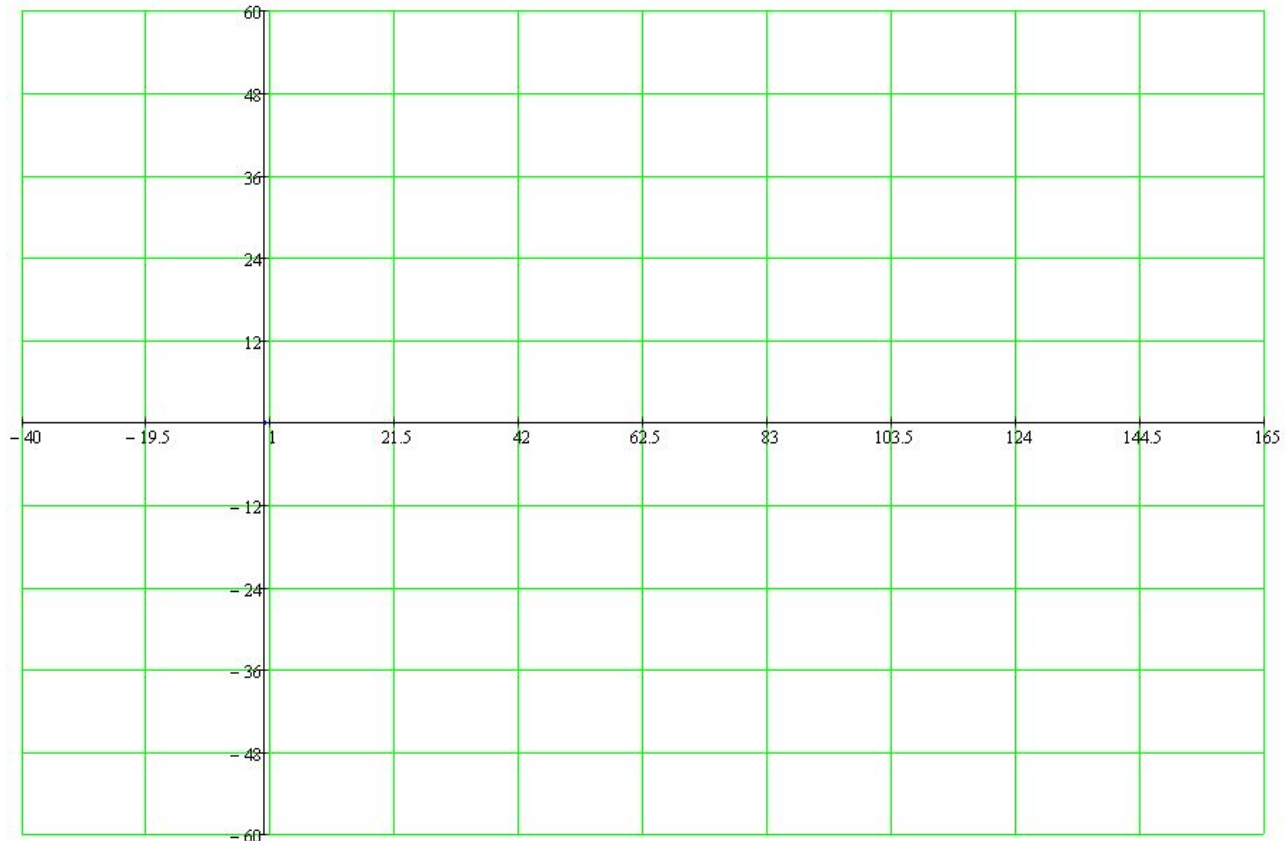
$$y = f_2(t, c);$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} \end{vmatrix} = 0$$

Приклад 2

Рівняння сімейства кривих в параметричному виді:

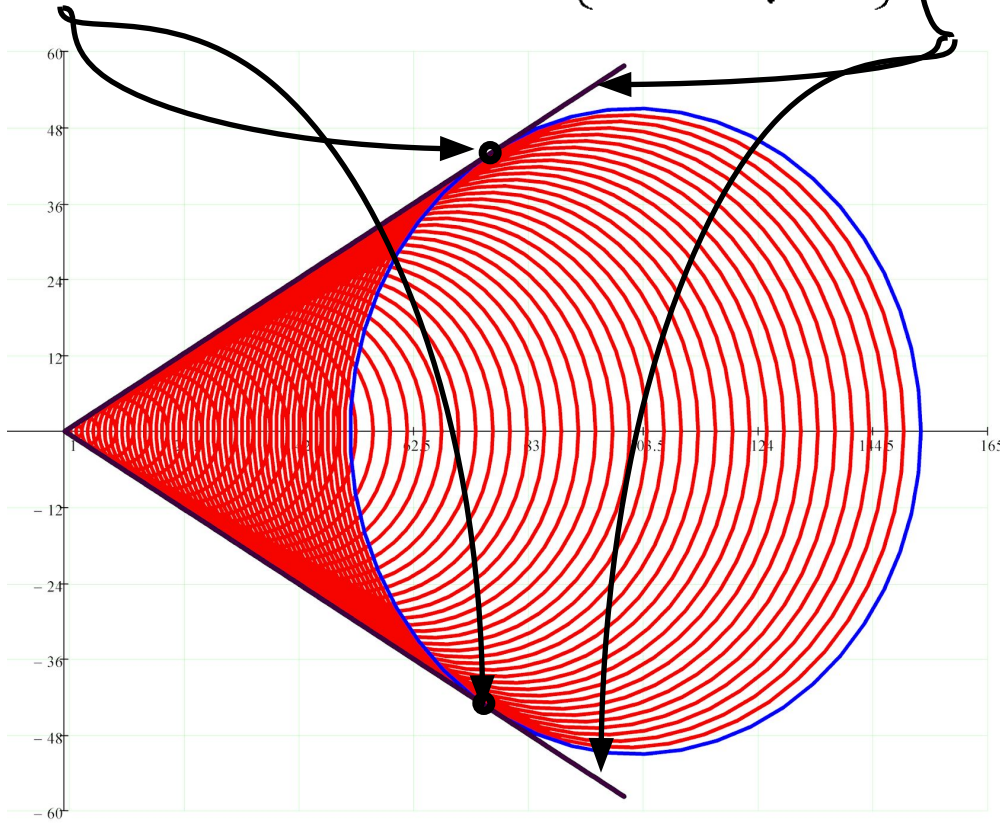
$$\begin{cases} x = 2c + c \cos t \\ y = c \sin t \end{cases}$$

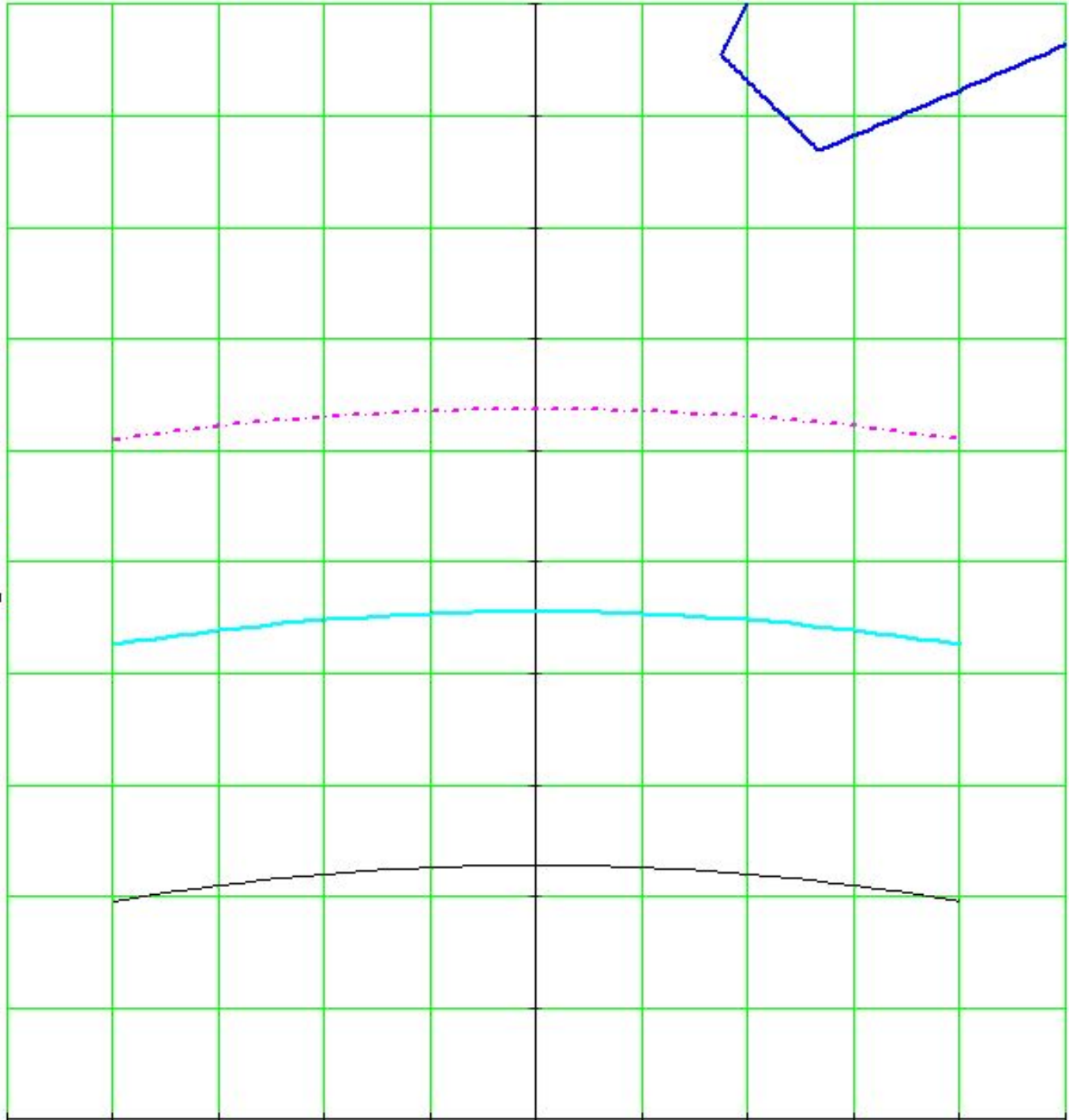


$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(2c + c \cos t)}{\partial t} & \frac{\partial(c \sin t)}{\partial t} \\ \frac{\partial(2c + c \cos t)}{\partial c} & \frac{\partial(c \sin t)}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c \sin t & c \cos t \\ 2 + \cos t & \sin t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c \sin^2 t - c \cos^2 t - 2c \cos t = 0 \Rightarrow -c(1 + 2 \cos t) = 0 \Rightarrow$$

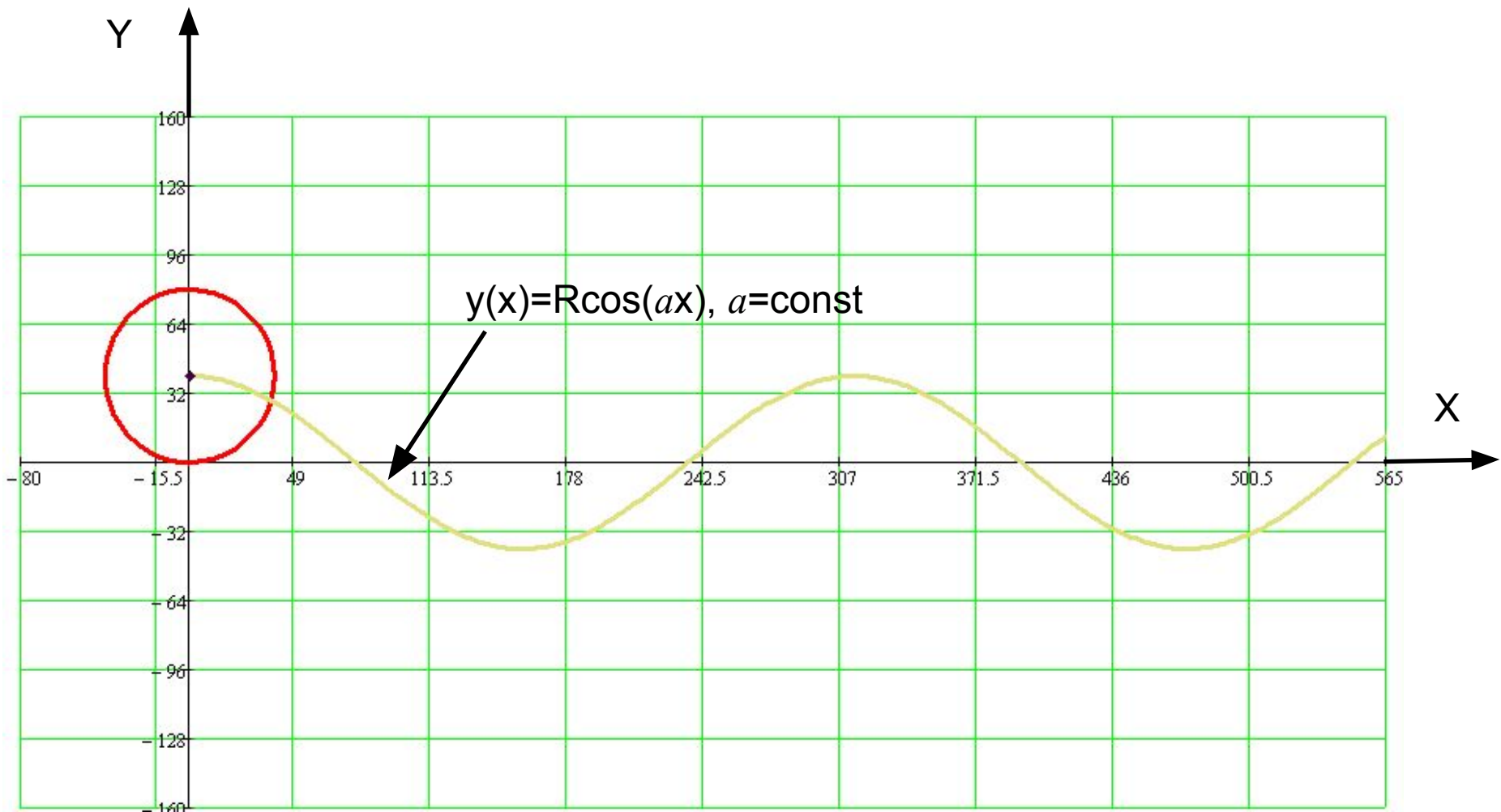
$$\Rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left\{ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x \right\}$$





