

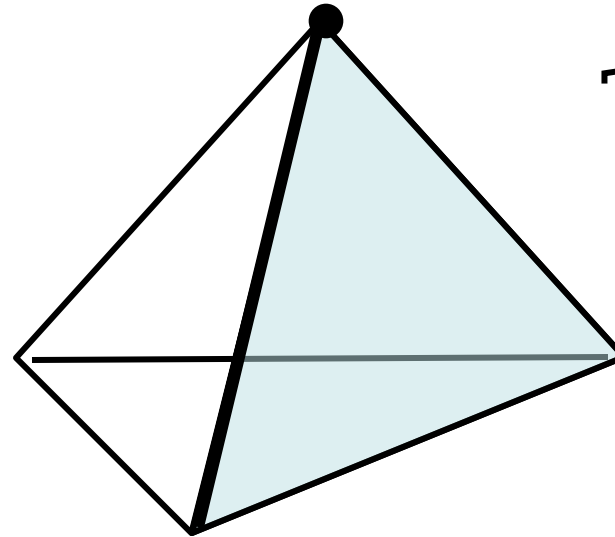
Построение сечений многогранников

Геометрические понятия

- Плоскость – грань
- Прямая – ребро
- Точка – вершина

┌
└───
вершина

┌
└───
грань



┌
└───
ребро

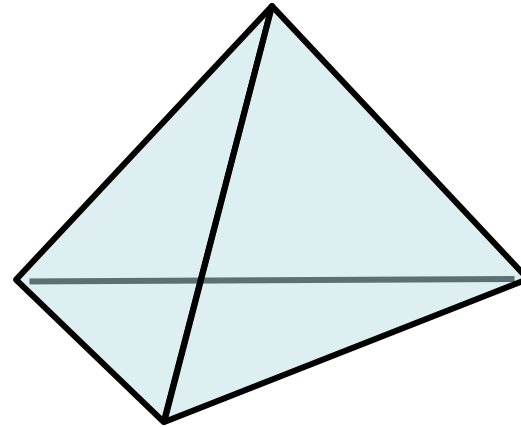
Многогранники

- Тетраэдр

4 грани

3 вершины

6 рёбер

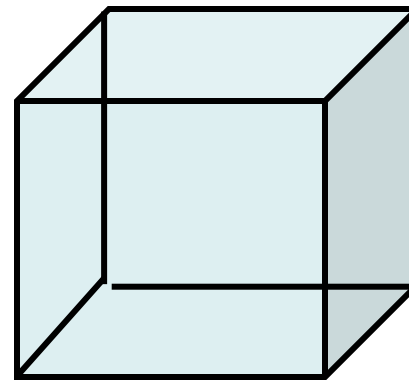


- Параллелепипед

6 граней

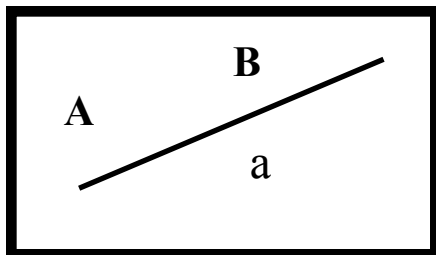
8 вершин

12 рёбер



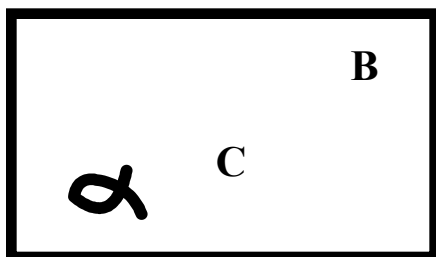
1. Аксиомы стереометрии

A1



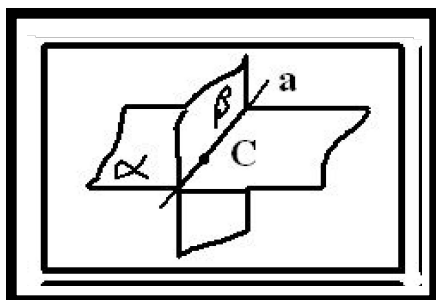
Через две точки A и B можно провести прямую и притом только одну.

A2



Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

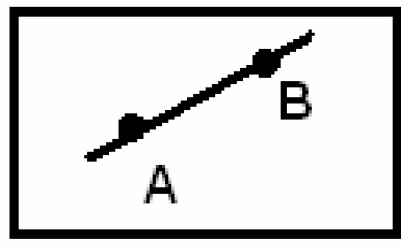
A3



Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

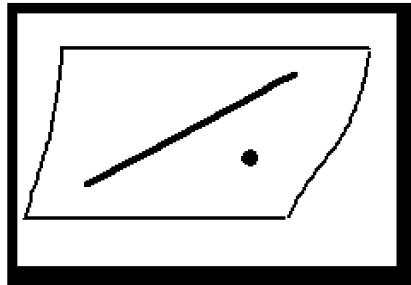
2. Следствия из аксиом стереометрии

Сл1



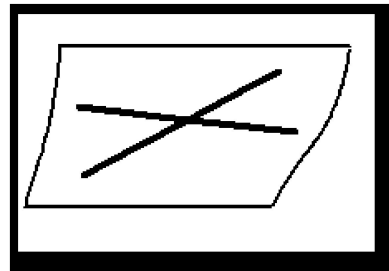
Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.

Сл2



Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и при том только одну.

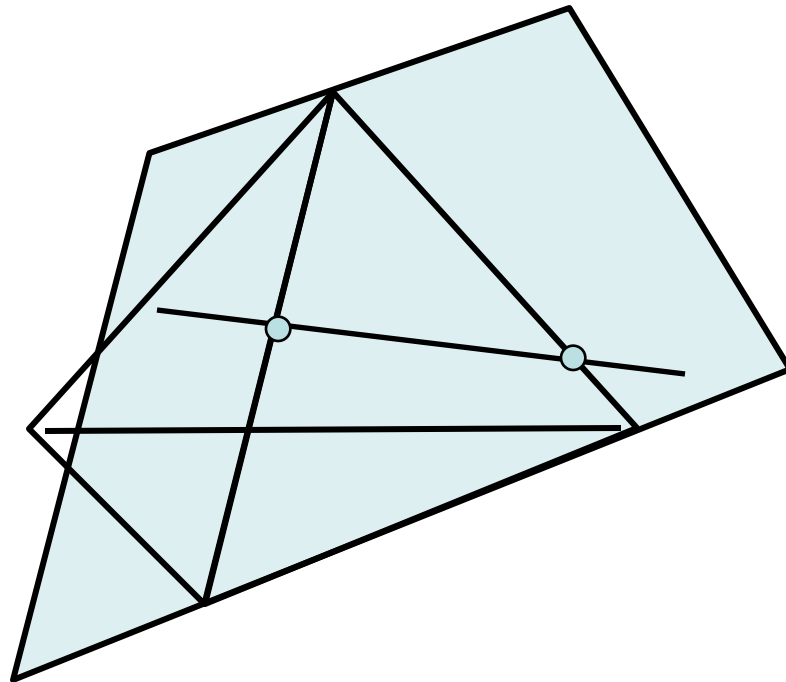
Сл3



Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и при том только одну.

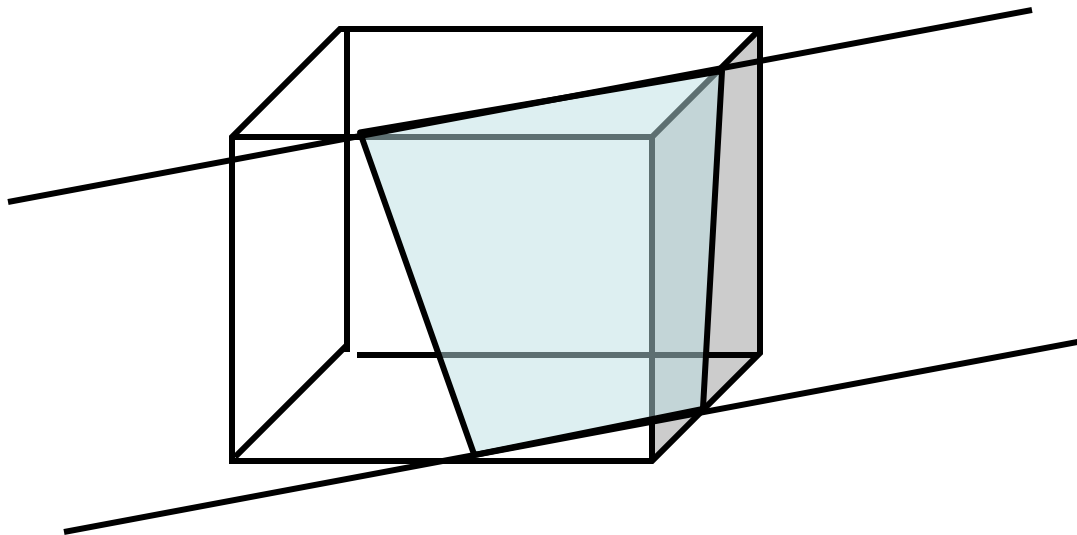
Геометрические утверждения

- Если две точки одной прямой лежат в плоскости, то и **вся прямая лежит в этой плоскости.**



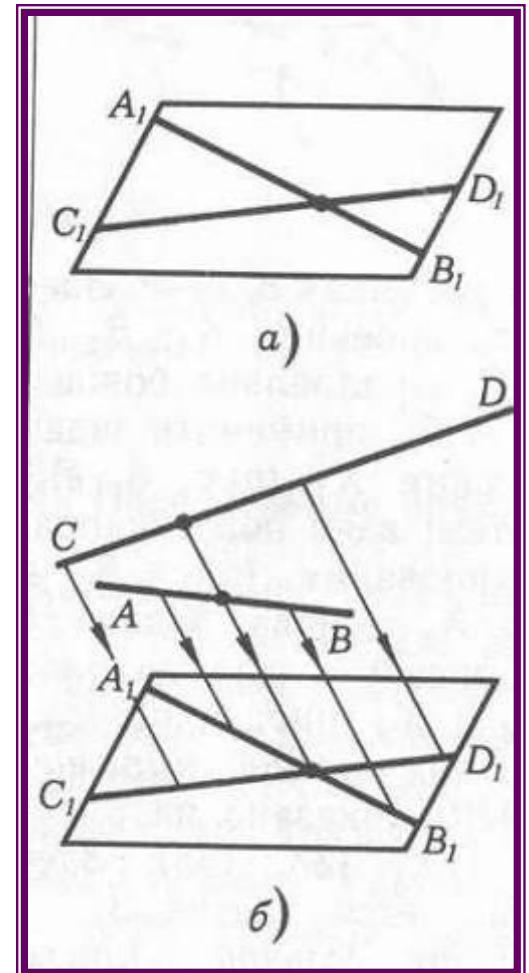
Геометрические утверждения

- Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то **линии их пересечения параллельны.**



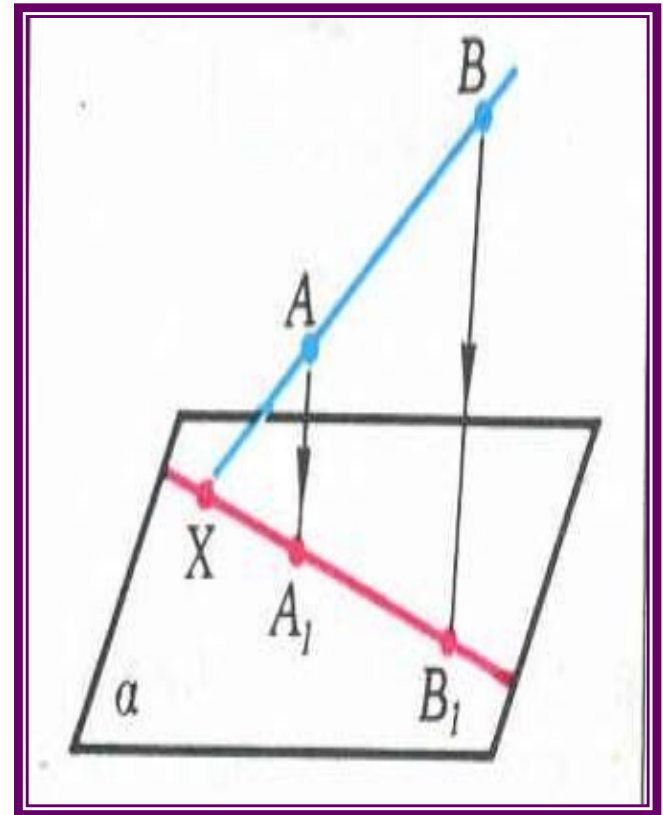
Пересечение двух пересекающихся прямых

найти легко: точка, в которой они пересекаются на чертеже, и есть изображение их точки пересечения в пространстве.



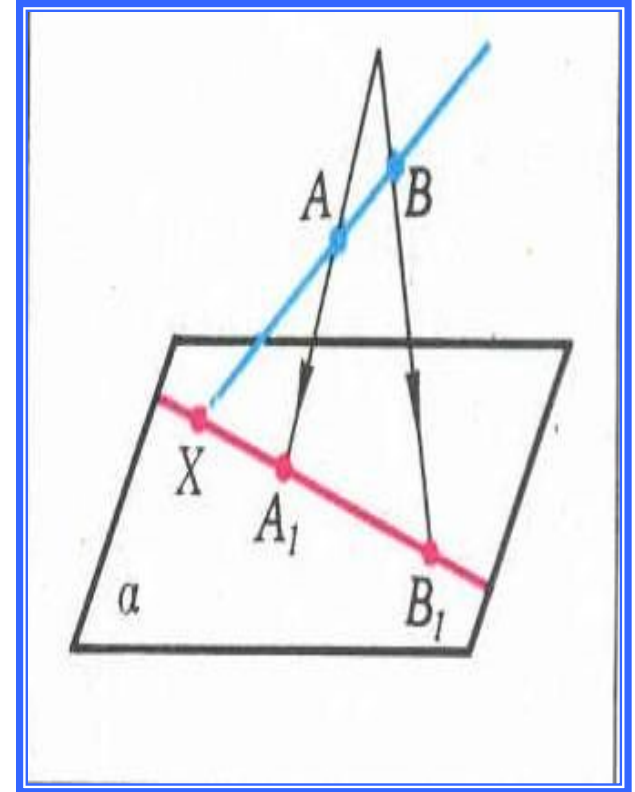
Параллельное проецирование

Если известны параллельные проекции A_1 , B_1 точек A и B на данную плоскость α , то найдем точку пересечения прямых AB и A_1B_1 . Это и будет искомая точка пересечения прямой AB и плоскости α .



Центральное проектирование

Пересечение прямой AB и плоскости α легко найти, если даны точки A_1, B_1 пересечения с плоскостью α двух пересекающихся прямых, проходящих через точки A, B соответственно.



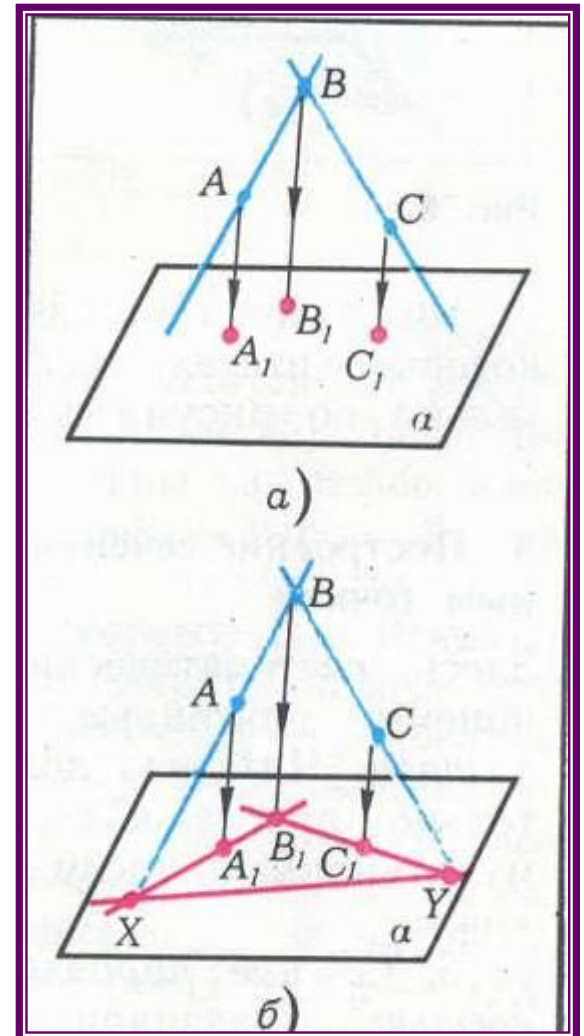
Пересечение двух плоскостей

Линию пересечения плоскостей ABC и α найдем следующим образом:

а) спроектируем точки A , B и C на плоскость α ;

в) найдем точки пересечения прямых AB и BC с их проекциями;

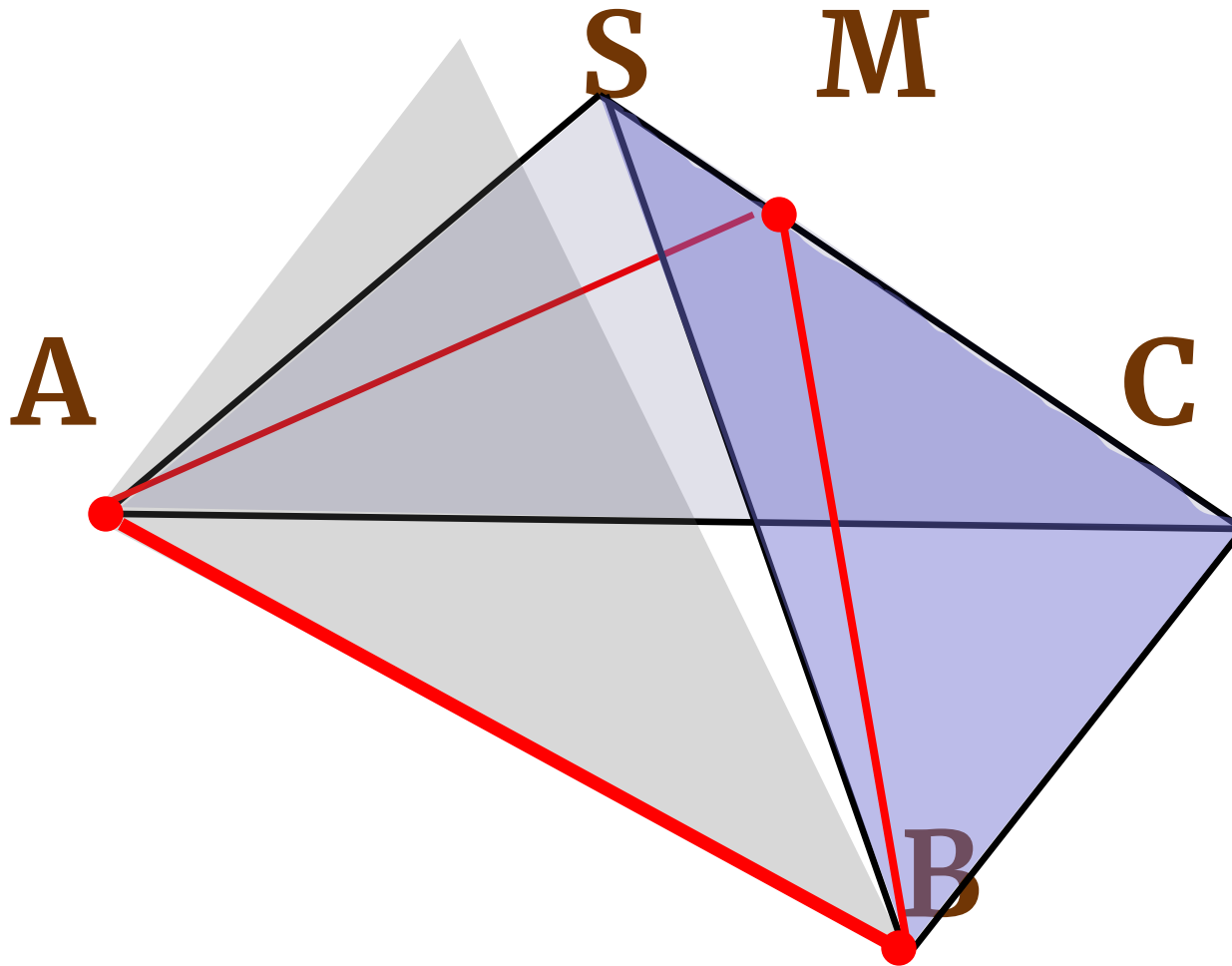
с) прямая XU - искомая.



Опорные задачи:

- Задача на нахождение **двух точек** искомой прямой
- Задача на построение **точки** пересечения прямой и плоскости
- Задача на построение **линии** пересечения двух плоскостей

Задача №1. В треугольной пирамиде $SABC$ построить сечение плоскостью, проходящей через сторону AB и точку M , лежащую на боковом ребре SC .



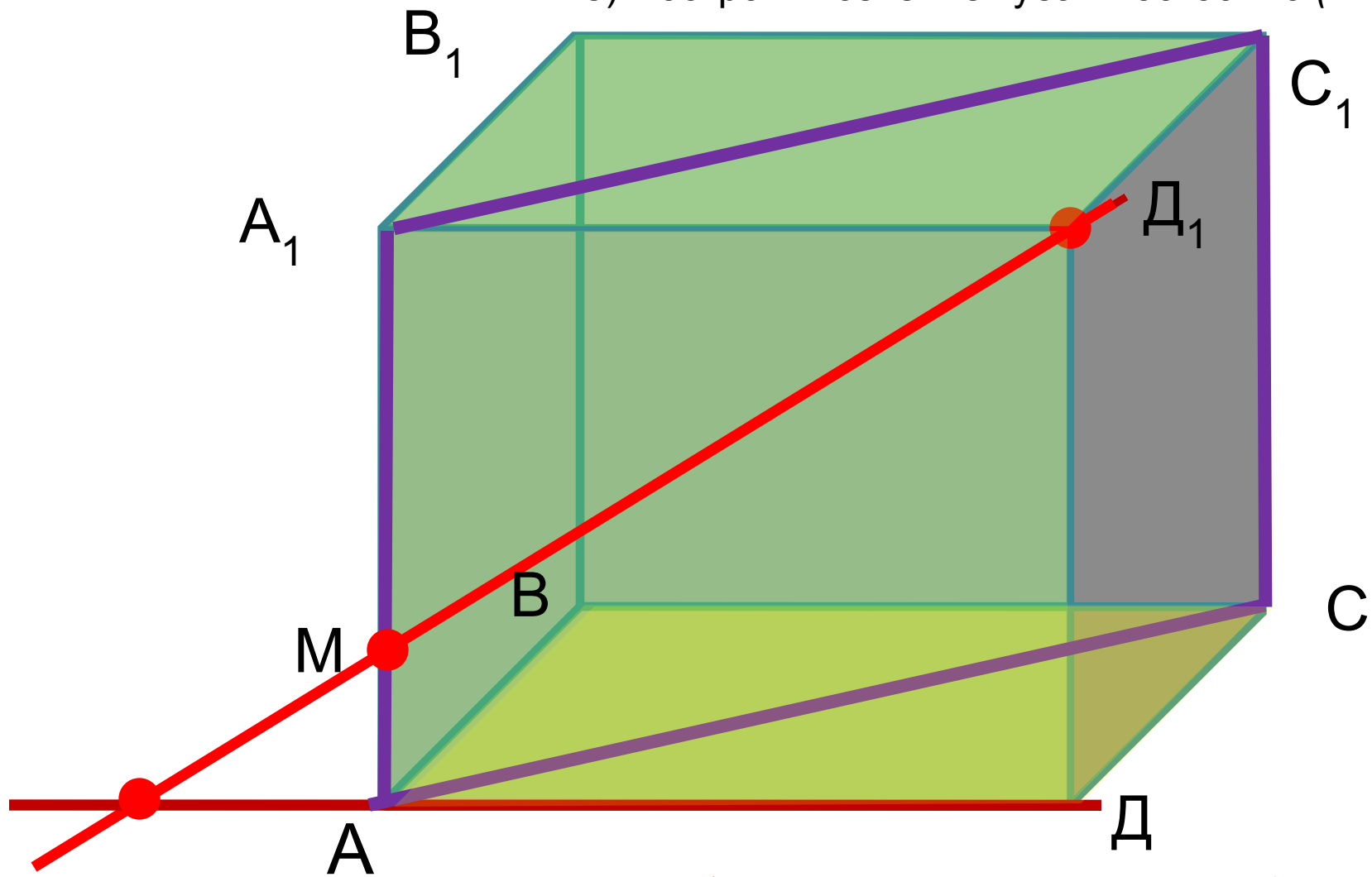
Автоматический показ анимации!

Задача №2.

Точка M – лежит на ребре AA_1 куба.

а) Постройте точку пересечения прямой D_1M с плоскостью основания $ABCD$;

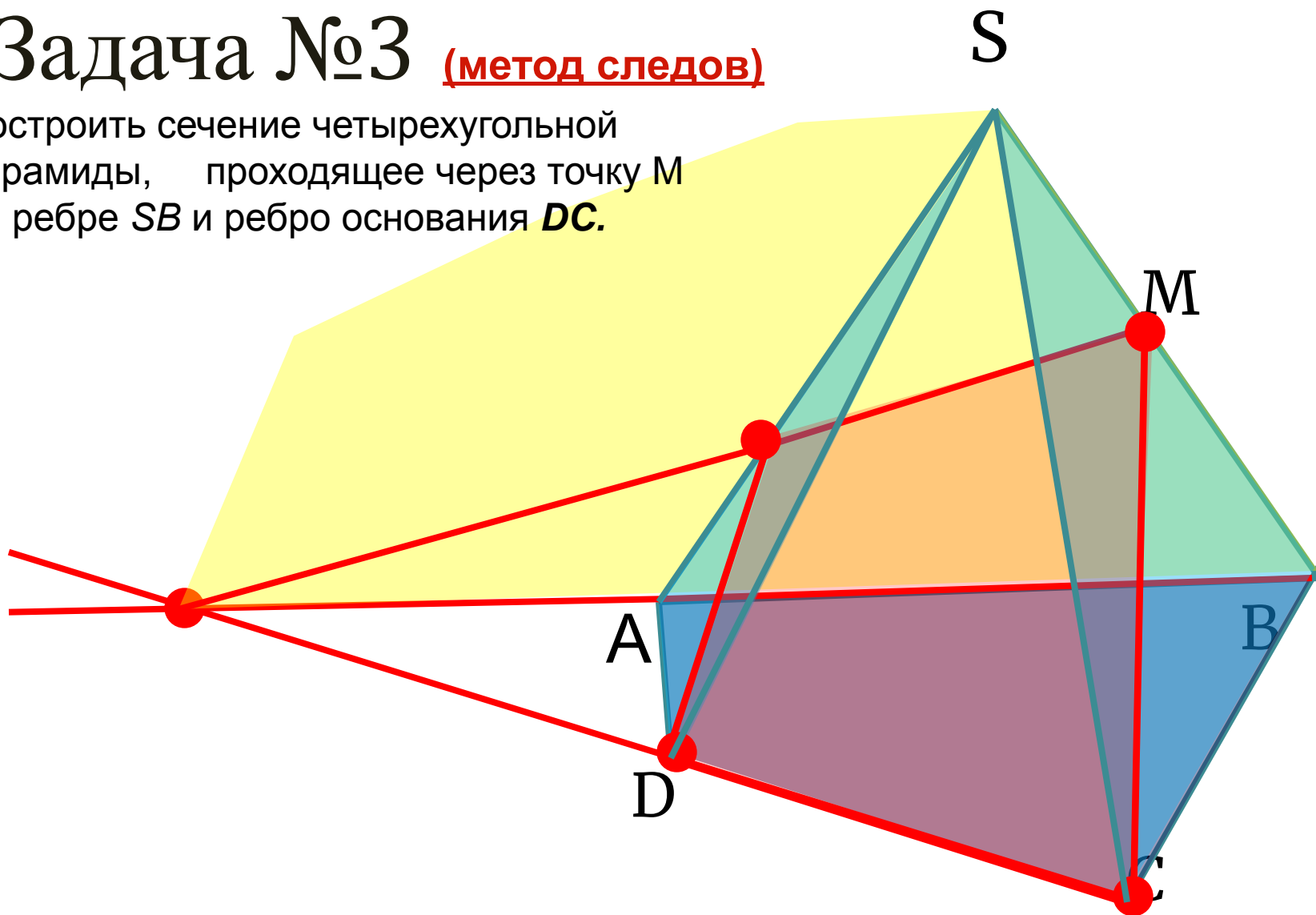
б) Построить сечение куба плоскостью (AMC) .