Приклад 3

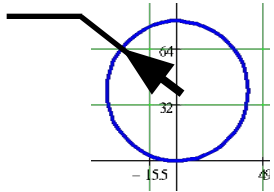
Рух кола по складній траєкторії – центр кола рухається по косинусоїді



Параметричне
рівняння кола

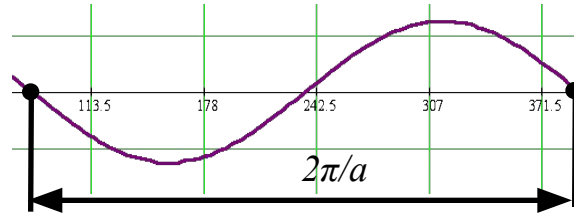
$$\begin{cases} x(t) = R \sin t \\ y(t) = R \cos t \end{cases}$$

R



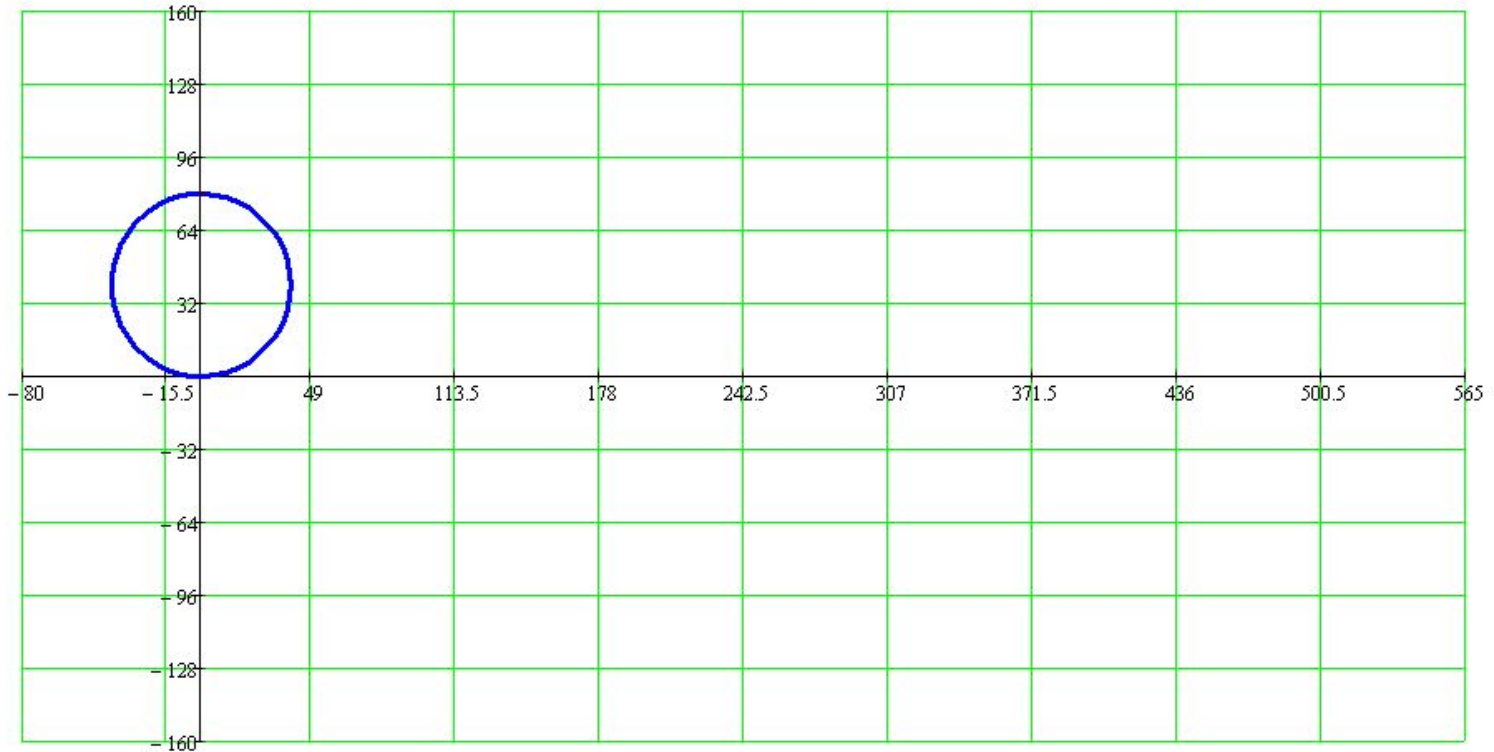
Рівняння траєкторії
руху центра кола

$$+ \begin{cases} x_1(c) = R \cos(ac), \\ a = \text{const} \\ y_1(c) = c \end{cases} =$$



Рівняння сімейства
плоских кривих

$$\begin{cases} X(t, c) = R \sin t + R \cos(a \cdot c) \\ Y(t, c) = R \cos t + c \end{cases}$$



Знаходження огинаючої:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(R \sin t + R \cos(a \cdot c))}{\partial t} & \frac{\partial(R \cos t + c)}{\partial t} \\ \frac{\partial(R \sin t + R \cos(a \cdot c))}{\partial c} & \frac{\partial(R \cos t + c)}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R \cos t & -R \sin t \\ -aR \sin(a \cdot c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

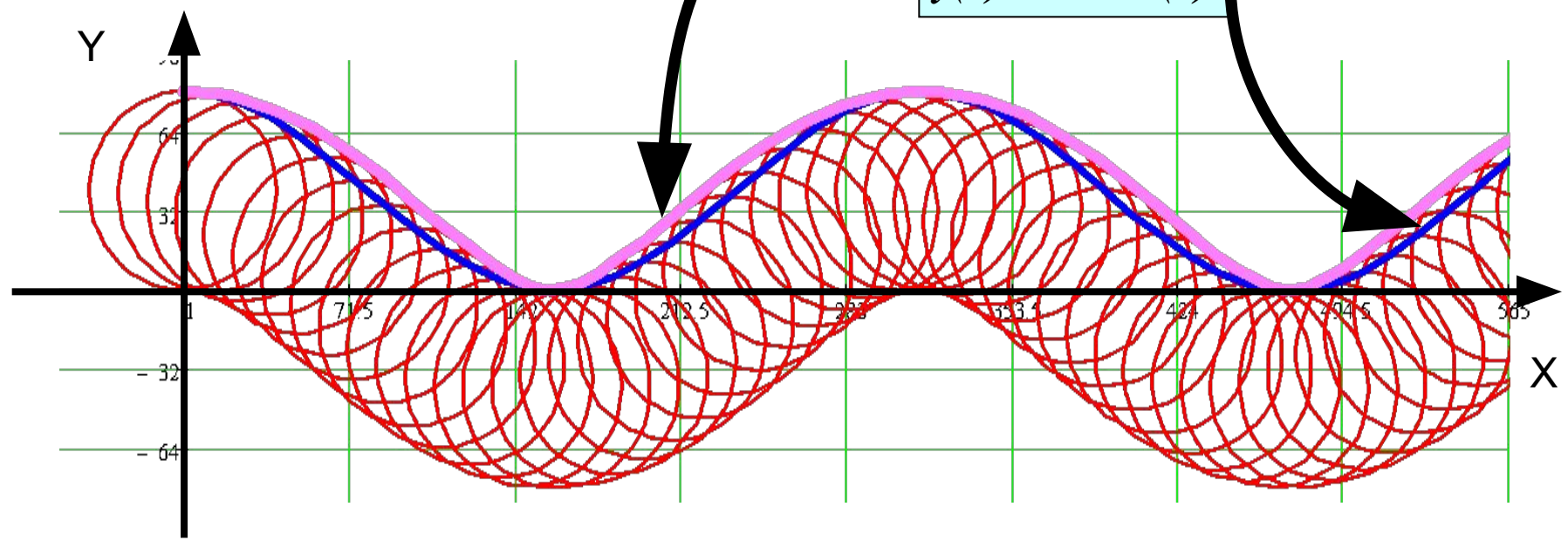
$$\Rightarrow R \cos t - aR^2 \sin t \sin(a \cdot c) = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg}(t) = a \cdot R \sin(a \cdot c) \Rightarrow t = \operatorname{arccctg}(a \cdot R \sin(a \cdot c))$$

$$\begin{cases} X_E(c) = R \sin(\operatorname{arccctg}(a \cdot R \sin(a \cdot c))) + R \cos(a \cdot c) \\ Y_E(c) = R \cos(\operatorname{arccctg}(a \cdot R \sin(a \cdot c))) + c \end{cases}$$

Точка контакту кола з огинаючою відбувається для певного параметру t

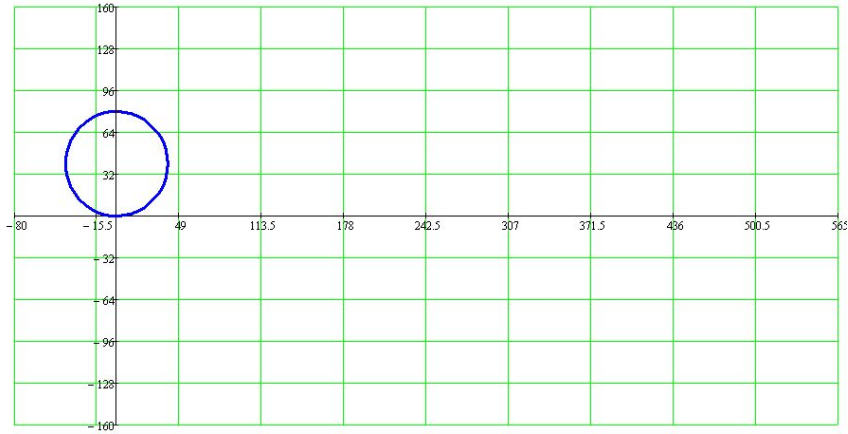
Рівняння огинаючої (в параметричній формі)

$$y(x) = R + R \cos(x)$$

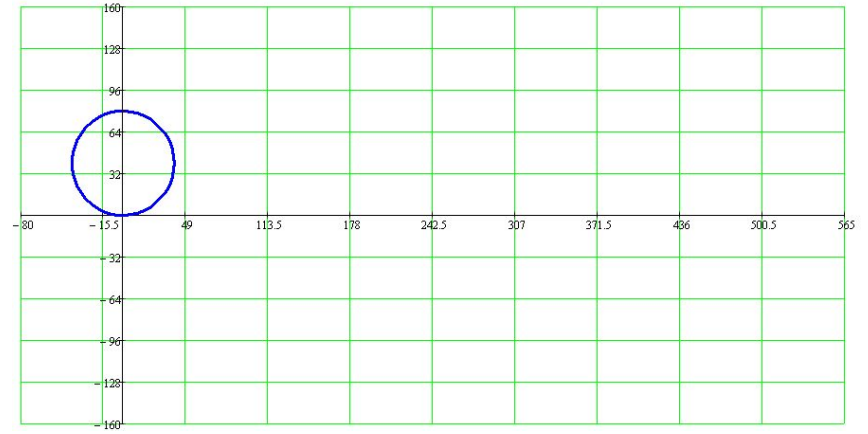


Вигляд огинаючої при різних параметрах α

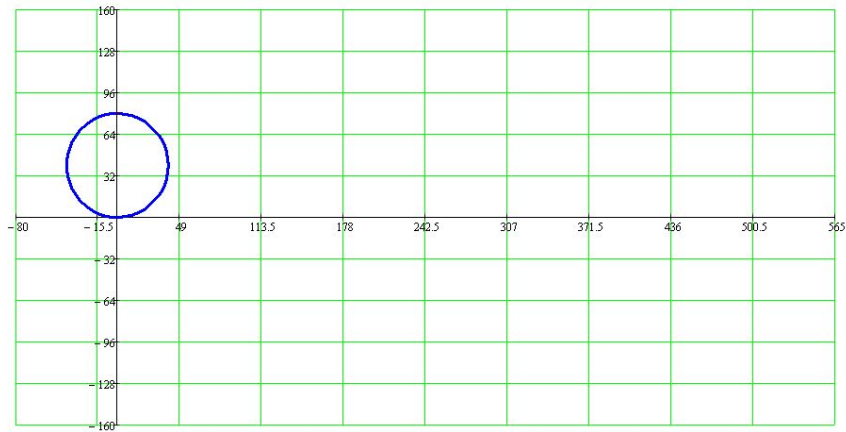
$\alpha=0.001$



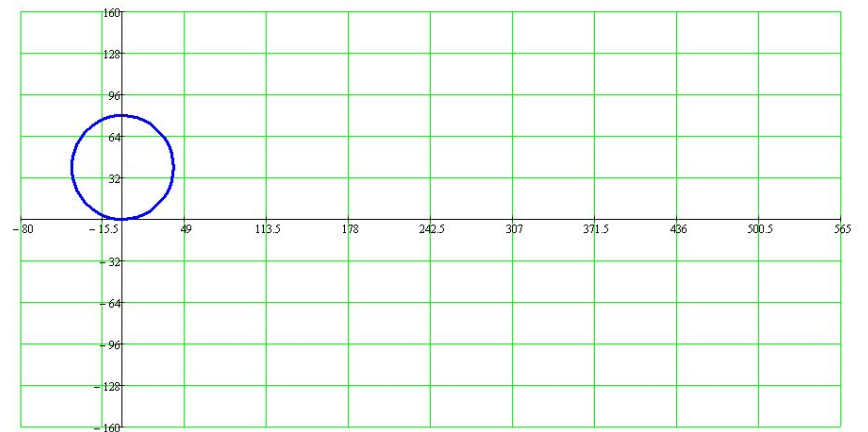
$\alpha=0.01$



$\alpha=0.05$



$\alpha=0.1$



Визначення огинаючої сімейства поверхонь

Сімейство поверхонь, яке залежить від параметру t :

$$f(x, y, z, t) = 0$$

Огинаюча сімейства поверхонь, яке залежить від параметру t :

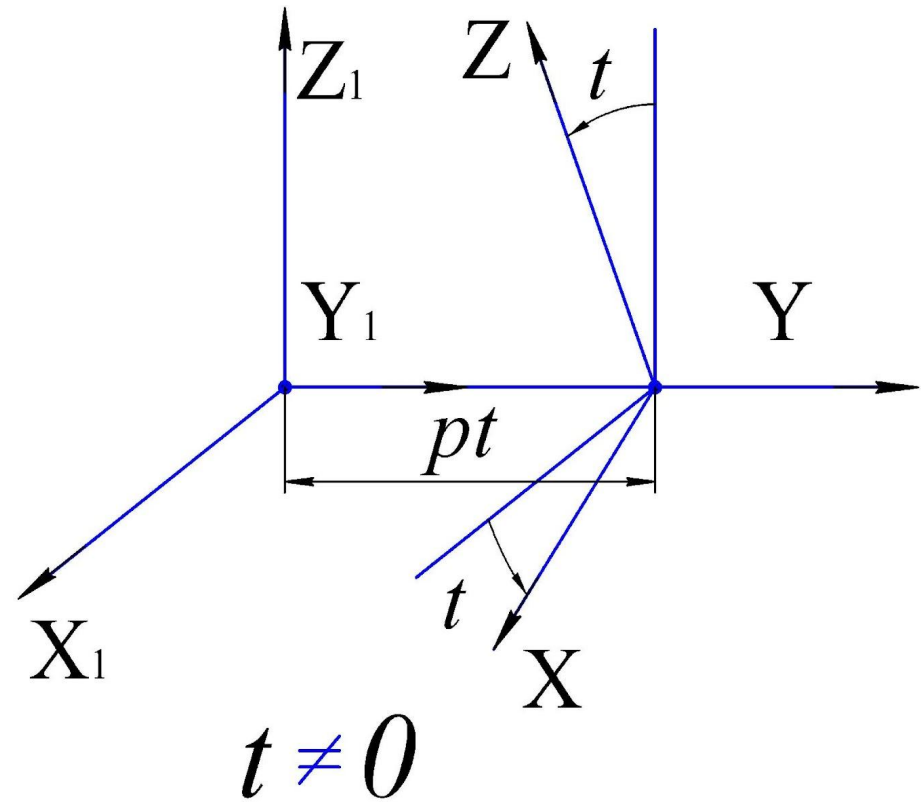
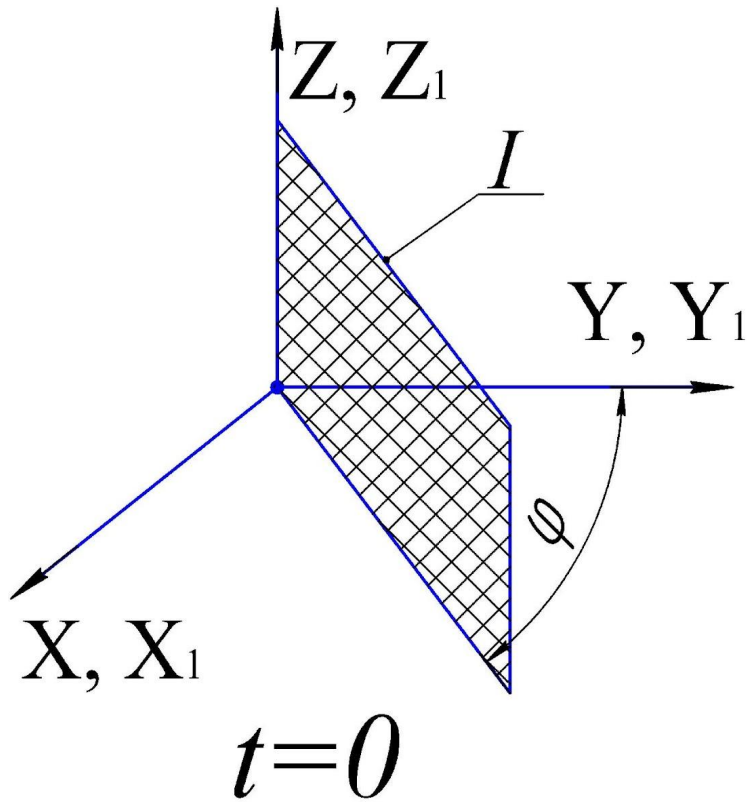
$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = 0$$



Рівняння визначає характеристику – лінію контакту поверхні з огинаючою

Приклад 4 Визначення огинаючої площини, при її гвинтовому русі, яка нахилена під кутом φ до осі гвинтового руху (Y)



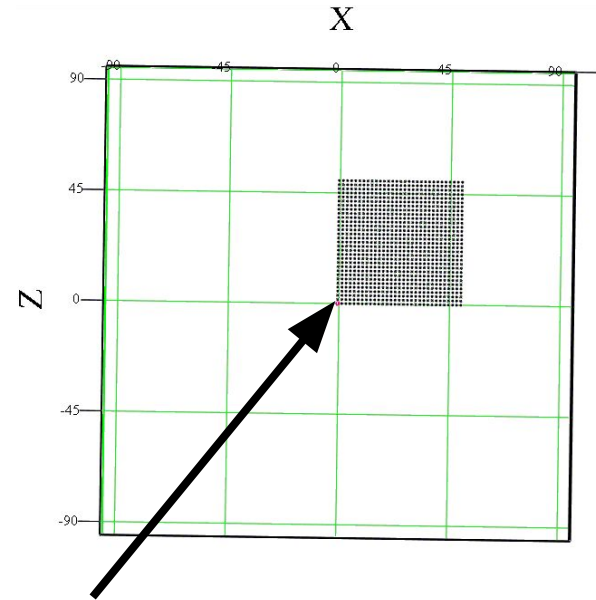
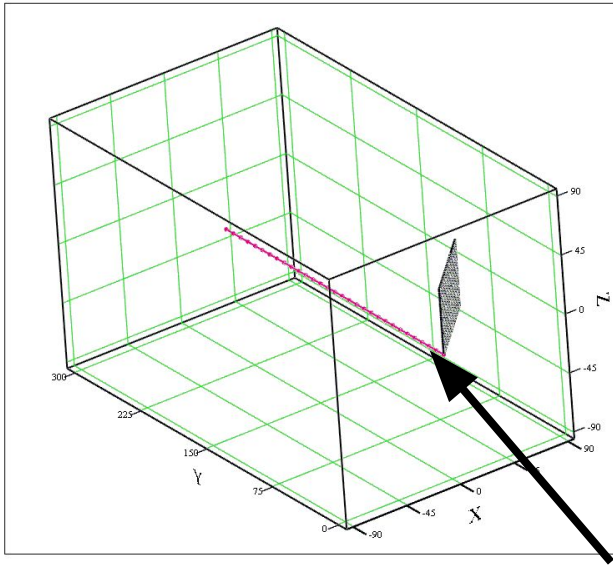
Рівняння площини

$$\begin{cases} x - ytg\varphi = 0 \\ z \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

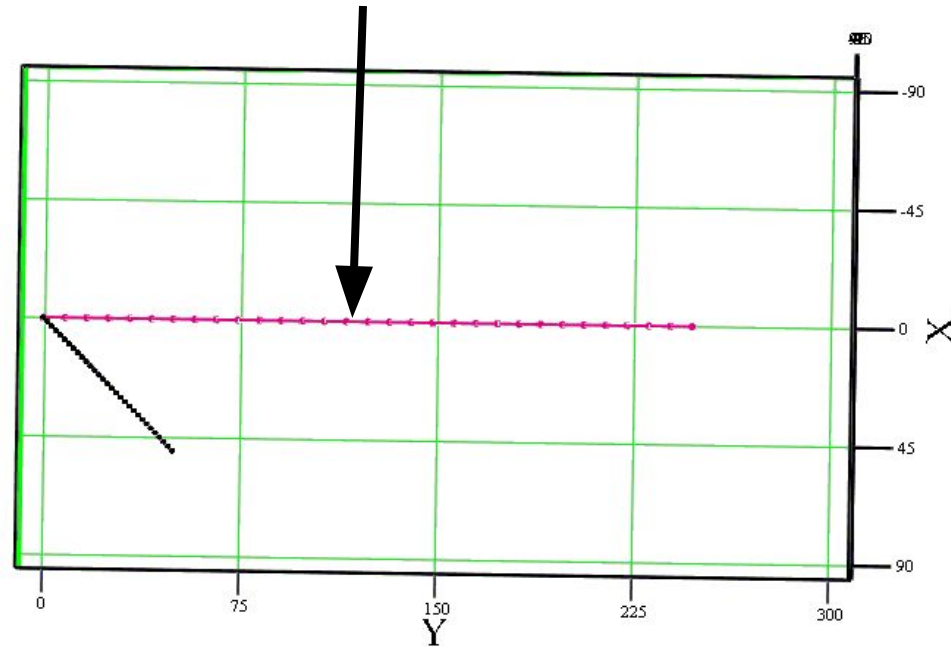
Формули переходу від системи $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ до $S(X, Y, Z)$

$$\begin{cases} x = x_1 \cos t - z_1 \sin t \\ y = y_1 - pt \\ z = z_1 \cos t + x_1 \sin t \end{cases}$$

Гвинтовий рух площини

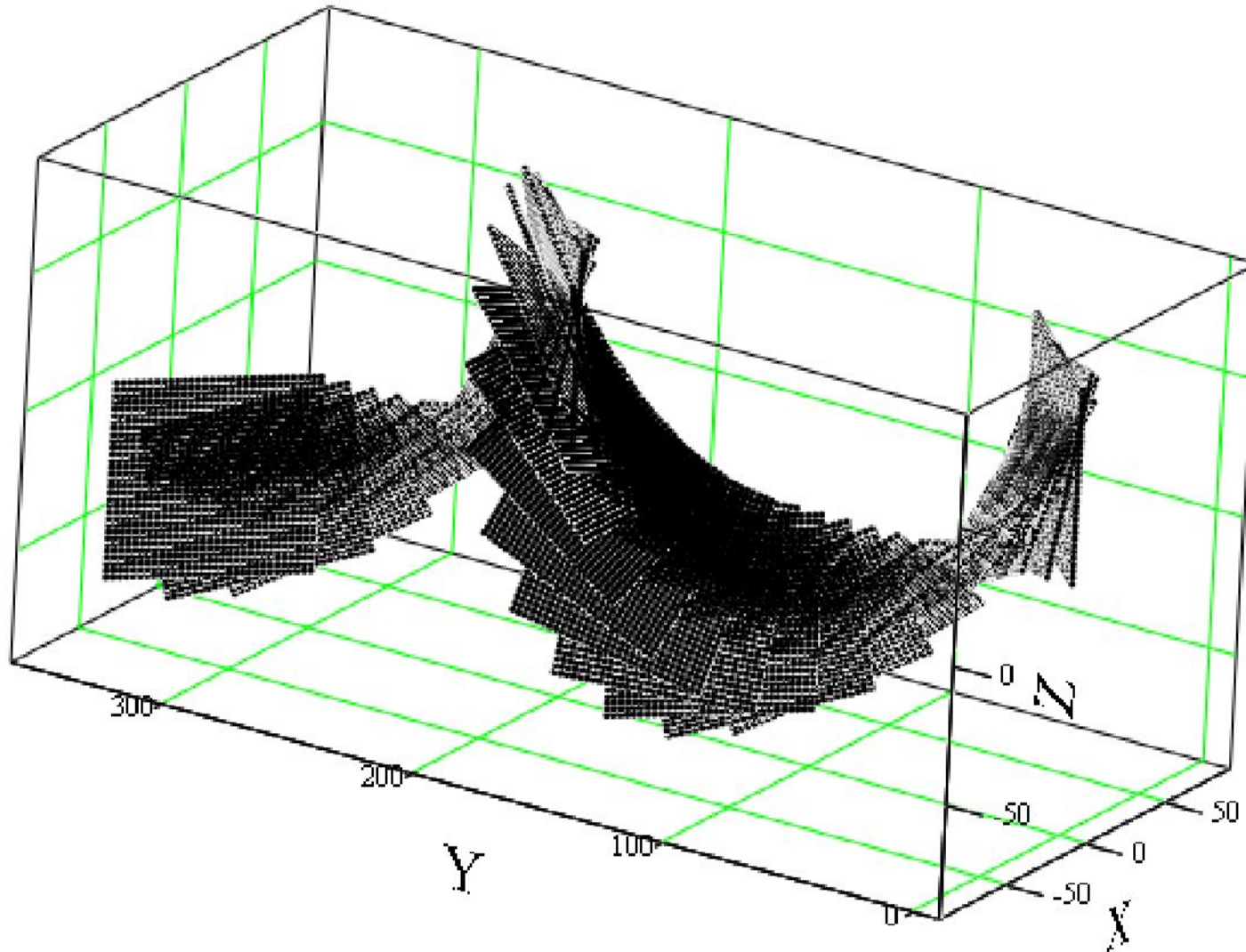


Вісь гвинтового руху



Сімейство площин, яке задано гвинтовим рухом твірної площини

$$x_1 \cos t - z_1 \sin t - (y_1 - p \cdot t) \operatorname{tg} \varphi = 0$$



$$\boxed{\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow} \quad \frac{\partial(x_1 \cos t - z_1 \sin t - (y_1 - p \cdot t) \operatorname{tg} \varphi)}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

Огинаюча визначиться системою рівнянь

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) = x_1 \cos t - z_1 \sin t - (y_1 - p \cdot t) \operatorname{tg} \varphi = 0 \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = -x_1 \sin t - z_1 \cos t + p \cdot \operatorname{tg} \varphi = 0 \end{cases}$$

Торцевий переріз огинаючої площиною $Y_I=0$

$$\begin{array}{rcl} x_1 \cos t - z_1 \sin t + p \cdot t \cdot \operatorname{tg} \varphi = 0 & \times & \begin{array}{cc} \sin t & \cos t \\ + & + \end{array} \\ & & \Rightarrow \\ -x_1 \sin t - z_1 \cos t + p \cdot \operatorname{tg} \varphi = 0 & \times & \begin{array}{cc} \cos t & -\sin t \end{array} \end{array}$$