Автоматический показ анимации!

Задача №3 (метод следов)

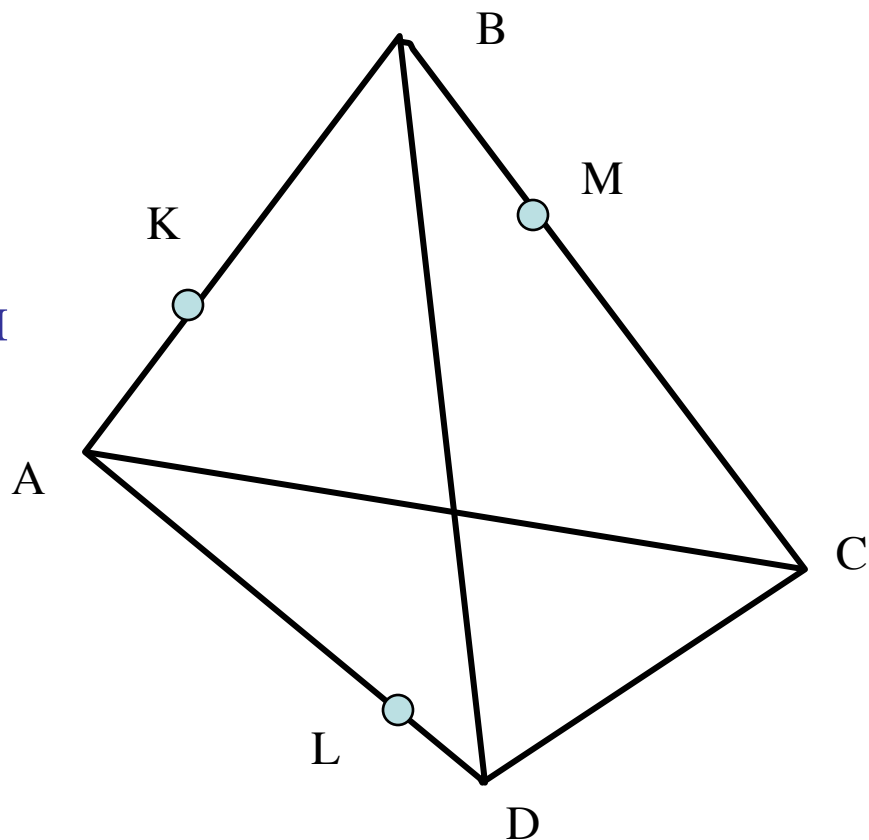
Построить сечение четырехугольной пирамиды, проходящее через точку M на ребре SB и ребро основания DC .



Автоматический показ анимации!

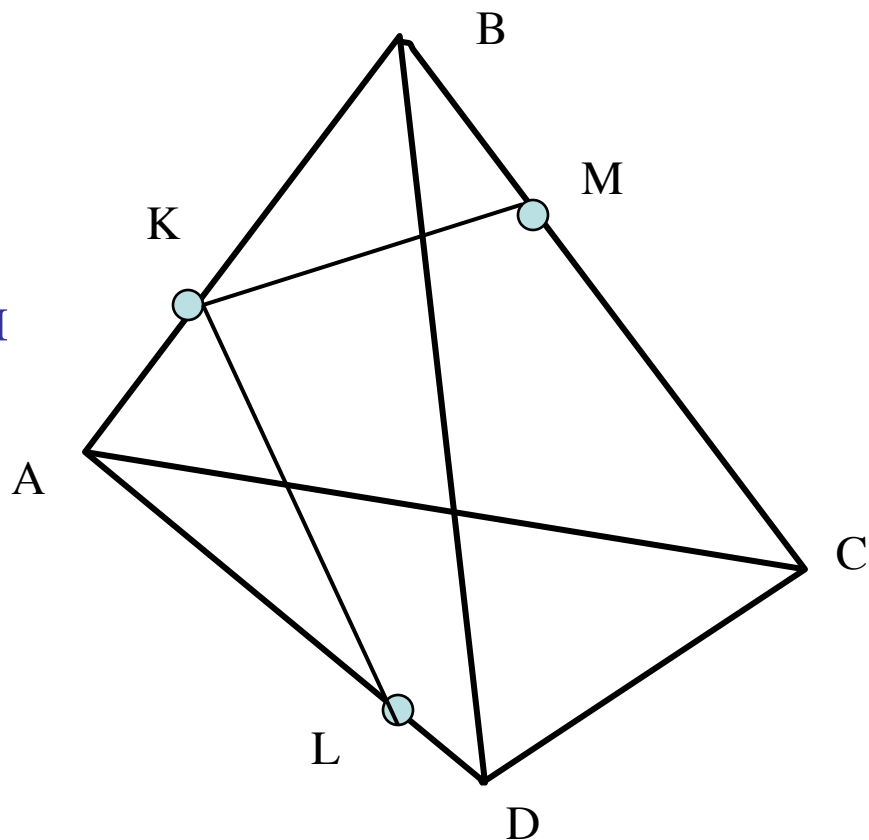
Пример.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , L , M на его ребрах.



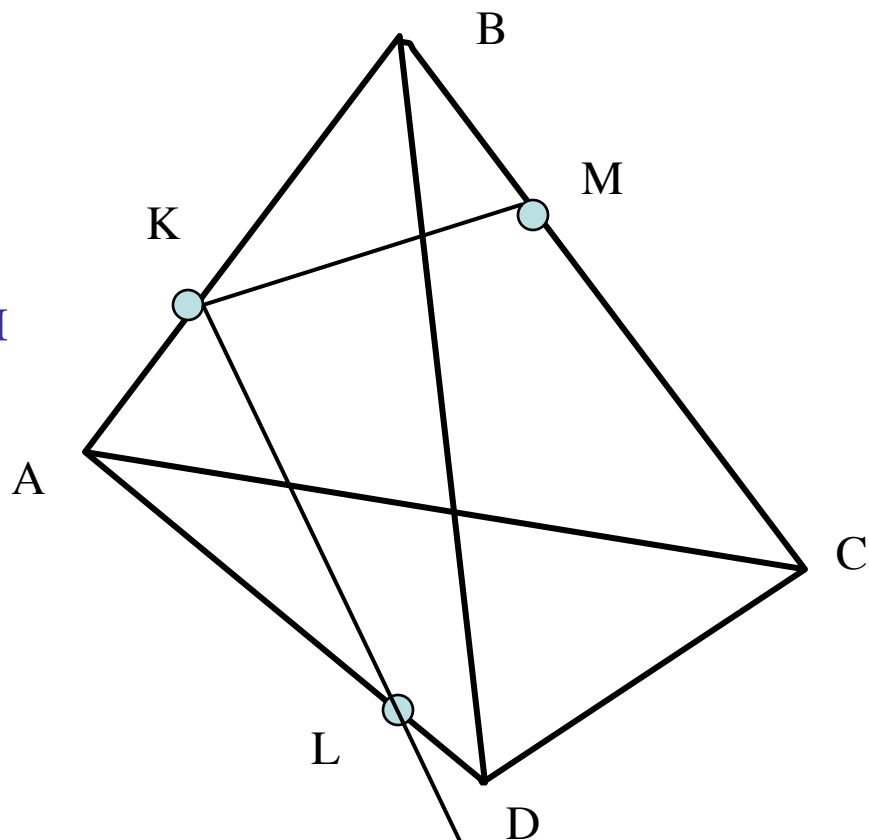
Пример.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , L , M на его ребрах.



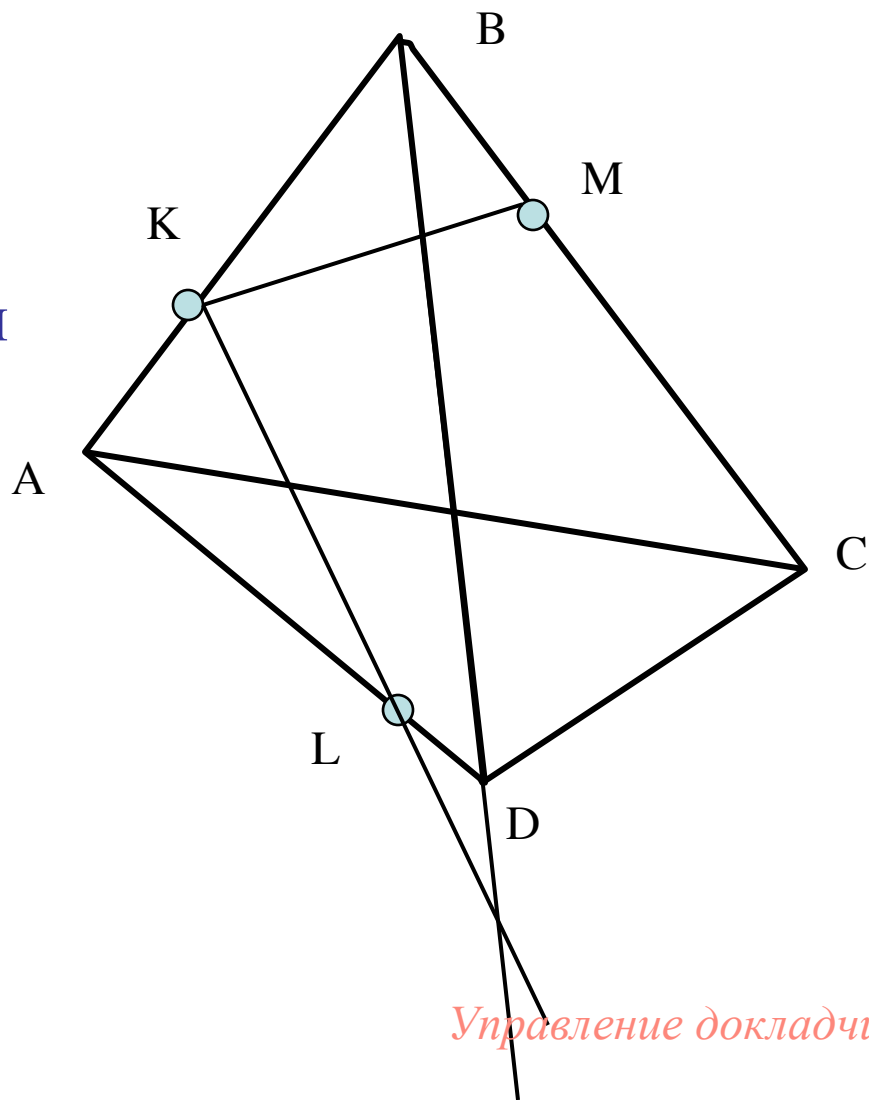
Пример.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , L , M на его ребрах.



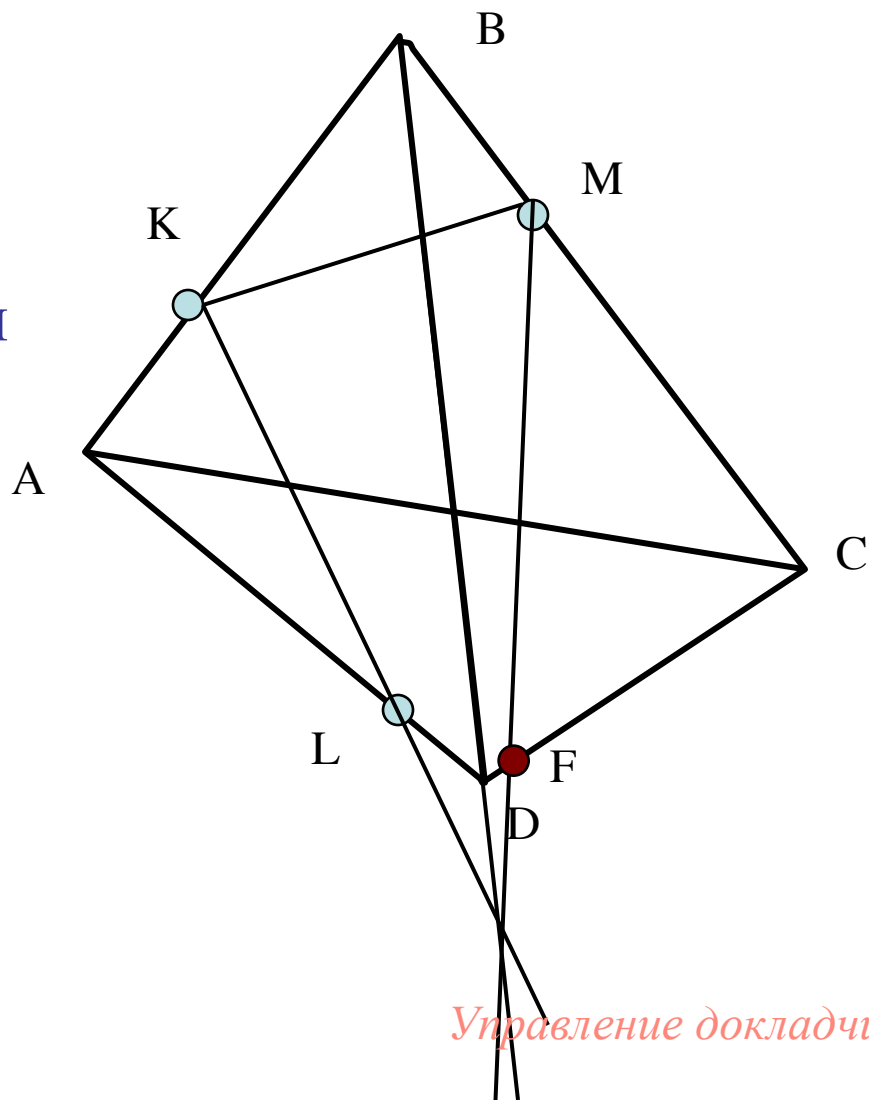
Пример.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , L , M на его ребрах.