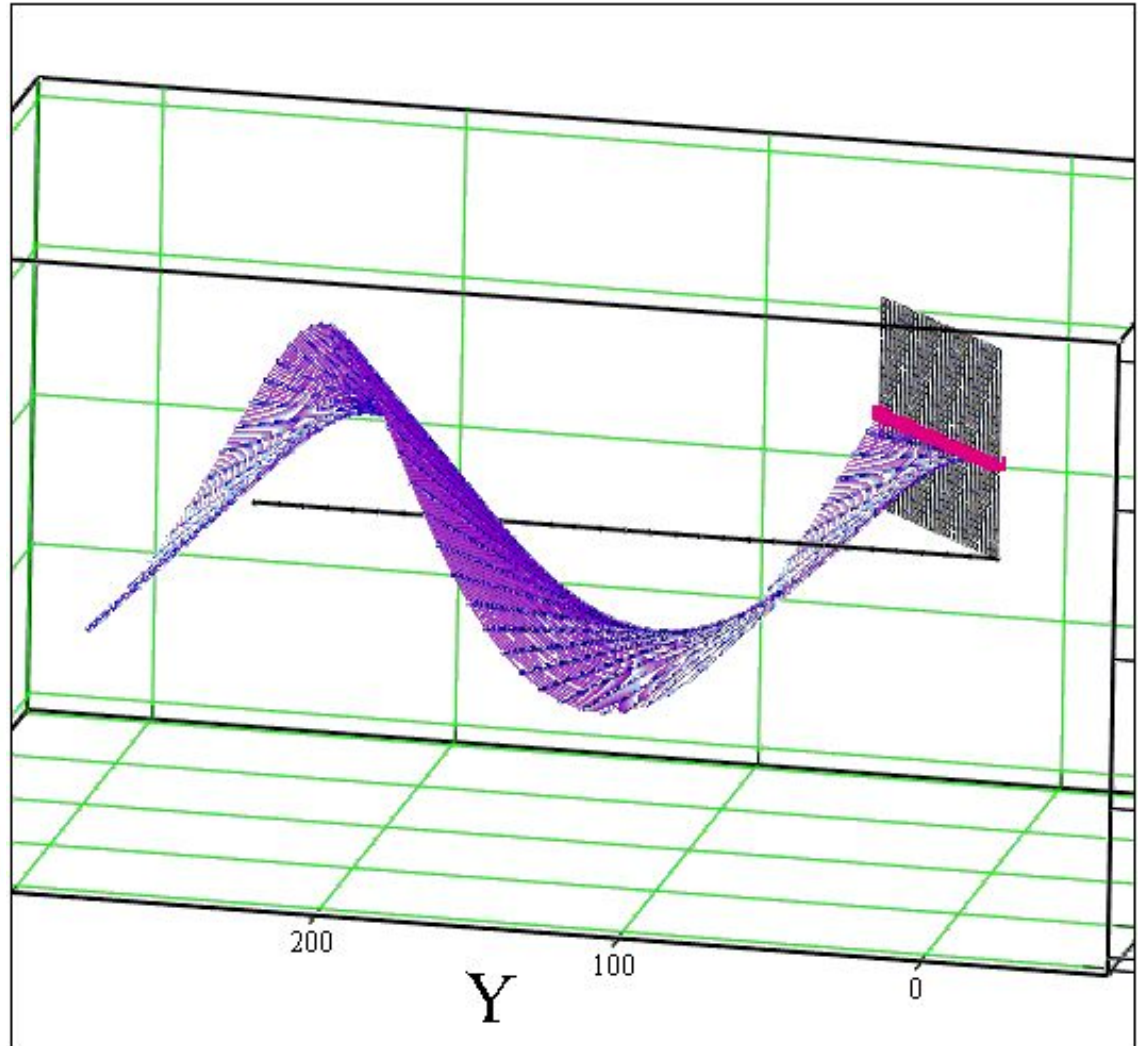
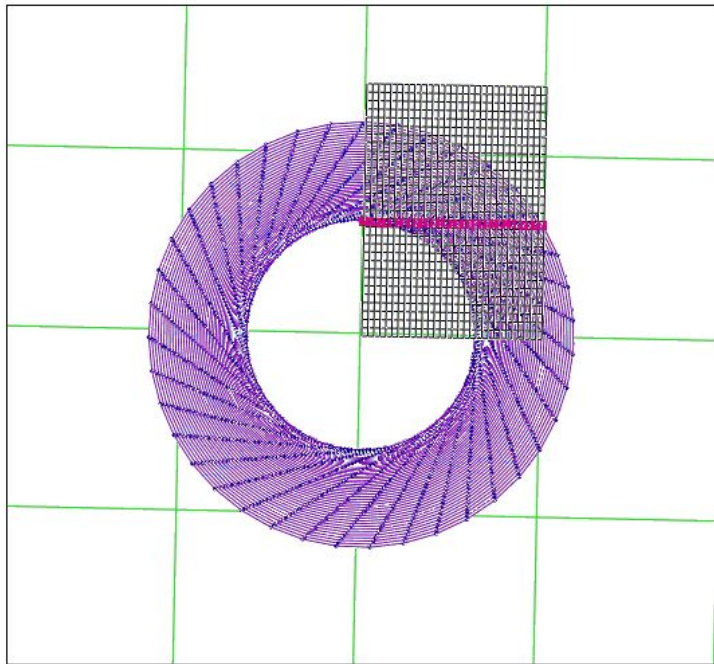
$$z_1 = p \operatorname{tg} \varphi \cos t + p \operatorname{tg} \varphi \cdot t \cdot \sin t$$

- параметричне рівняння евольвенти

$$x_1 = p \operatorname{tg} \varphi \sin t - p \operatorname{tg} \varphi \cdot t \cdot \cos t$$

$$r_B = p \operatorname{tg} \varphi \quad - \text{ радіус основного кола}$$

Утворення евольвентної гвинтової поверхні



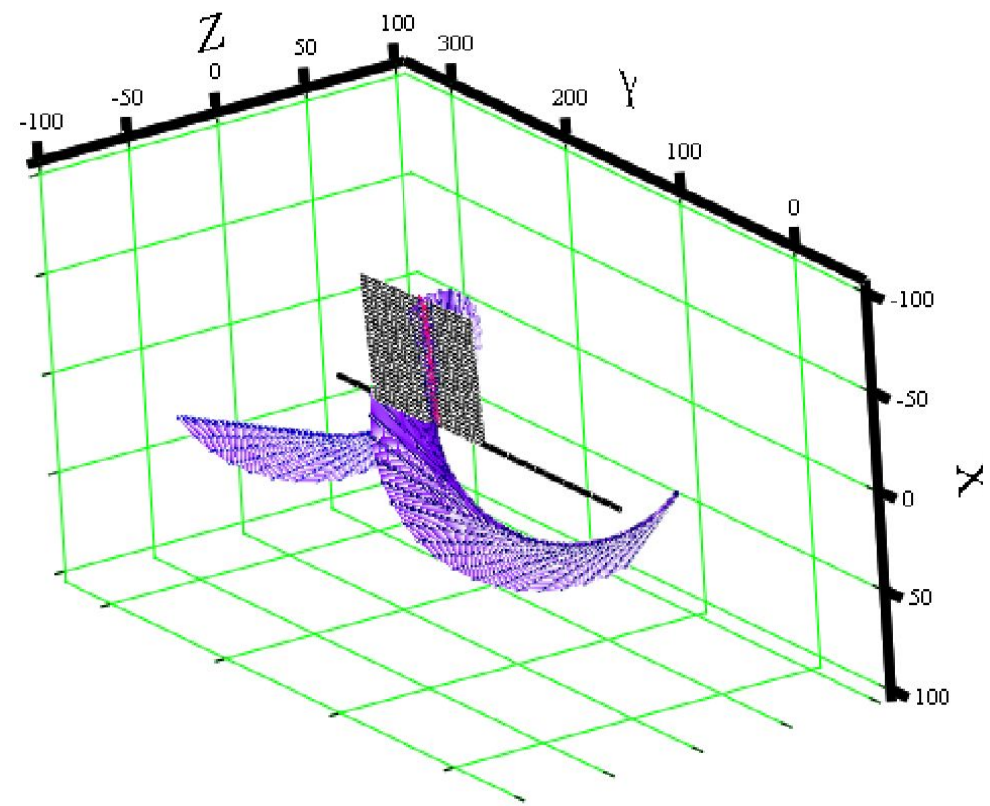
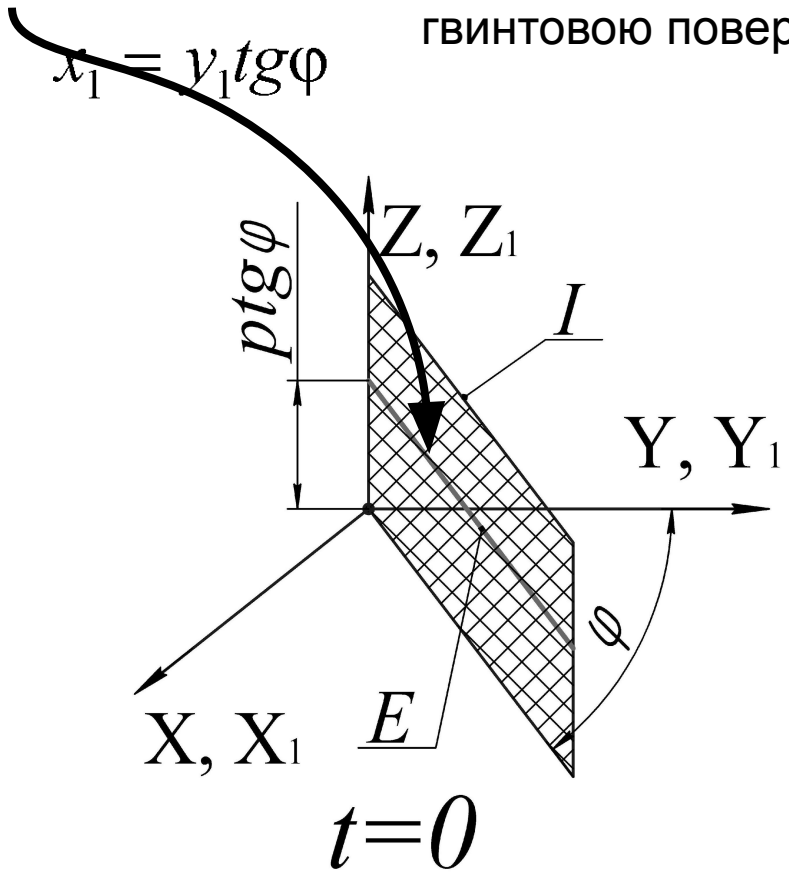
Визначення характеристики

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) = x_1 \cos t - z_1 \sin t - (y_1 - p \cdot t) \operatorname{tg} \varphi = 0 \\ \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = -x_1 \sin t - z_1 \cos t + p \cdot \operatorname{tg} \varphi = 0 \end{cases}, t = 0 \Rightarrow$$

$$z_1 = p \operatorname{tg} \varphi$$

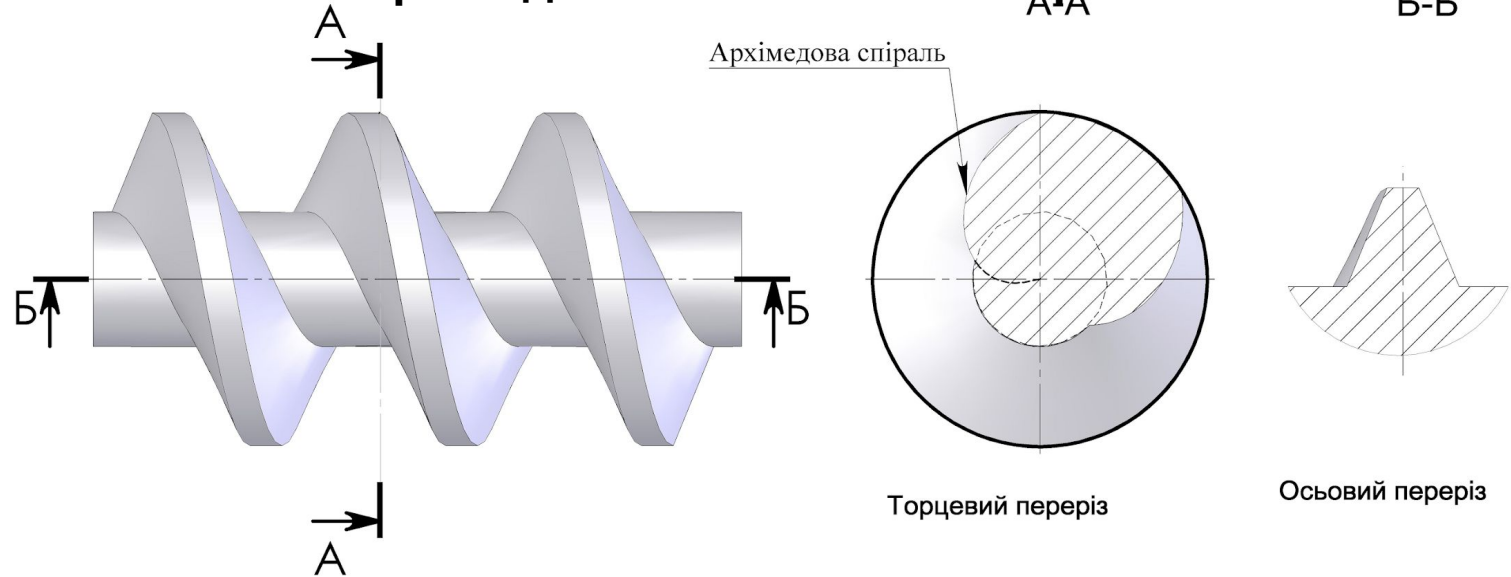
-рівняння характеристики (контакту площини із огинаючою гвинтовою поверхнею)