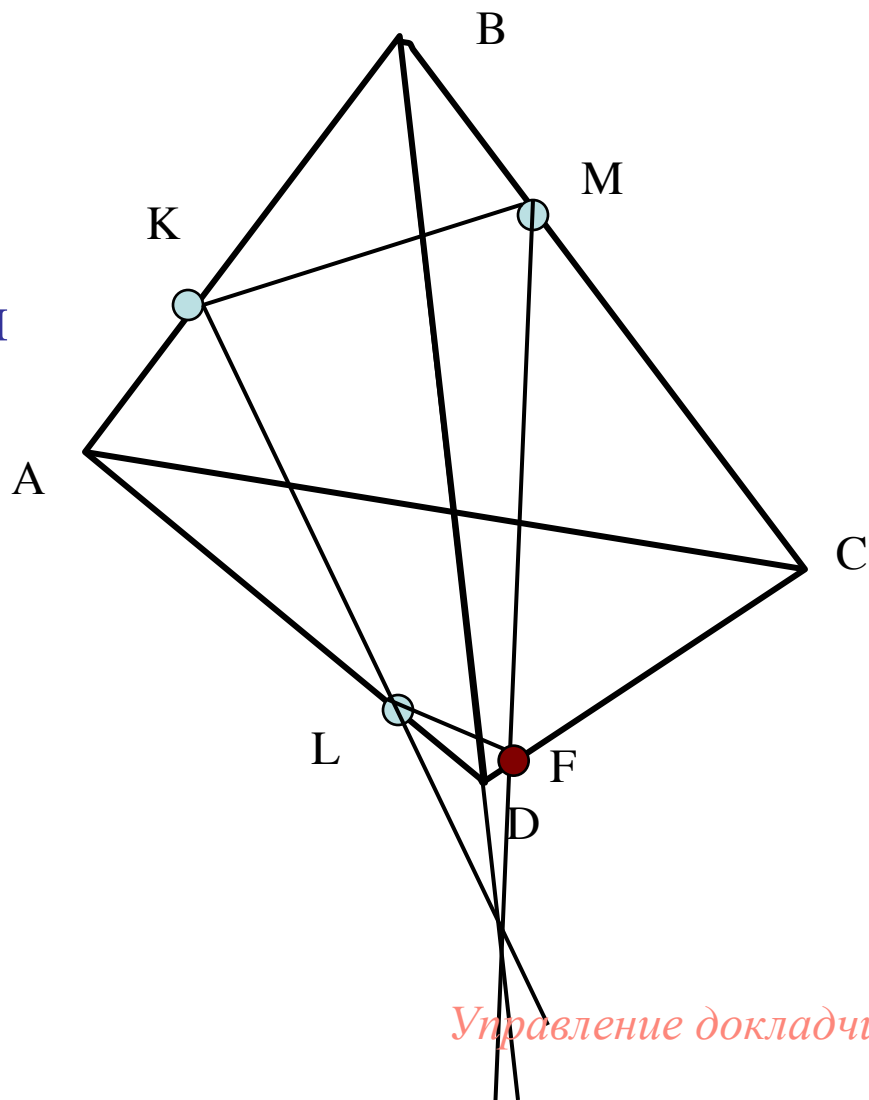
Пример.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , L , M на его ребрах.



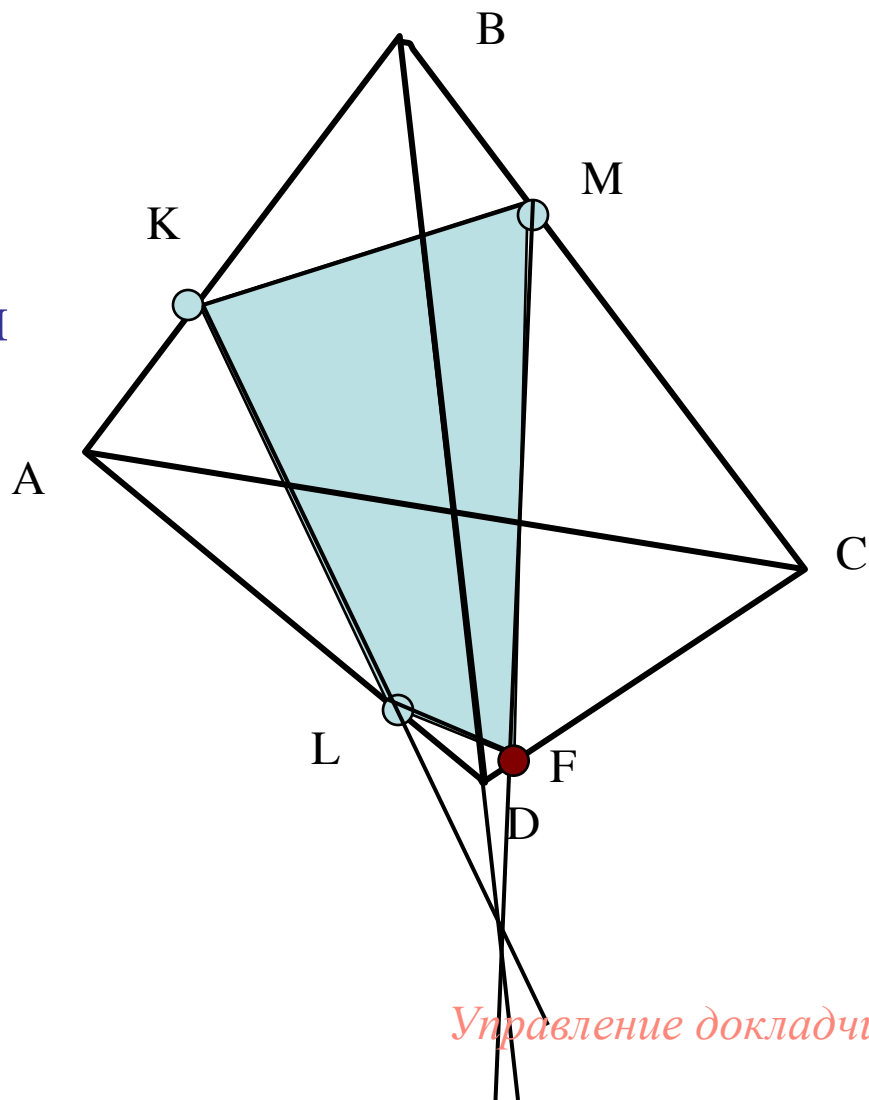
Пример.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , L , M на его ребрах.

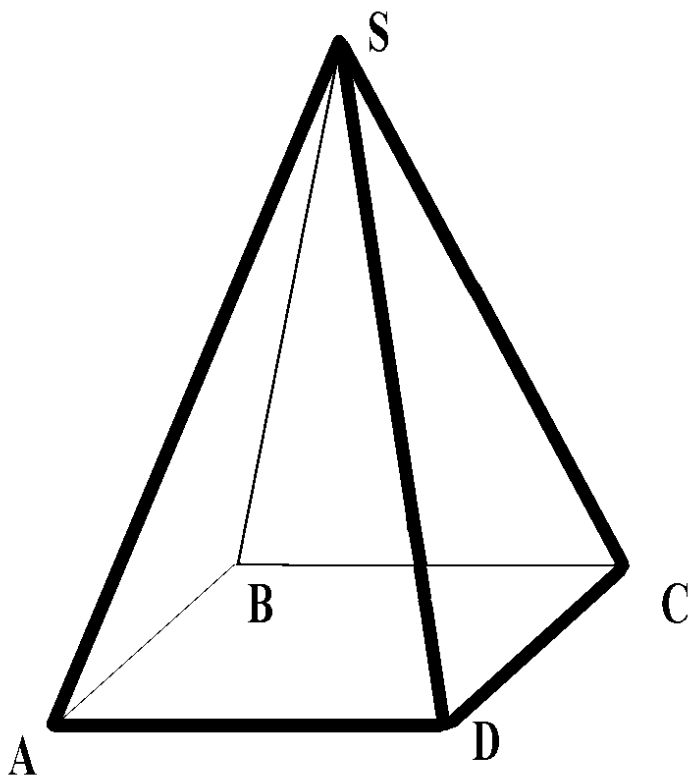


Пример.

Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K , L , M на его ребрах.

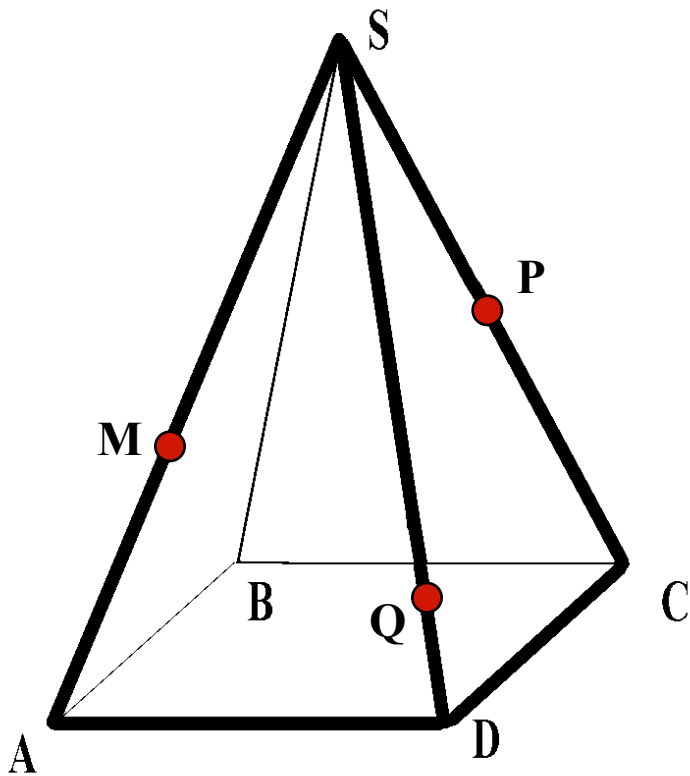


Пример.



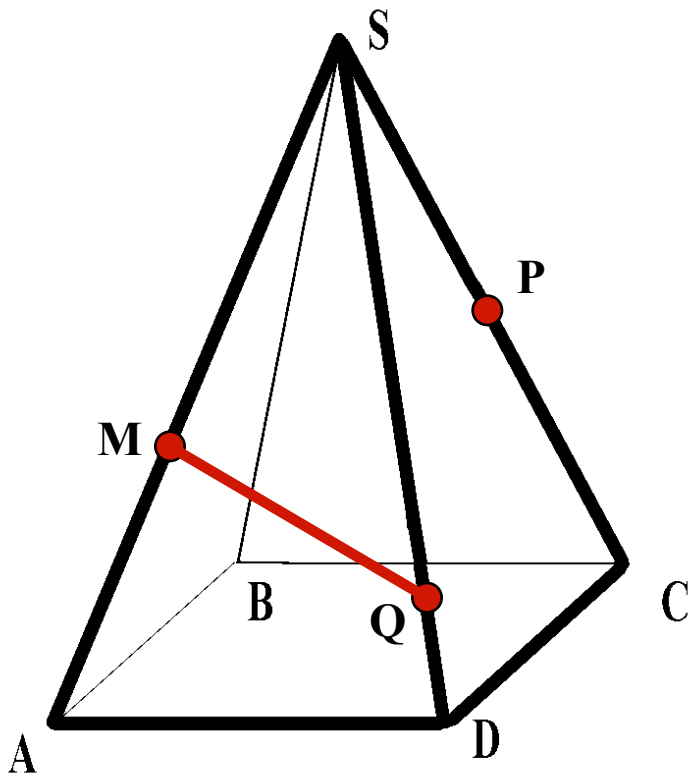
Дана пирамида SABCD.

Автоматический показ анимации!



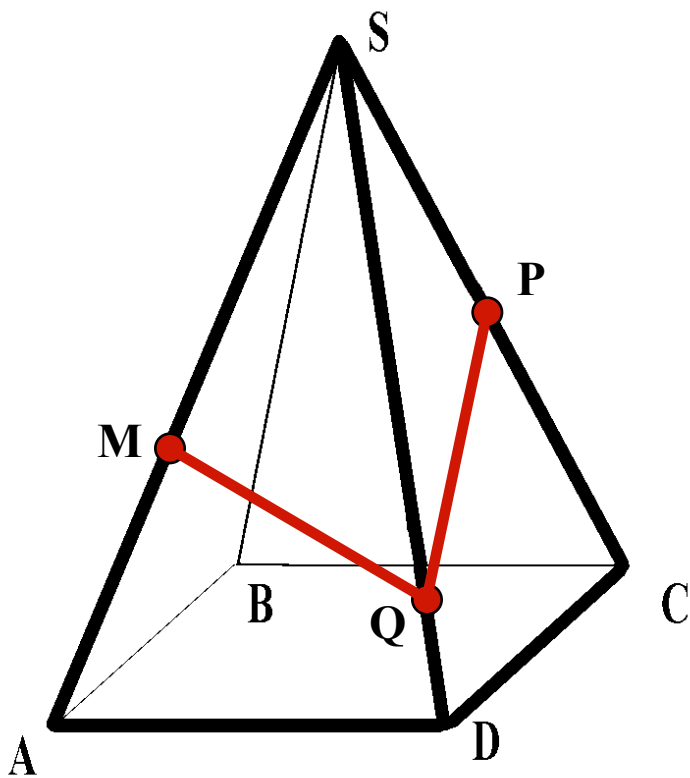
**Требуется построить сечение заданной пирамиды плоскостью, проходящей через точки:
M на ребре AS, P на ребре CS и Q на ребре DS.**

Автоматический показ анимации!