$$x_1 = y_1 \operatorname{tg} \varphi$$

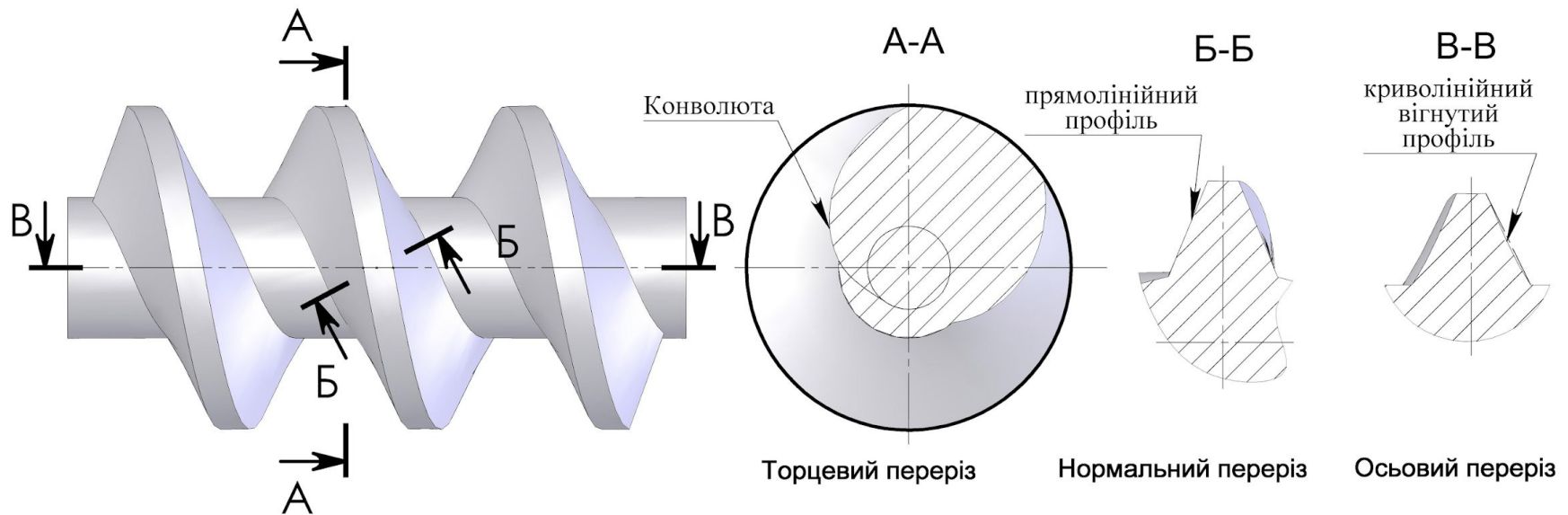


Види лінійчатих гвинтових поверхонь

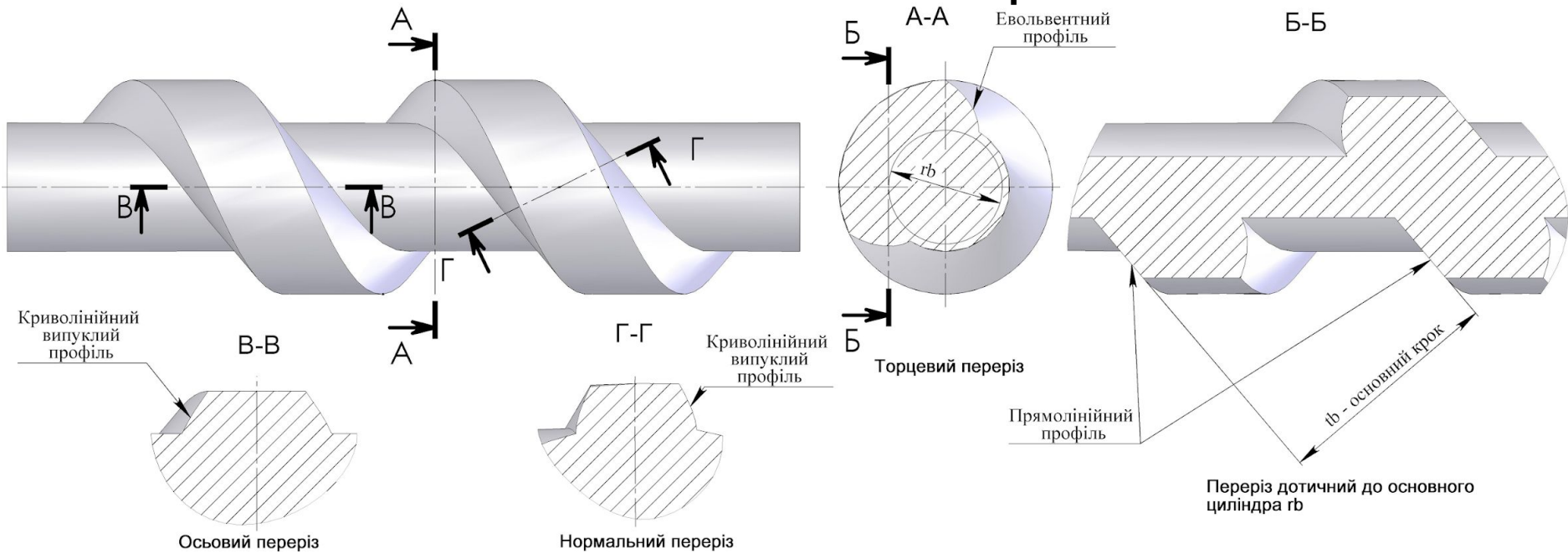
Архімедова гвинтова поверхня



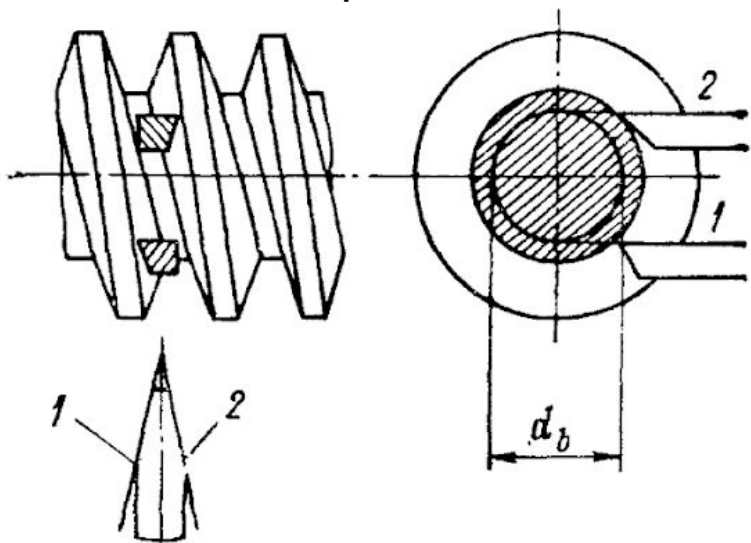
Конволютна гвинтова поверхня



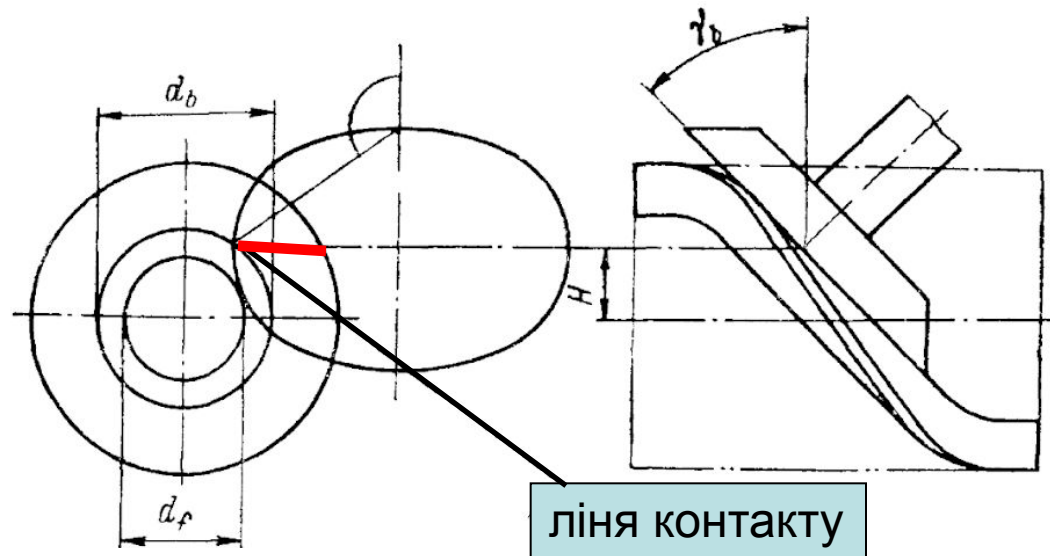
Евольвентна гвинтова поверхня



Нарізання евольвентного черв'яка різцями



Шліфування профілю евольвентного черв'яка шліфувальним кругом



Сімейство поверхонь (задано параметричними рівняннями),
яке залежить від параметру c :

$$x = f_1(t, u, c); \quad y = f_2(t, u, c); \quad z = f_3(t, u, c)$$

Огинаюча сімейства поверхонь, яке залежить від параметру c :

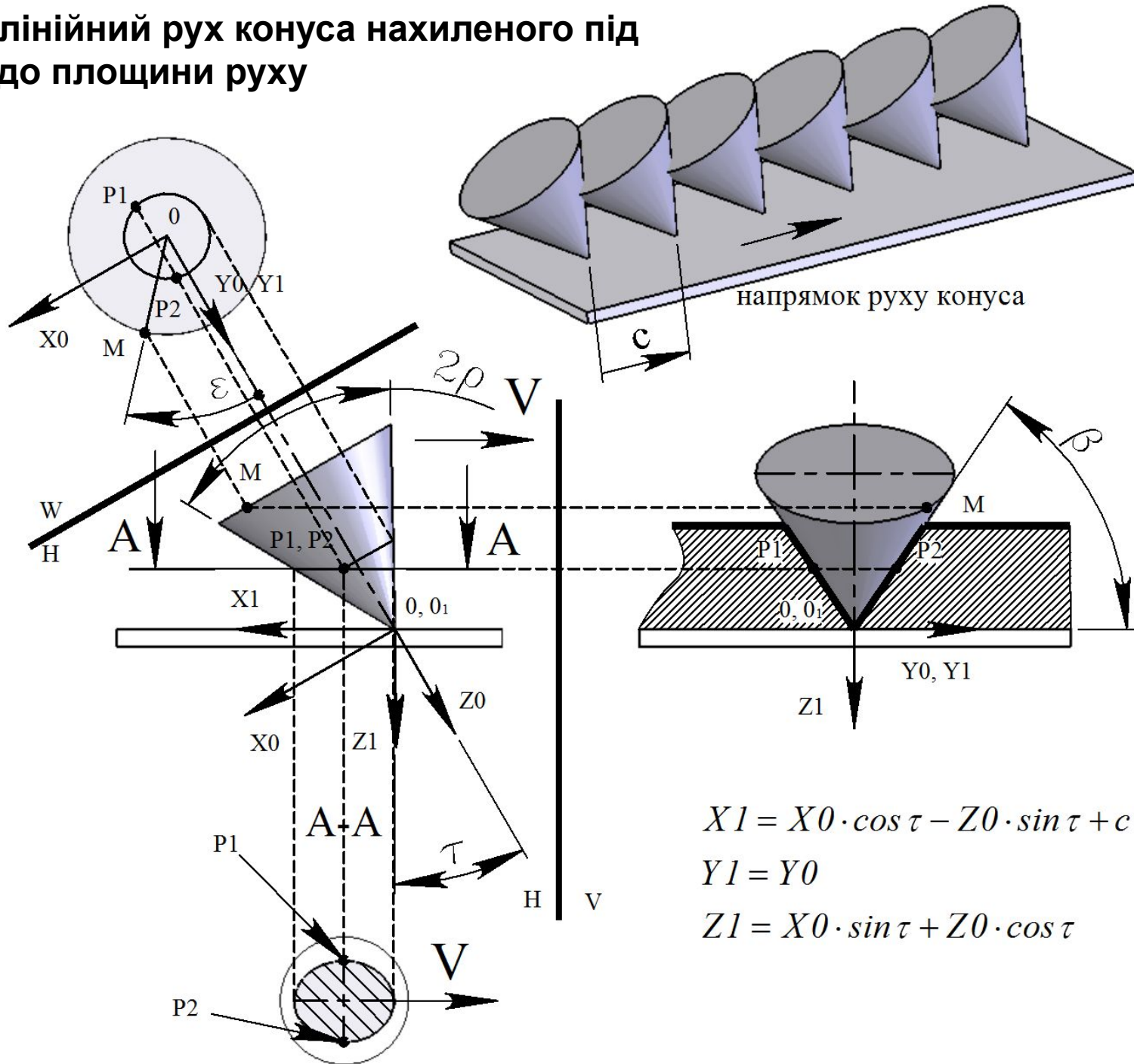
$$x = f_1(t, u, c);$$

$$y = f_2(t, u, c);$$

$$z = f_3(t, u, c);$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0$$

Прямолінійний рух конуса нахилоного під кутом до площини руху



$$X1 = X0 \cdot \cos \tau - Z0 \cdot \sin \tau + c$$

$$Y1 = Y0$$

$$Z1 = X0 \cdot \sin \tau + Z0 \cdot \cos \tau$$

Рівняння поверхні конуса в системі $S(X_0, Y_0, Z_0)$ заданих в параметричній формі

$$x_0(l, \varepsilon) = l \sin \varepsilon$$

$$y_0(l, \varepsilon) = l \cos \varepsilon$$

$$z_0(l) = -l \operatorname{ctg} \rho$$

Рівняння сімейств поверхонь конусів в системі $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$

$$x_1 = l \sin \varepsilon \cos \tau + l \operatorname{ctg} \rho \sin \tau + c$$

$$y_1 = l \cos \varepsilon$$

$$z_1 = l \sin \varepsilon \sin \tau - l \operatorname{ctg} \rho \cos \tau$$

Визначення огинаючої до сімейства поверхонь конусів в системі $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial c} & \frac{\partial y_1}{\partial c} & \frac{\partial z_1}{\partial c} \\ \frac{\partial x_1}{\partial l} & \frac{\partial y_1}{\partial l} & \frac{\partial z_1}{\partial l} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial z_1}{\partial \varepsilon} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow l \cos^2 \varepsilon \sin \tau + l \sin^2 \varepsilon \sin \tau - l \sin \varepsilon \operatorname{ctg} \rho \cos \tau = 0 \Rightarrow$$

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \rho$$

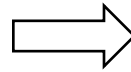
Огинаюча сімейства поверхонь :

$$x_1 = l \sin \varepsilon \cos \tau + l \operatorname{ctg} \rho \sin \tau + c$$

$$y_1 = l \cos \varepsilon$$

$$z_1 = l \sin \varepsilon \sin \tau - l \operatorname{ctg} \rho \cos \tau$$

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \rho$$



$$x_1 = \frac{l \sin \tau}{\cos \rho \sin \rho} + c$$

$$\frac{z_1}{y_1} = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \tau - \frac{\operatorname{ctg} \rho \cos \tau}{\cos \varepsilon}$$

const

$$z_1 = k y_1 \quad k = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \tau - \frac{\operatorname{ctg} \rho \cos \tau}{\cos \varepsilon}$$

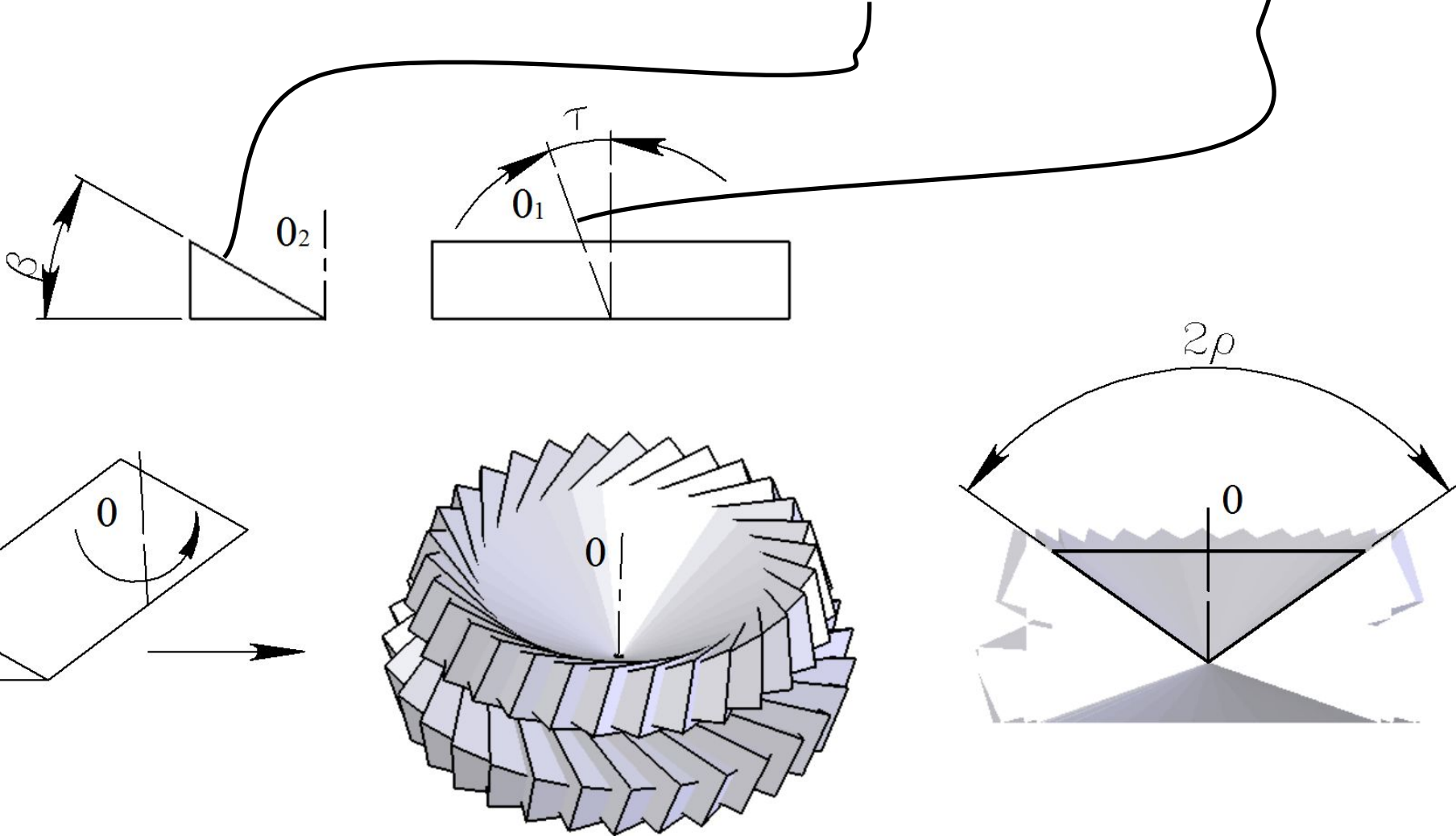
рівняння прямої лінії $\rightarrow \operatorname{tg} \beta = k = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \tau - \frac{\operatorname{ctg} \rho \cos \tau}{\cos \varepsilon}$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \rho \sin \tau - \operatorname{ctg} \rho \cos \tau}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \tau \operatorname{tg}^2 \rho}}$$

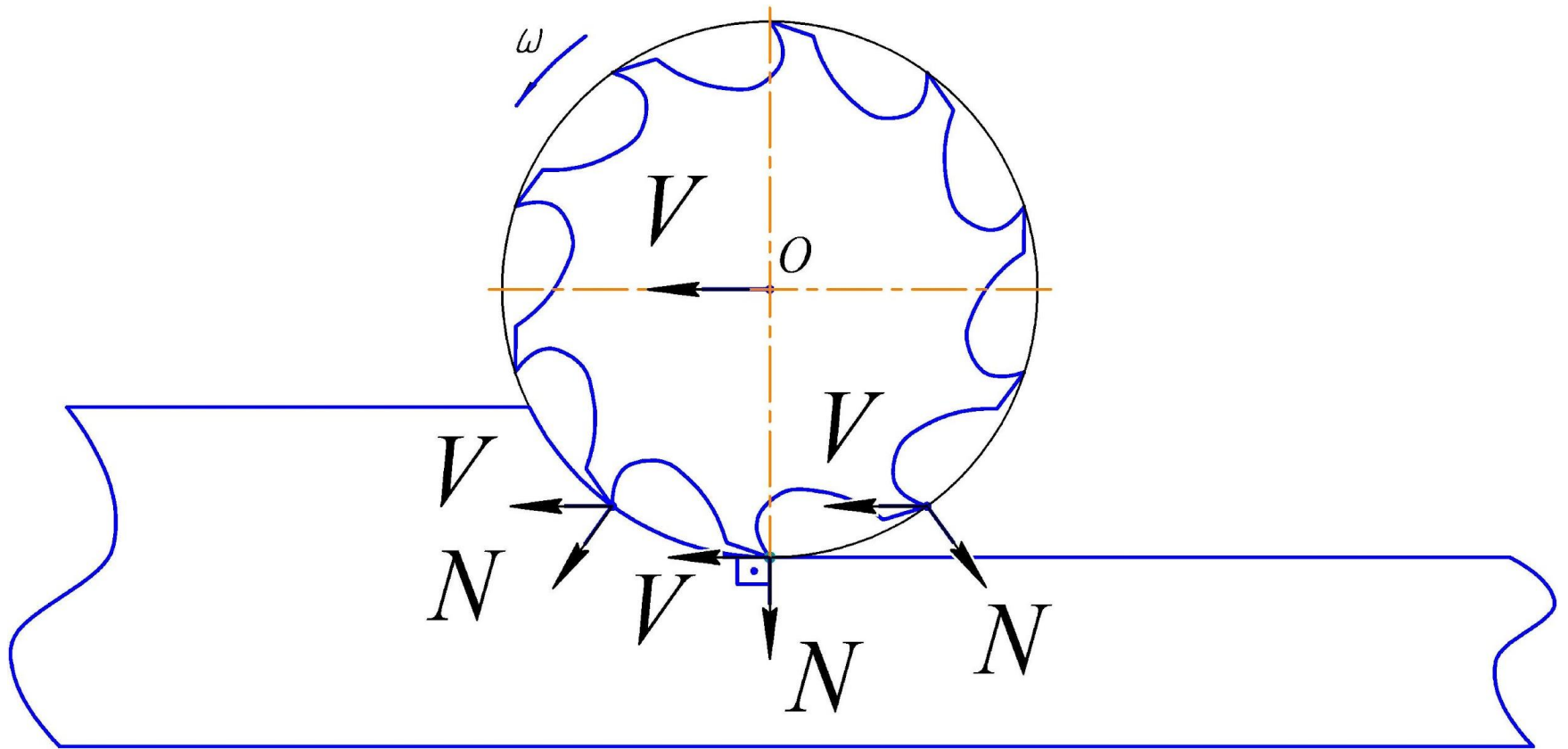
$$\cos \beta = \frac{\sin \rho}{\cos \tau}$$

Графічне визначення огиначаючих

Визначення огиначаючої при обертанні площини l навколо похилої осі O

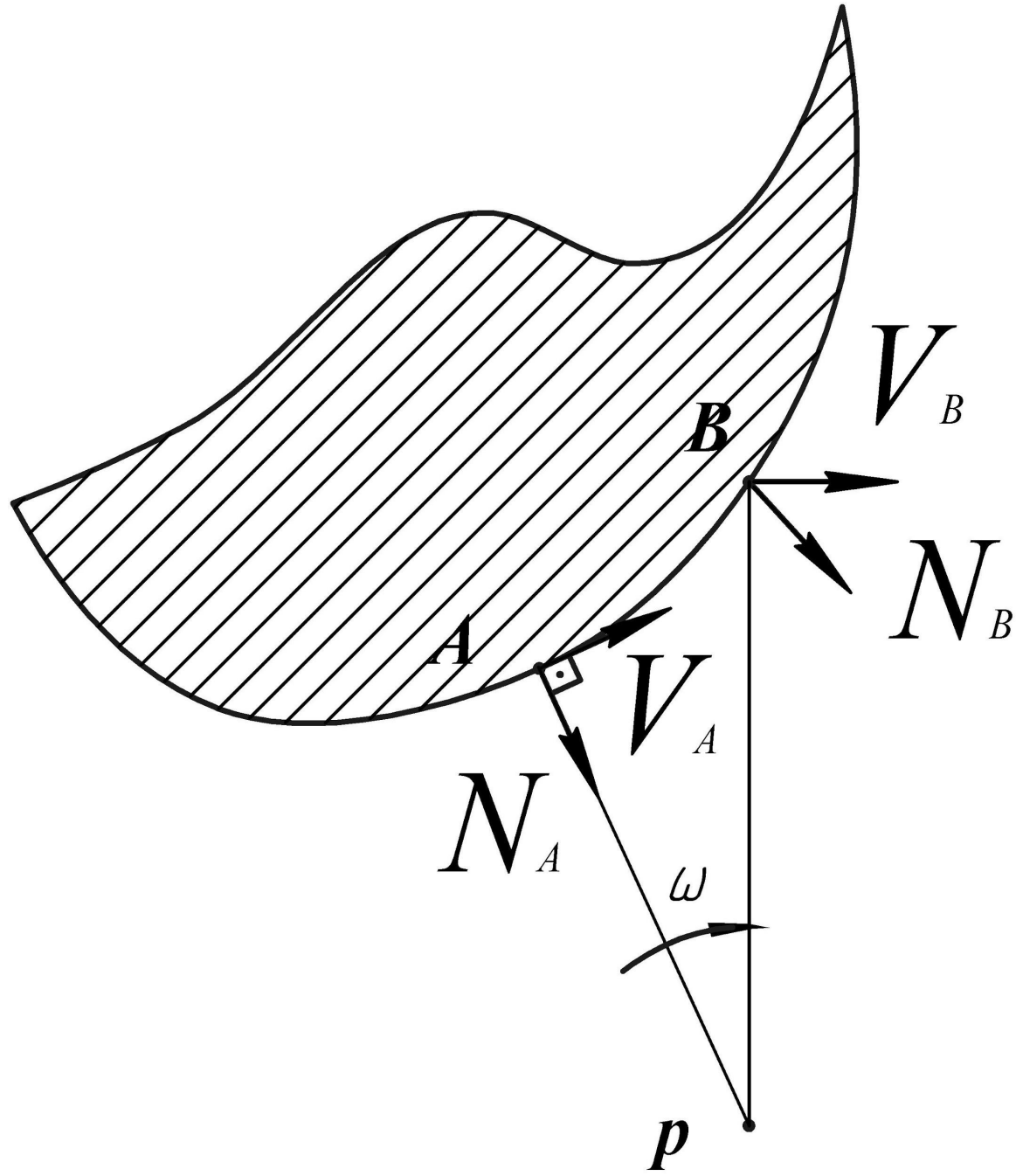


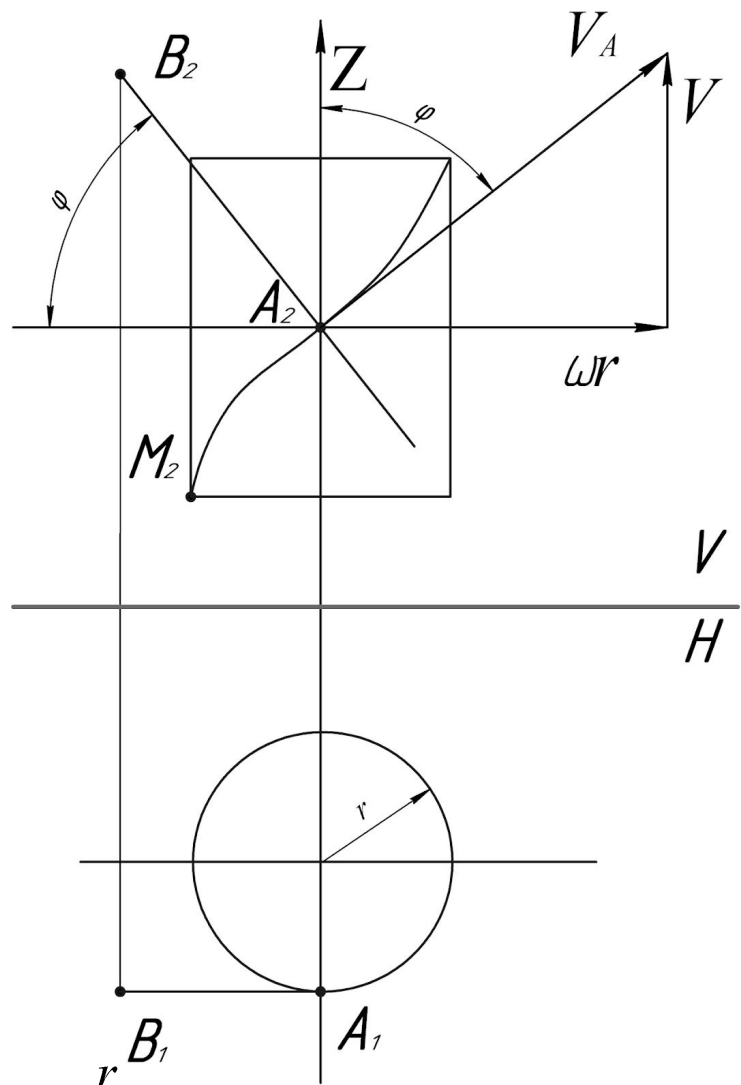
Кінематичний метод визначення огинаючої сімейства поверхонь