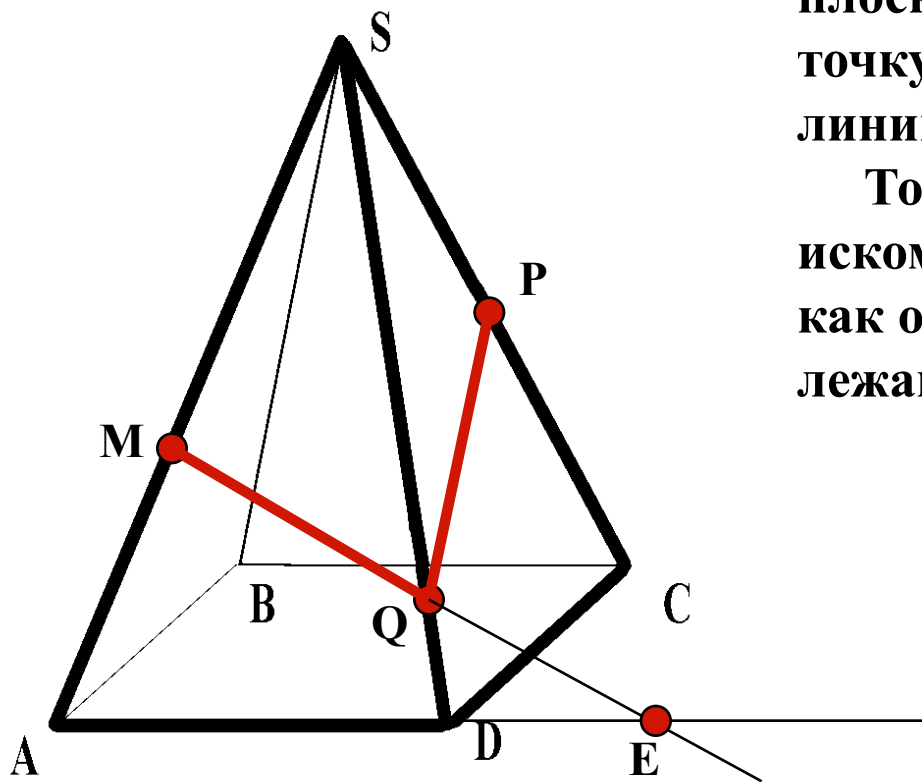
Точки М и Q лежат в плоскости грани ASD. Линия MQ, соединяющая эти точки является линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани ASD.

Автоматический показ анимации!



Линия QR, соединяющая заданные точки Q и R, является линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани DSC.

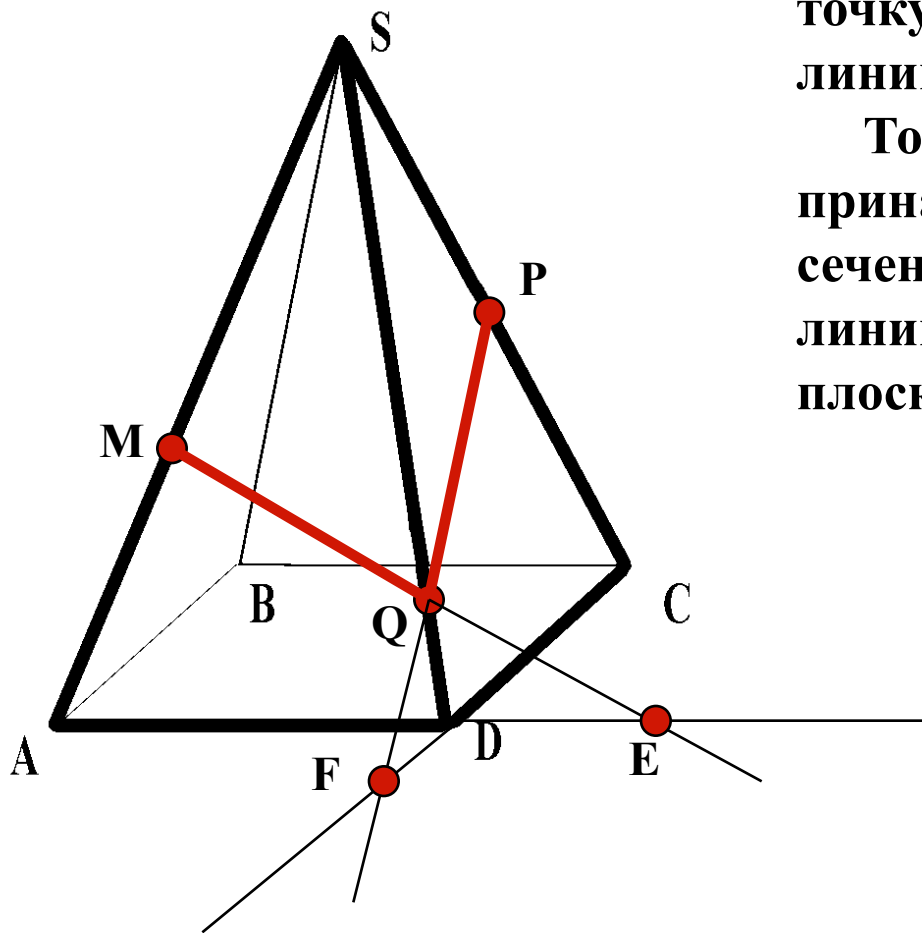
Автоматический показ анимации!



Линии MQ и AD лежат в одной плоскости грани ASD . Найдём точку E , как точку пересечения линий MQ и AD .

Точка E будет принадлежать искомой плоскости сечения, так как она принадлежит линии MQ , лежащей в этой плоскости.

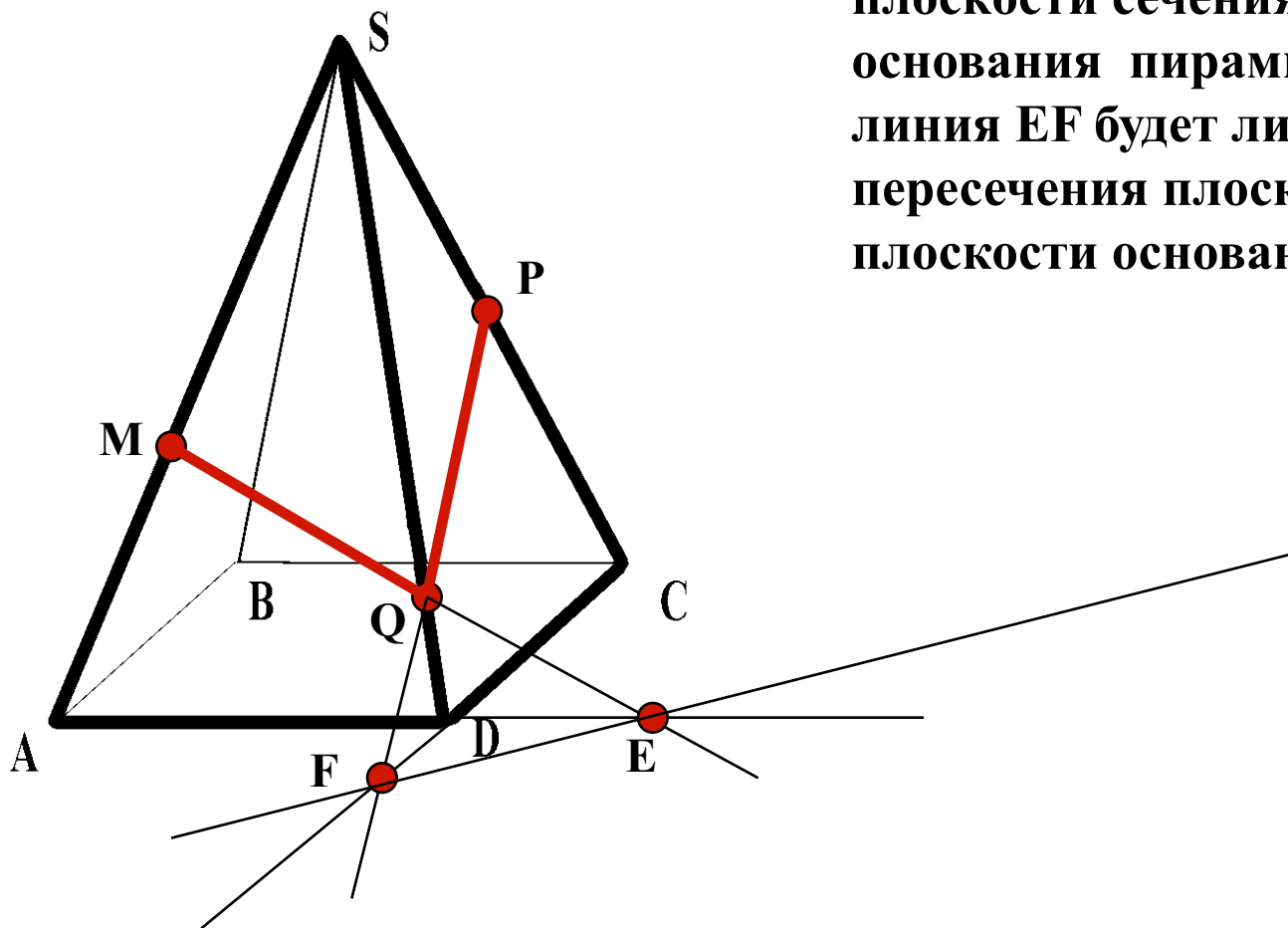
Автоматический показ анимации!



Линии PQ и CD лежат в одной плоскости грани CSD. Найдём точку F, как точку пересечения линий PQ и CD.

Точка F, как и точка E, будет принадлежать искомой плоскости сечения, так как она принадлежит линии PQ, лежащей в этой плоскости.

Автоматический показ анимации!

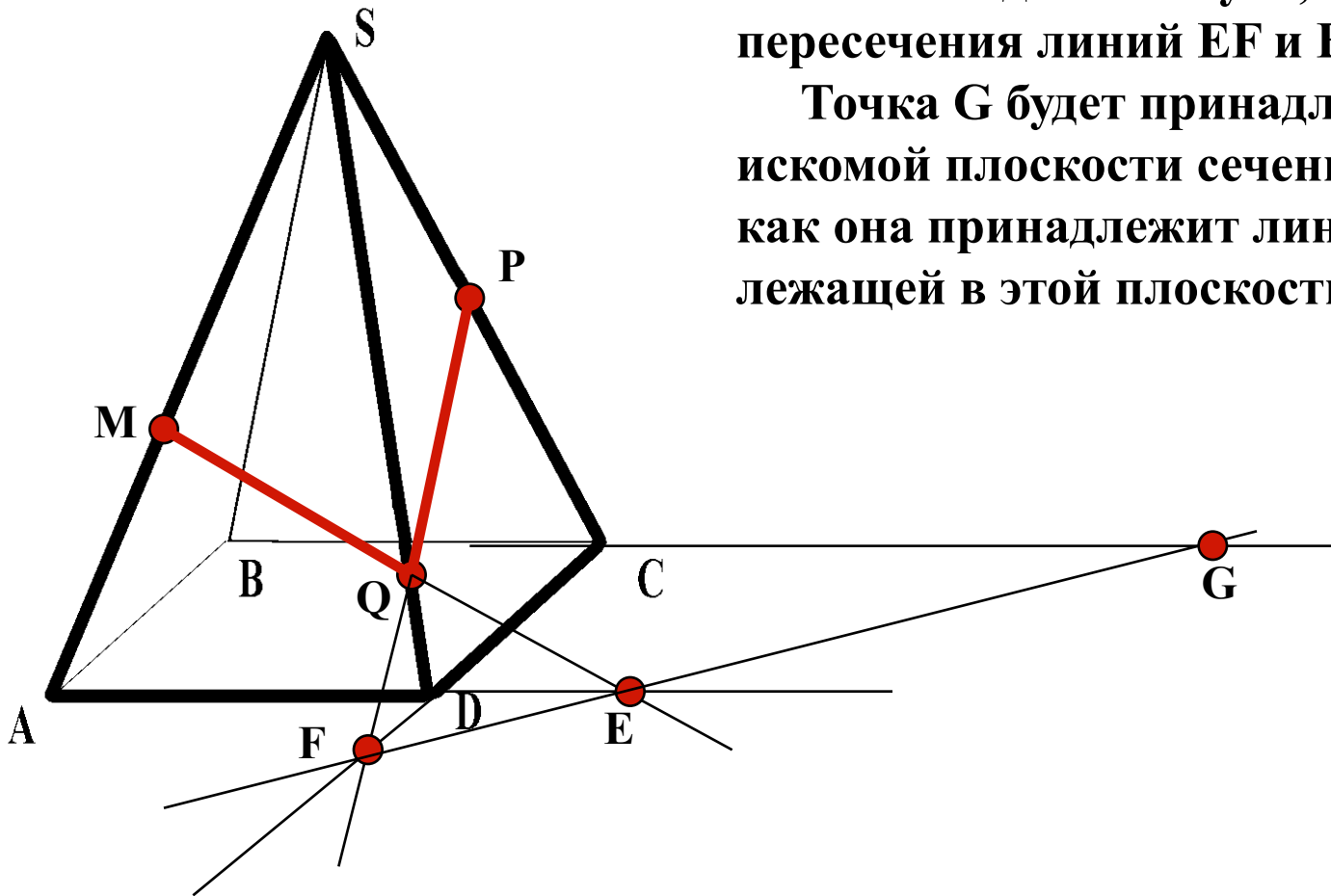


Точки E и F принадлежат плоскости сечения и плоскости основания пирамиды, поэтому линия EF будет линией пересечения плоскости сечения и плоскости основания пирамиды.