$$\vec{N} \cdot \vec{V} = 0 \quad - \text{рівняння контакту}$$

Властивість загальних нормалей

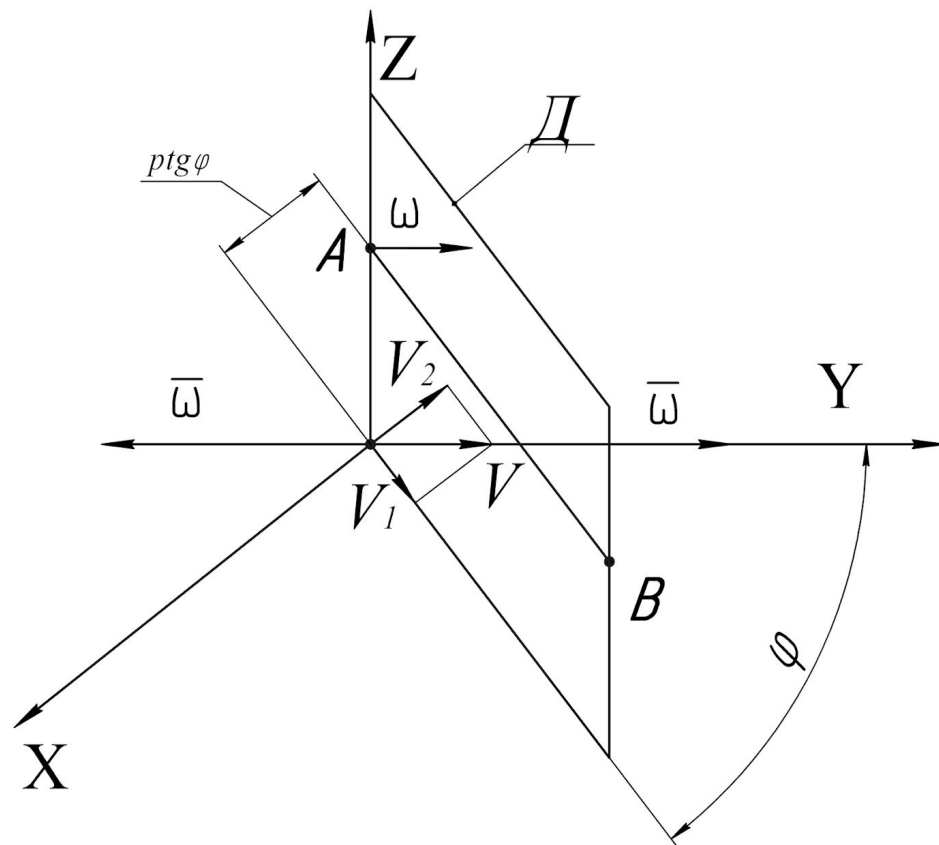




$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{p}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + [\omega \times \bar{BA}]$$

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{r_i}{p} \quad \text{- комплекс променів гвинта}$$



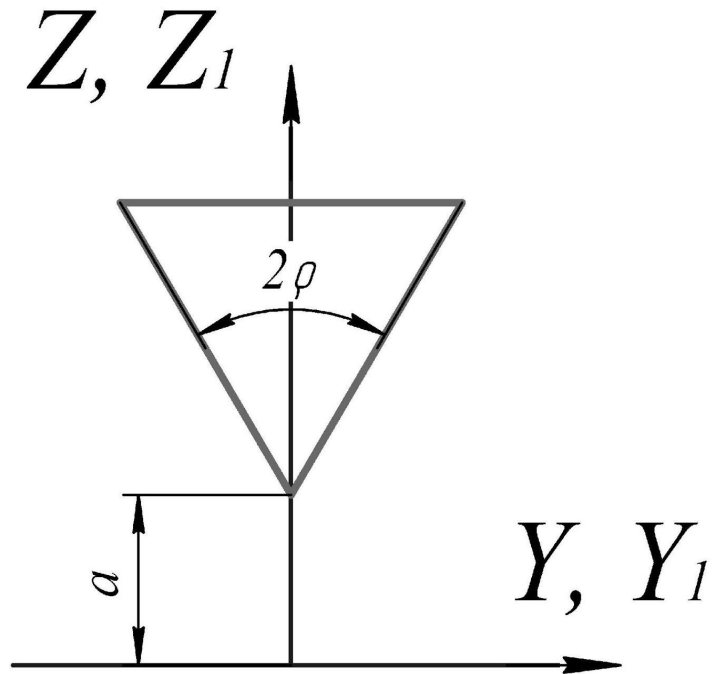
$$\bar{N} \cdot \bar{V} = \bar{N} \cdot \bar{V}_1 + \bar{N} \cdot \bar{V}_2 = 0 \Rightarrow \bar{N} \cdot \bar{V}_1 = 0;$$

$$\bar{N} \cdot \bar{V}_2 = 0;$$

$$p = \frac{V}{\omega}; \quad \bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2;$$

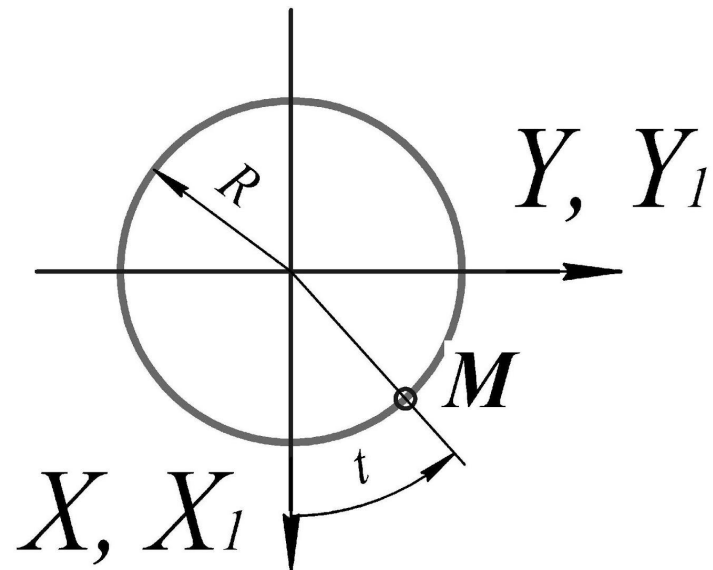
$$l = \frac{V_2}{\omega} = \frac{V \operatorname{tg}\varphi}{\omega} = p \operatorname{tg}\varphi$$

Приклад 5 Визначення огинаючої при її гвинтовому русі поверхні конуса



$$\bar{r} = x(l, \tau) \bar{i} + y(l, \tau) \bar{j} + z(l, \tau) \bar{k};$$

$$\bar{A} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial l}; \quad \bar{B} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \tau}; \quad \Rightarrow \bar{N} = \bar{A} \times \bar{B};$$



$$\bar{N} \cdot \bar{V} = ([\bar{A} \times \bar{B}] \cdot \bar{V}) = 0;$$

Рівняння поверхні конуса та
Дотичних до цієї поверхні;

$$\bar{r} = l \cos \tau \bar{i} + l \sin \tau \bar{j} + (l \operatorname{ctg} \rho + a) \bar{k};$$

$$\bar{A} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial l} = \cos \tau \bar{i} + \sin \tau \bar{j} + \operatorname{ctg} \rho \bar{k};$$

$$\bar{B} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \tau} = -l \sin \tau \bar{i} + l \cos \tau \bar{j};$$

Вектор швидкості при
гвинтовому русі;

$$\bar{V}_{\Sigma} = \bar{V}_p + \bar{V}_{\omega};$$

$$\bar{V}_p = p \omega \bar{j};$$

$$\bar{V}_{\omega} = \omega \times \bar{r}; \quad \bar{\omega} = \omega \bar{j};$$

Вектор швидкості при гвинтовому русі

$$\bar{V}_{\Sigma} = p\omega \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ l \cos \tau & l \sin \tau & l \operatorname{ctg} \rho + a \end{vmatrix};$$

$$\bar{V}_{\Sigma} = \omega(l \operatorname{ctg} \rho + a) \bar{i} + p\omega \bar{j} + l\omega \cos \tau \bar{k};$$

Рівняння контакту

$$\bar{N} \cdot \bar{V} = ([\bar{A} \times \bar{B}] \cdot \bar{V}_{\Sigma}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -l \sin \tau & l \cos \tau & 0 \\ \cos \tau & \sin \tau & \operatorname{ctg} \rho \\ \omega(l \operatorname{ctg} \rho + a) & p\omega & -l\omega \cos \tau \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$l^2 \omega \sin^2 \tau \cos \tau + p\omega l \sin \tau \operatorname{ctg} \rho + l^2 \omega \cos^2 \tau \cos \tau + \omega l(l \operatorname{ctg} \rho + a) \operatorname{ctg} \rho \cos \tau = 0$$

$$(/ \omega l \operatorname{ctg} \rho) \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{l}{p \sin \rho \cos \rho} - \frac{a}{p};$$

Характеристика

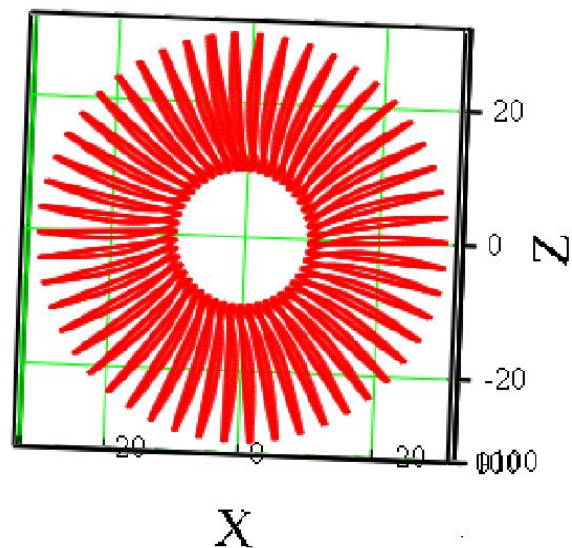
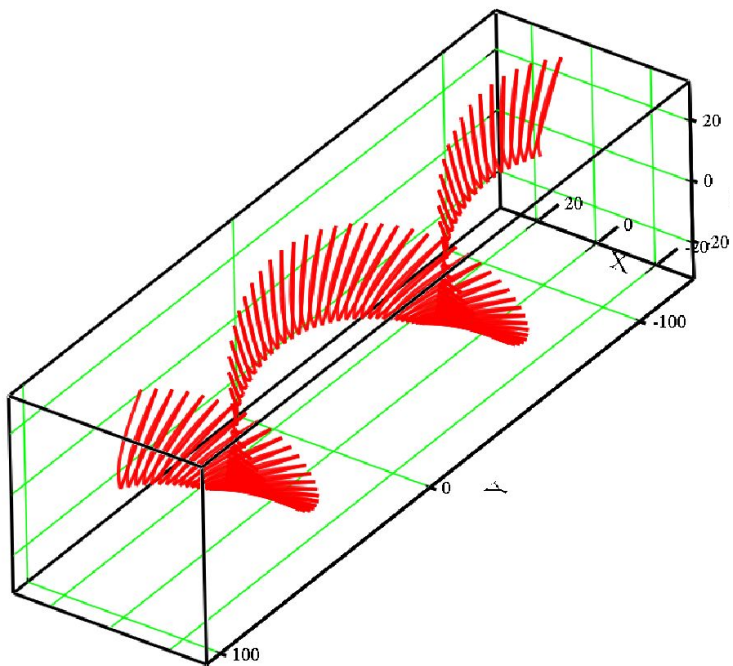
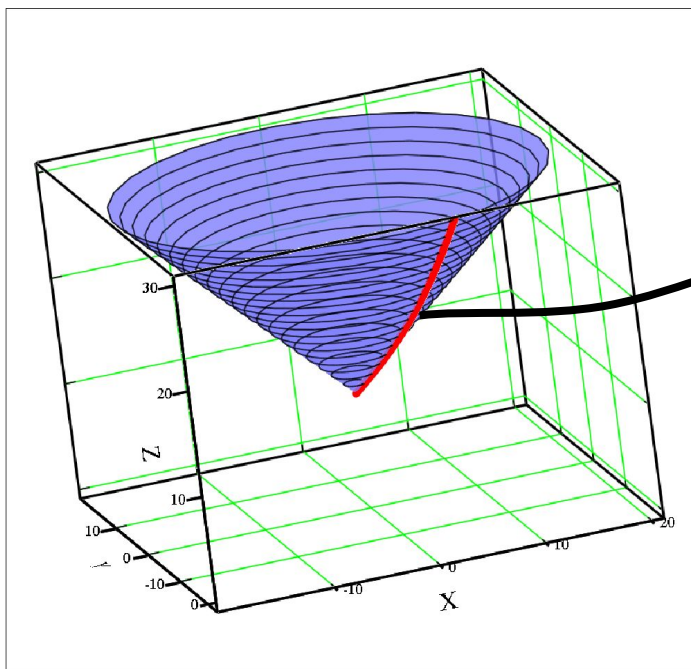
$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{l}{p \sin \rho \cos \rho} - \frac{a}{p};$$