Автоматический показ анимации!

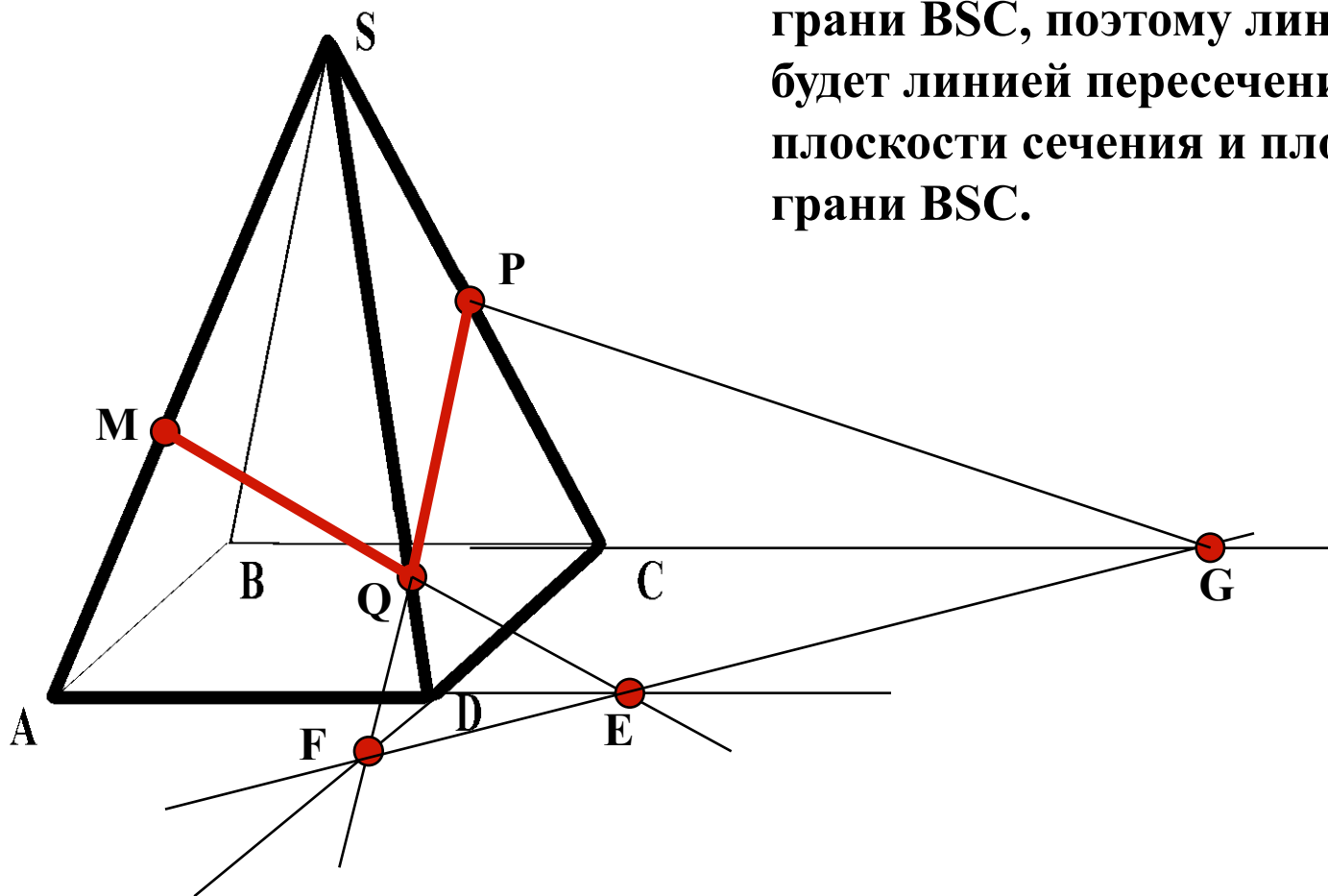
Линии EF и BC лежат в одной плоскости основания пирамиды $ABCD$. Найдём точку G , как точку пересечения линий EF и BC .

Точка G будет принадлежать искомой плоскости сечения, так как она принадлежит линии EF , лежащей в этой плоскости.



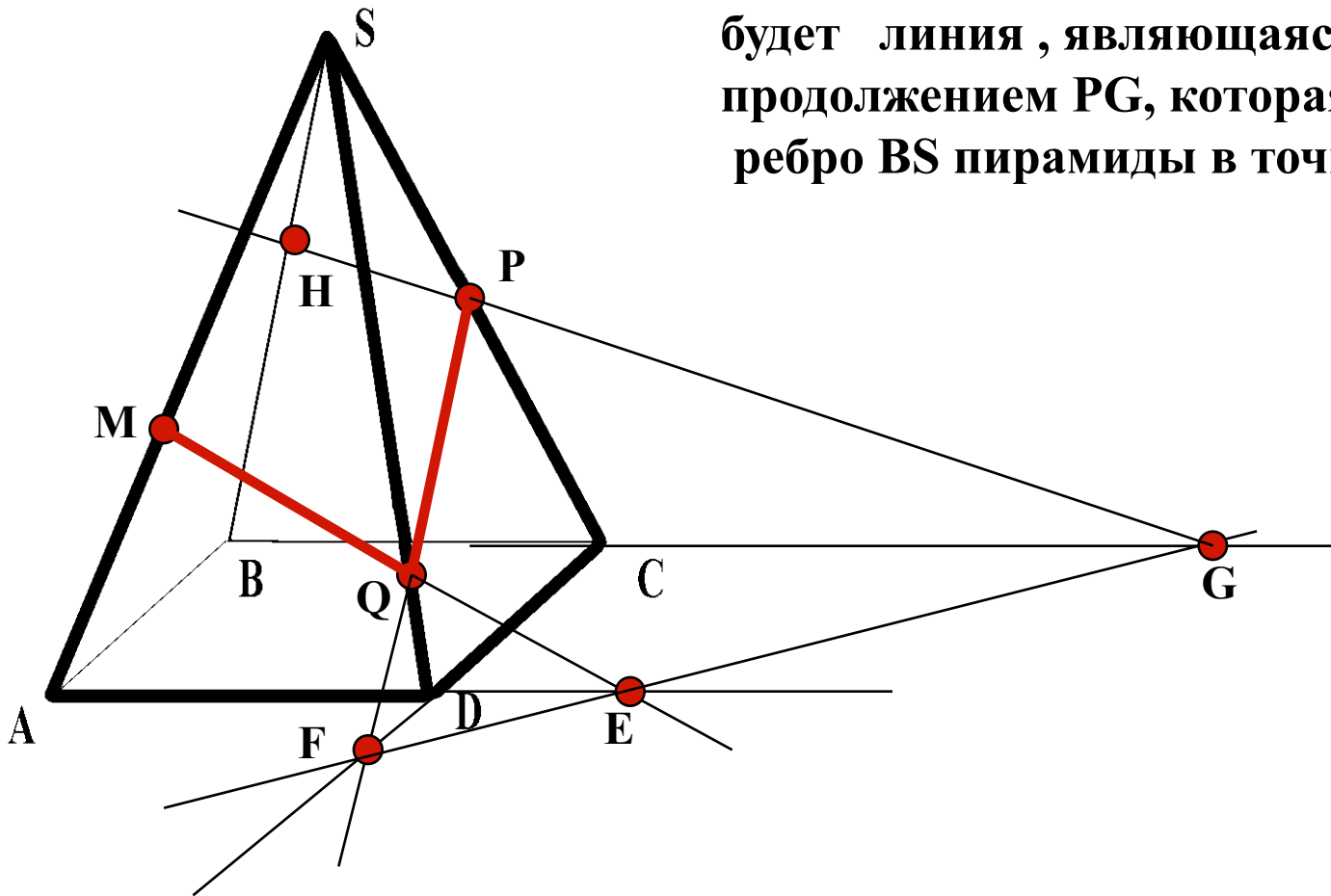
Автоматический показ анимации!

Точки Р и G принадлежат плоскости сечения и плоскости грани BSC, поэтому линия PG будет линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани BSC.



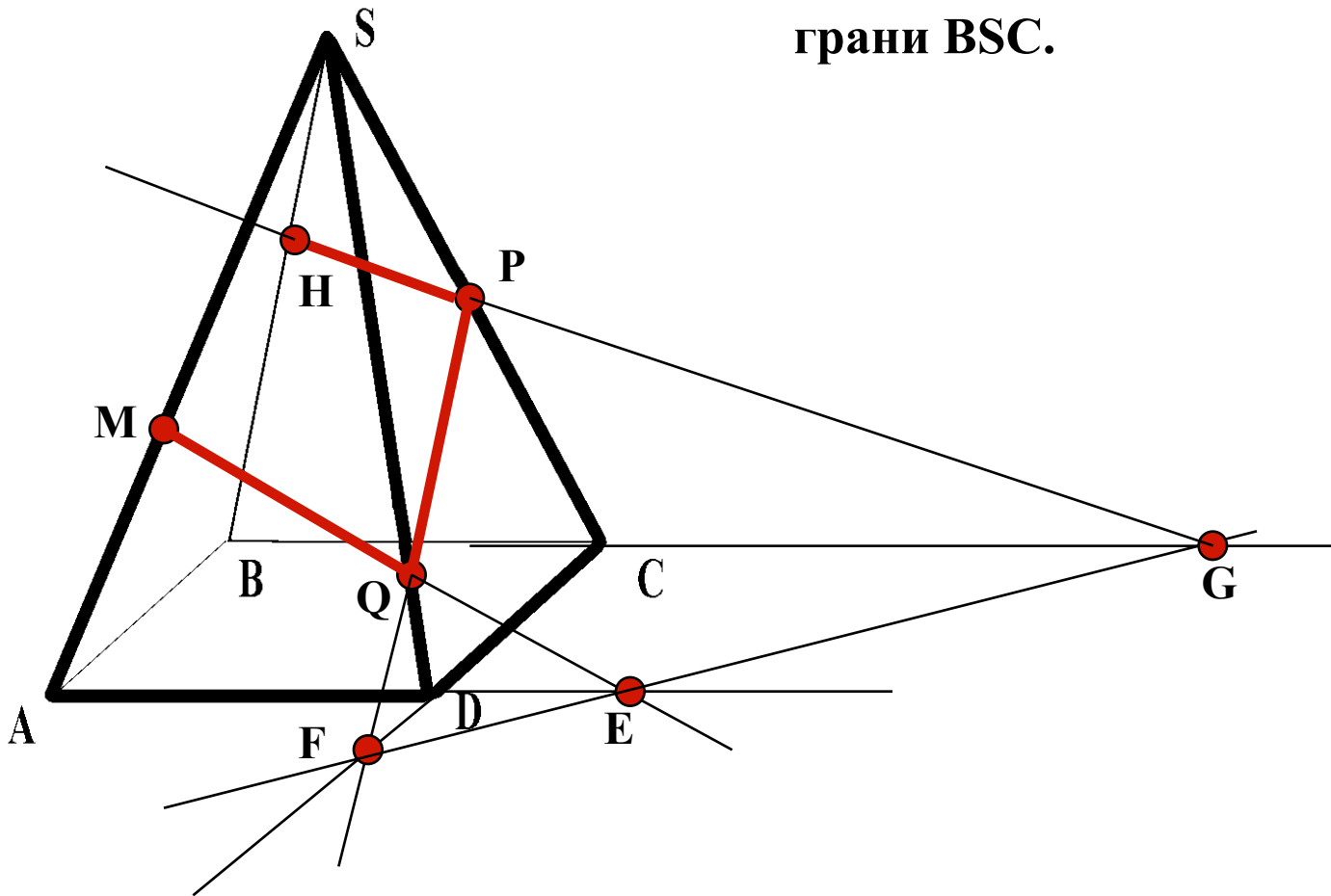
Автоматический показ анимации!

Линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани BSC будет линия, являющаяся продолжением PG, которая пересечёт ребро BS пирамиды в точке H.



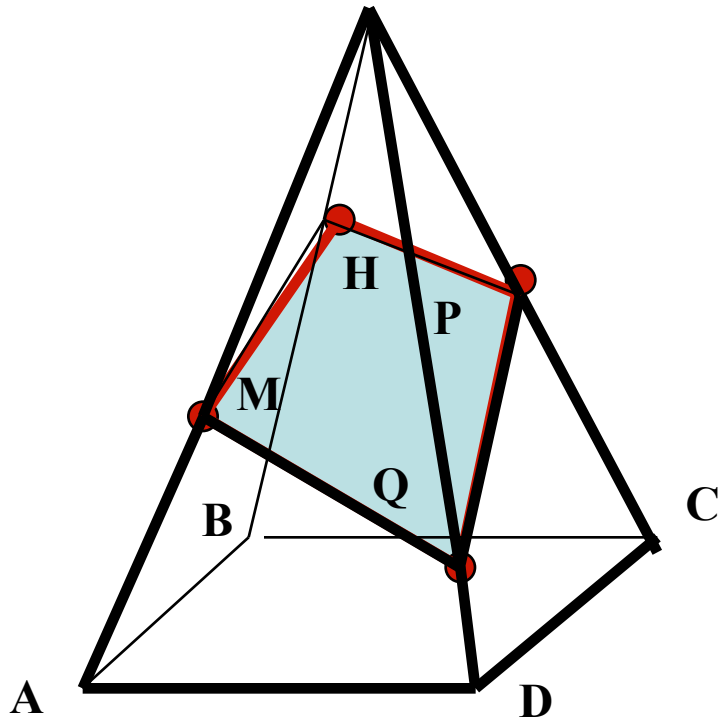
Автоматический показ анимации!

**РН будет линией пересечения
плоскости сечения и плоскости
грани BSC.**



Автоматический показ анимации!

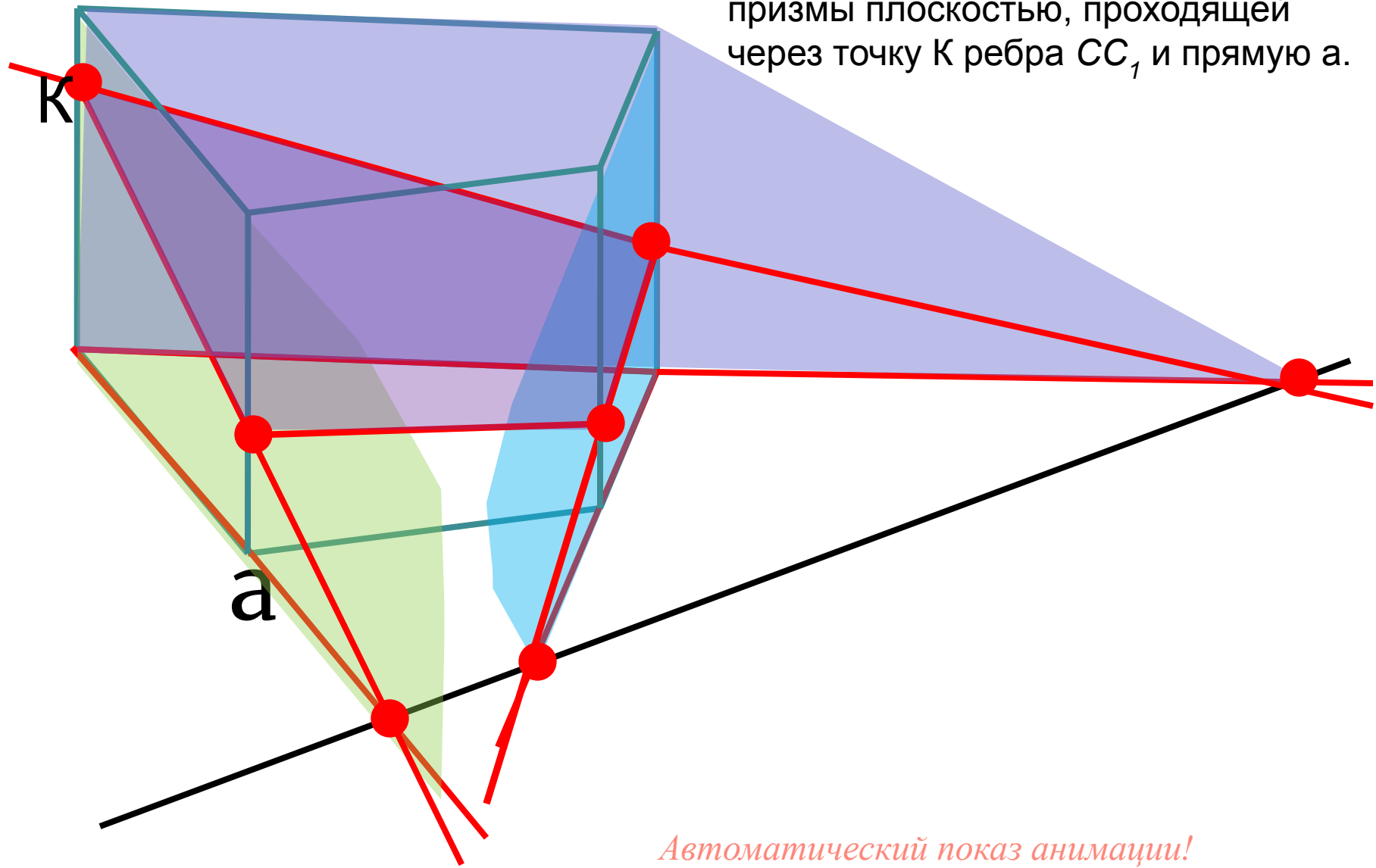
**И четырёхугольник МНРQ
будет искомым сечением
пирамиды SABCD плоскостью,
проходящей через заданные точки
М, Р, Q.**



Автоматический показ анимации!

Задача №4 (метод следов)

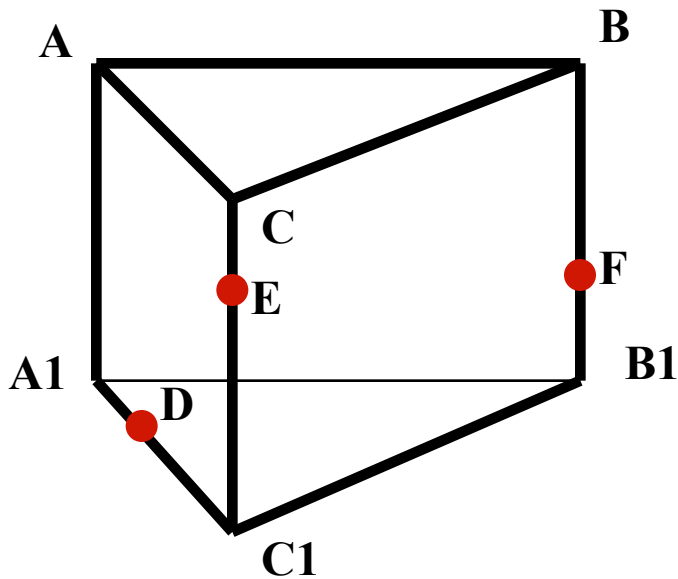
Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через точку К ребра CC_1 и прямую а.



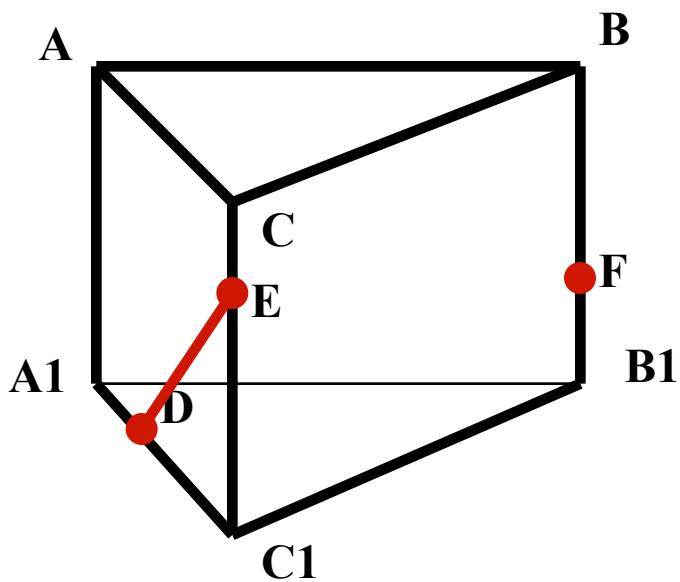
Автоматический показ анимации!

Пример.

Дана трёхгранная призма $ABC A_1 B_1 C_1$. Требуется построить сечение призмы плоскостью, проходящей через три заданные точки D , E , и F .



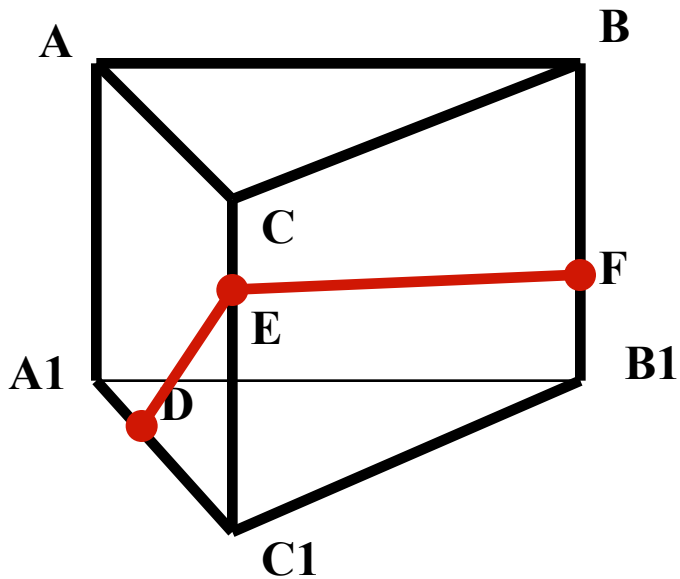
Автоматический показ анимации!



Точки D и E принадлежат плоскости грани A A1 C1 C и плоскости сечения, следовательно линия DE будет линией пересечения этих плоскостей.

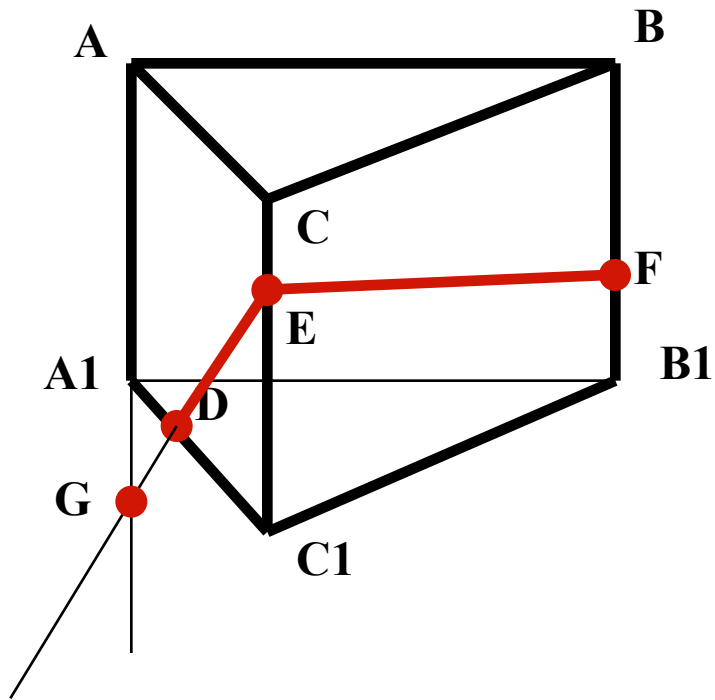
Автоматический показ анимации!

Точки E и F принадлежат плоскости грани B C C1 B1 и плоскости сечения, следовательно линия EF будет линией пересечения этих плоскостей.



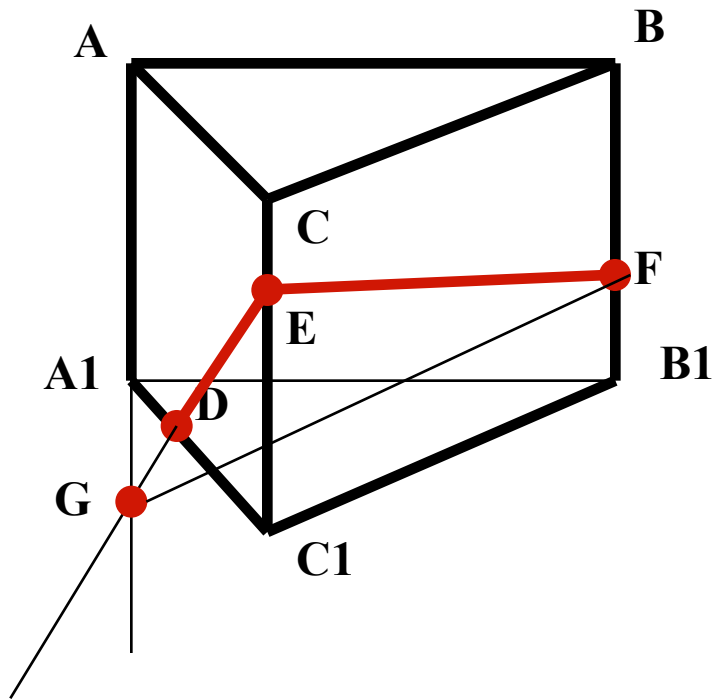
Автоматический показ анимации!

Линии DE и AA1 лежат в плоскости грани AA1C1C. Найдём точку G, пересечения этих линий.



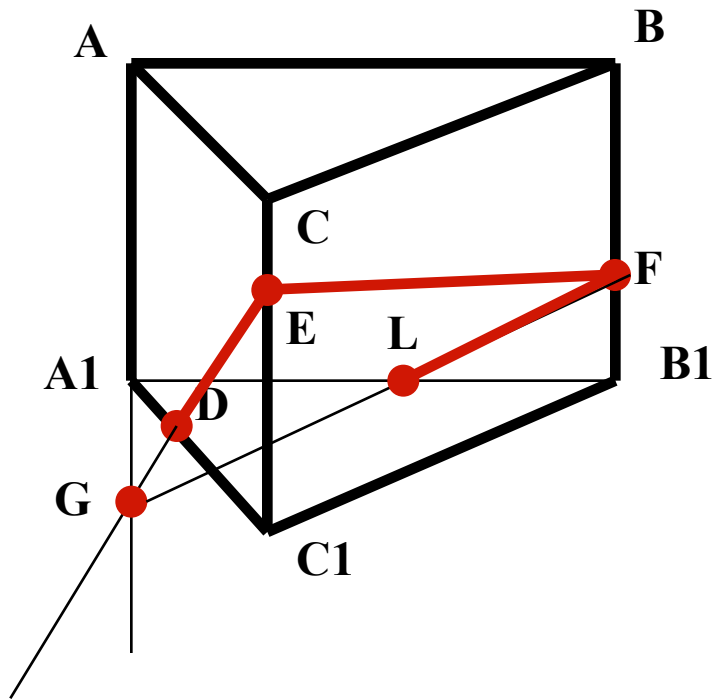
Автоматический показ анимации!

Точка G принадлежит плоскости сечения, так как она принадлежит линии DE. Точки G и F принадлежат плоскости грани AA₁B₁B и плоскости сечения, следовательно линия GF будет линией пересечения этих плоскостей.