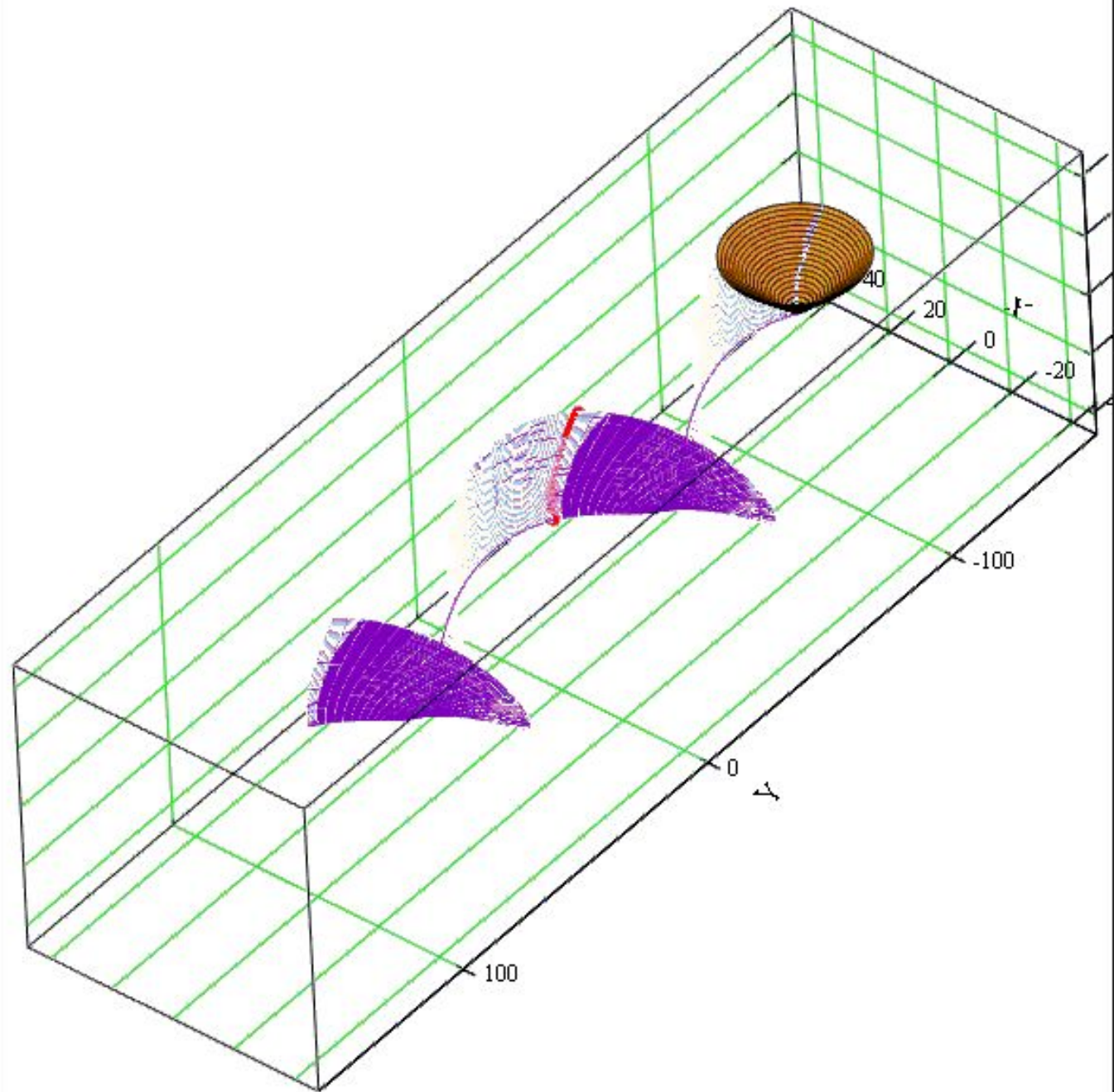
Рух характеристики при гвинтовому русі

$$X_1 = X \cos t + Z \sin t$$

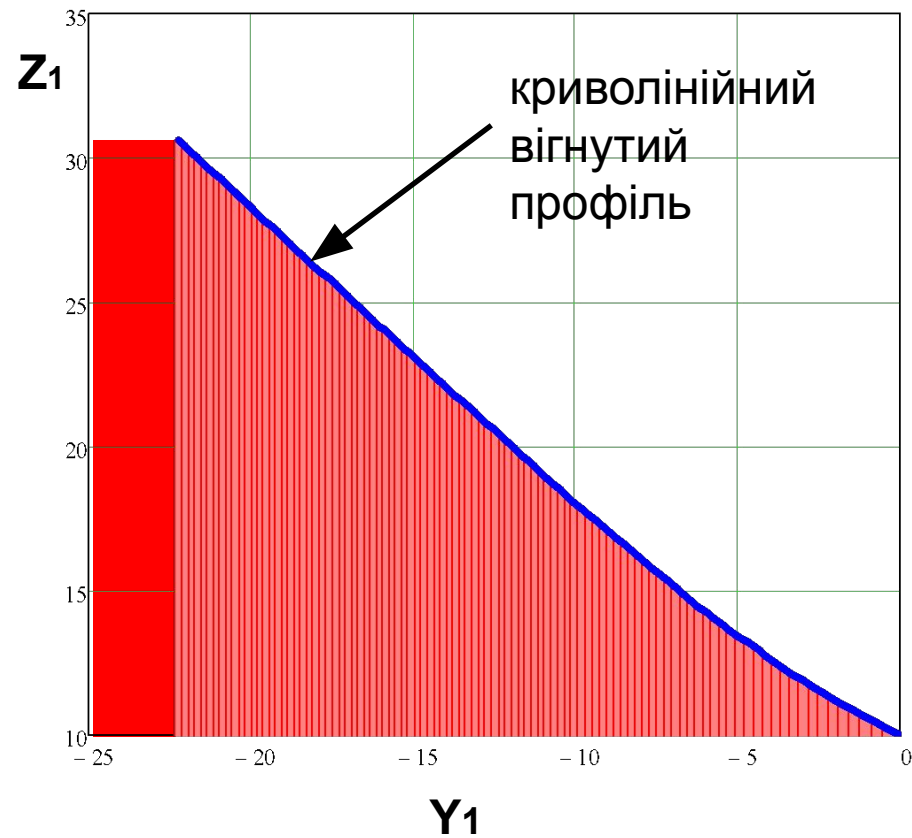
$$Y_1 = Y + pt$$

$$Z_1 = Z \cos t - X \sin t$$





Осьовий переріз огинаючої (огинаюча – гвинтова поверхня)



$$X_1 = 0 \Rightarrow$$

$$X_1 = X \cos t + Z \sin t = 0 \Rightarrow$$

$$\text{tgt} = \frac{-X}{Z} = \frac{-l \cos \tau}{l \operatorname{ctg} \rho + a};$$

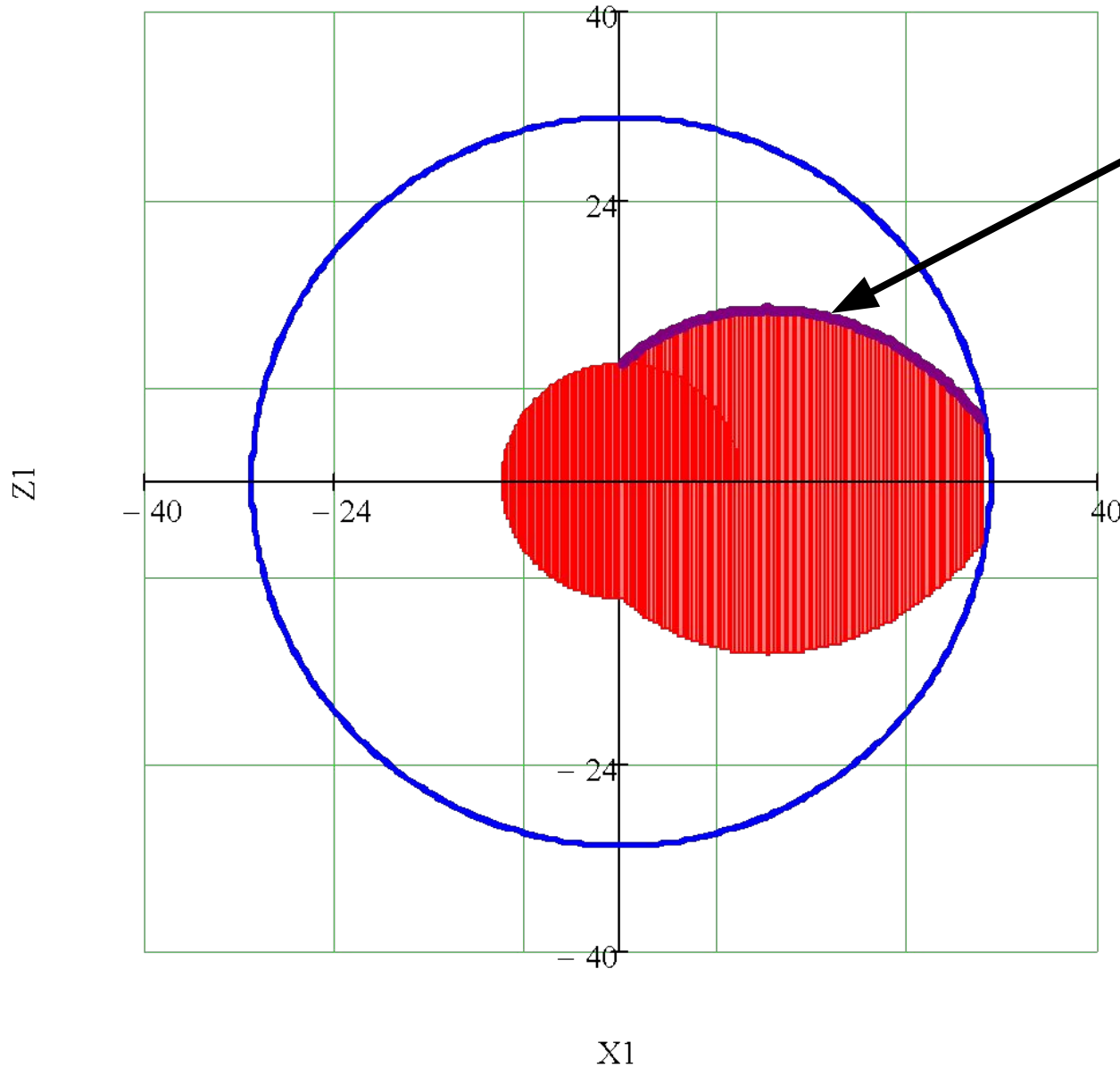
$$\text{tg}\tau = -\frac{l}{p \sin \rho \cos \rho} - \frac{a}{p};$$

$$Y_1 = Y + pt = l \sin \tau + pt$$

$$Z_1 = (l \operatorname{ctg} \rho + a) \cos t - l \cos \tau \sin t$$

Торцевий переріз огиначаючої
(огиначаюча – гвинтова поверхня)

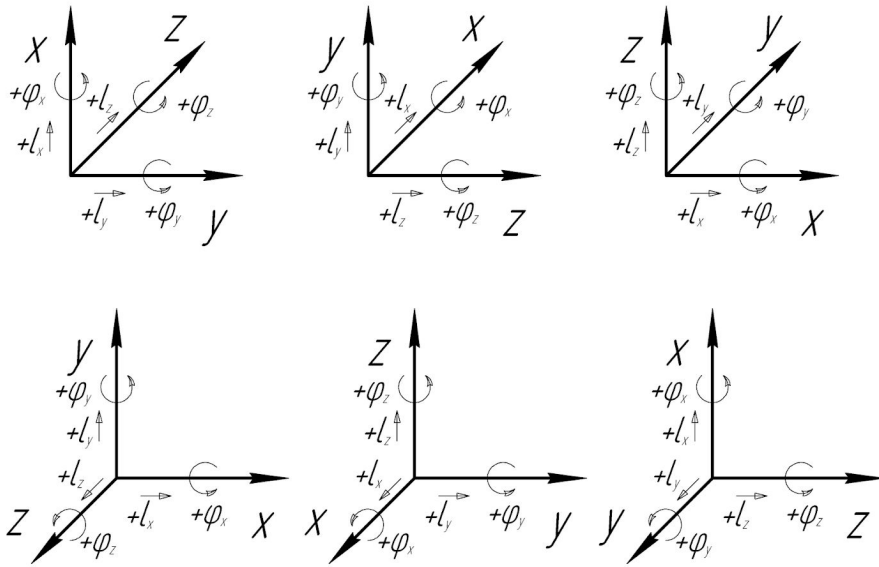
$$Y_1 = 0$$



торцевий
переріз
огиначаючої
гвинтової
поверхні

Матриці афінних та координатних перетворень. $v_x, v_y, v_z, c_x, c_y, c_z$.

Праві системи координат.



Матриці афінних перетворень

$$m_{\varphi_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m_{\varphi_y} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{\varphi_z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m_{l_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{l_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m_{l_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриці координатних перетворень

Стара система координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$
 Нова система координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$
 Перехід від $S_1 \rightarrow S_2$ $m_{r2} = m_{vz21} m_{r1}$

$$m_{r1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \text{Радіус вектор точки в старій системі координат } (S_1)$$

$$m_{v_{x21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v_{x21} & \sin v_{x21} & 0 \\ 0 & -\sin v_{x21} & \cos v_{x21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{поворот навколо осі } x_1 \text{ проти годинникової стрілки на кут } v_{x21}$$

$$m_{v_{y21}} = \begin{pmatrix} \cos v_{y21} & 0 & -\sin v_{y21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin v_{y21} & 0 & \cos v_{y21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{поворот навколо осі } y_1 \text{ проти годинникової стрілки на кут } v_{y21}$$

$$m_{v_{z21}} = \begin{pmatrix} \cos v_{z21} & \sin v_{z21} & 0 & 0 \\ -\sin v_{z21} & \cos v_{z21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{поворот навколо осі } z_1 \text{ проти годинникової стрілки на кут } v_{z21}$$

$$m_{c_{21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{x21} \\ 0 & 1 & 0 & c_{y21} \\ 0 & 0 & 1 & c_{z21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{координати центра старої системи координат } S_1 \text{ в новій системі } S_2$$