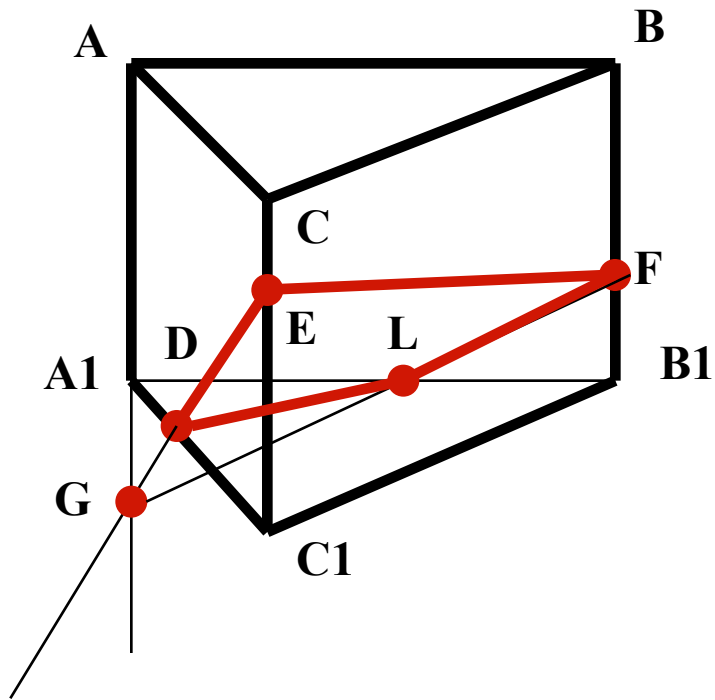
Автоматический показ анимации!

В плоскости грани AA_1B_1B линии GF и A_1B_1 пересекаются в точке L . Точки F и L принадлежат плоскости грани AA_1B_1B и плоскости сечения, следовательно линия FL будет линией пересечения этих плоскостей.



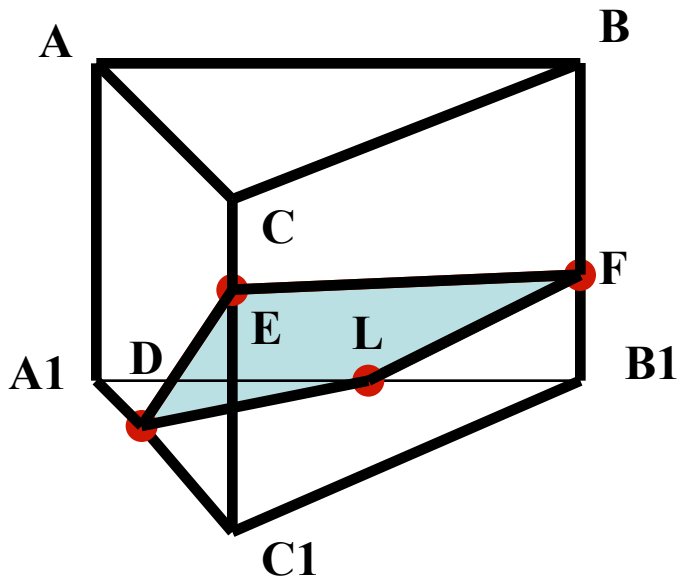
Автоматический показ анимации!

Точки D и L принадлежат плоскости основания призмы A1 B1 C1 и плоскости сечения, следовательно линия DL будет линией пересечения этих плоскостей.



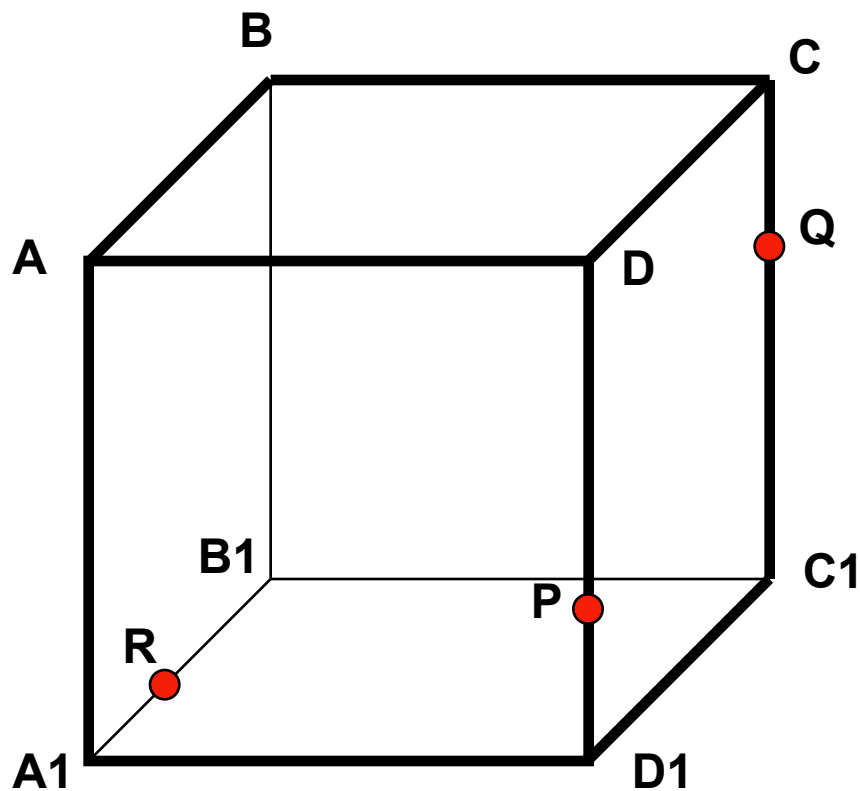
Автоматический показ анимации!

**А четырёхугольник DEFL
будет искомым сечением
трёхгранной призмы плоскостью,
проходящей через три заданные
точки D, E, F.**



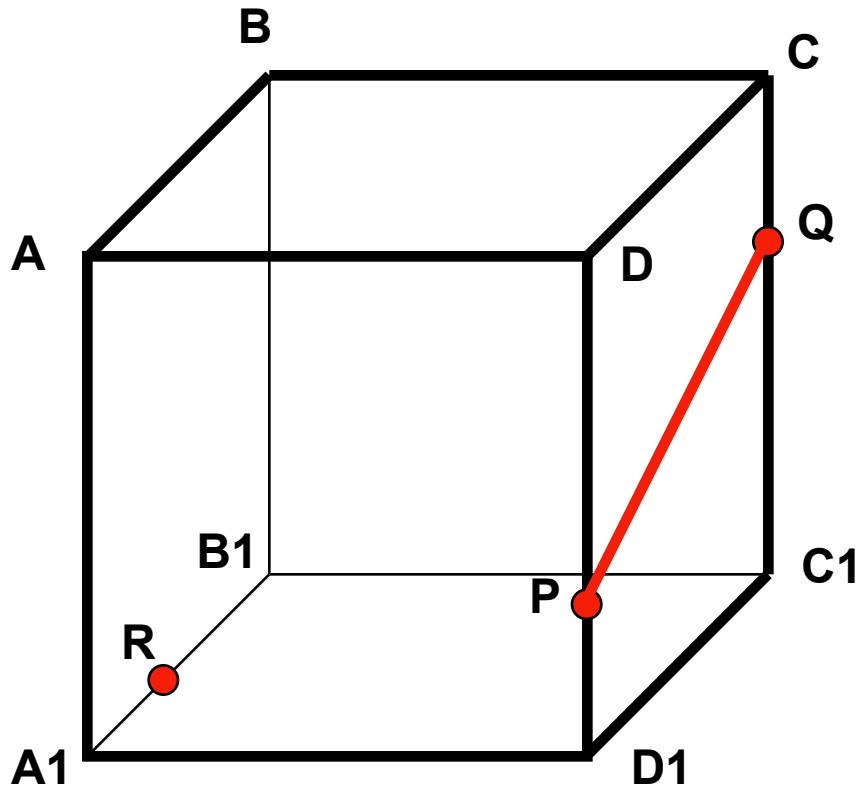
Автоматический показ анимации!

Пример.

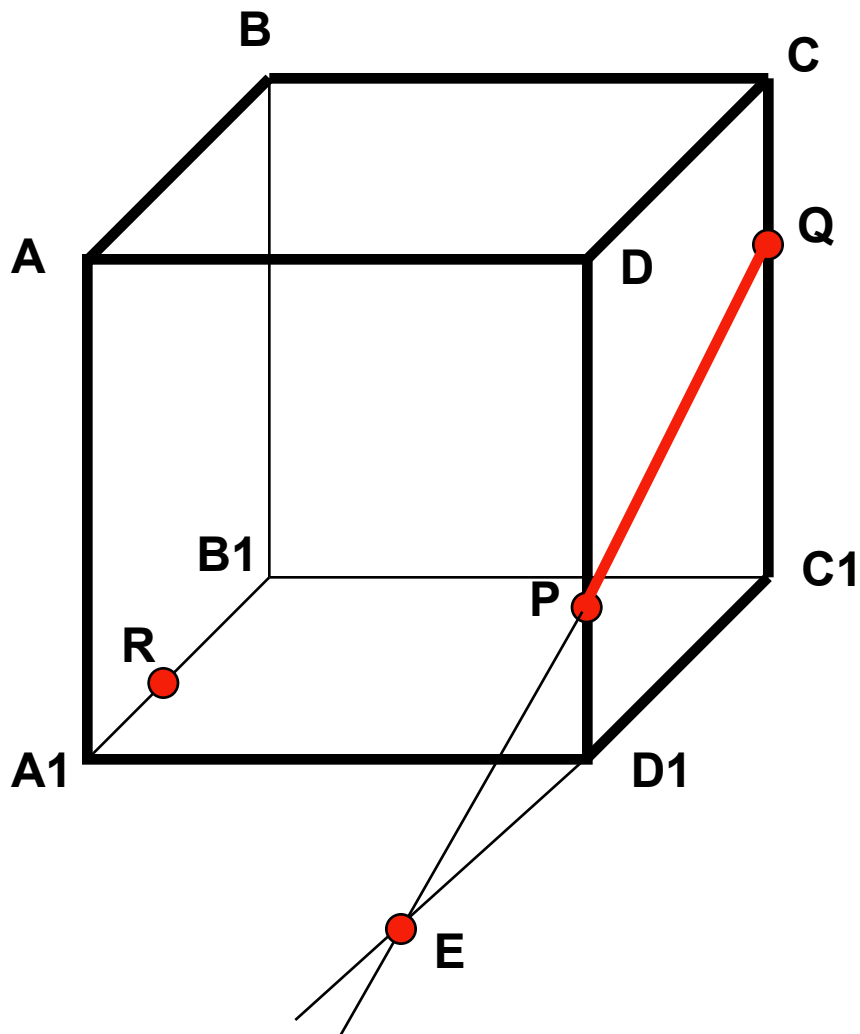


Дан куб $A B C D A_1 B_1 C_1 D_1$
На гранях куба заданы точки R, P, Q . Требуется построить сечение куба плоскостью, проходящей через заданные точки.

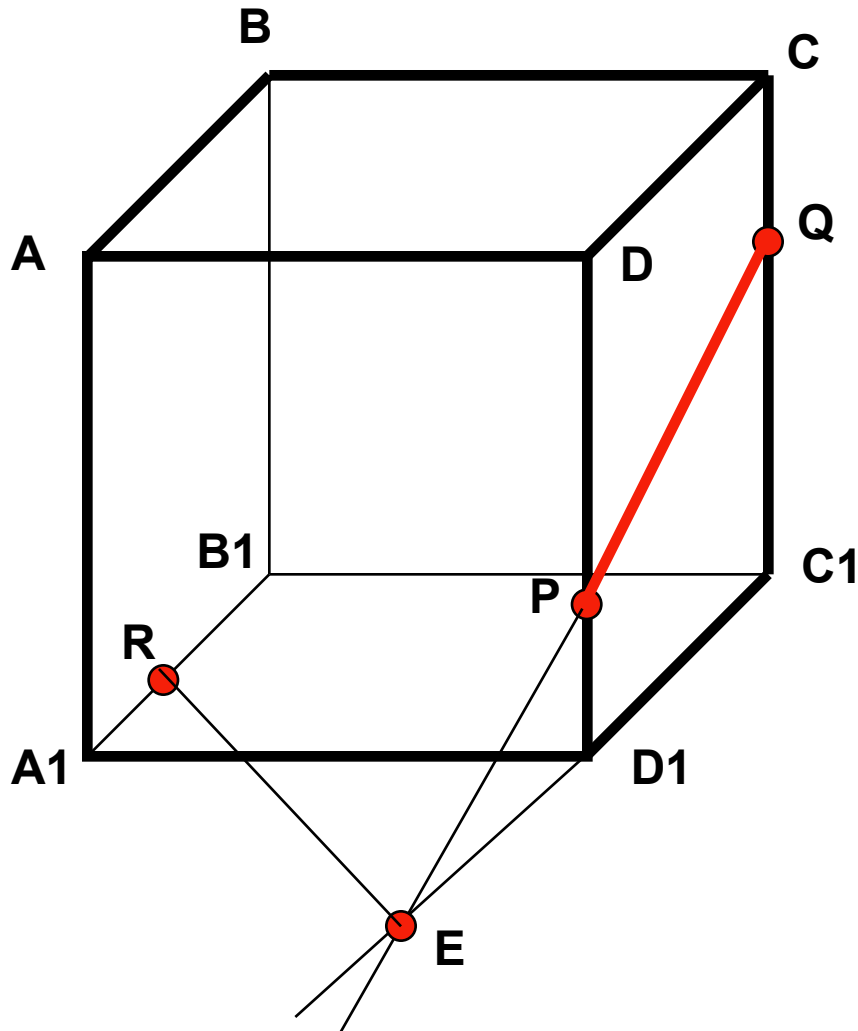
Автоматический показ анимации!



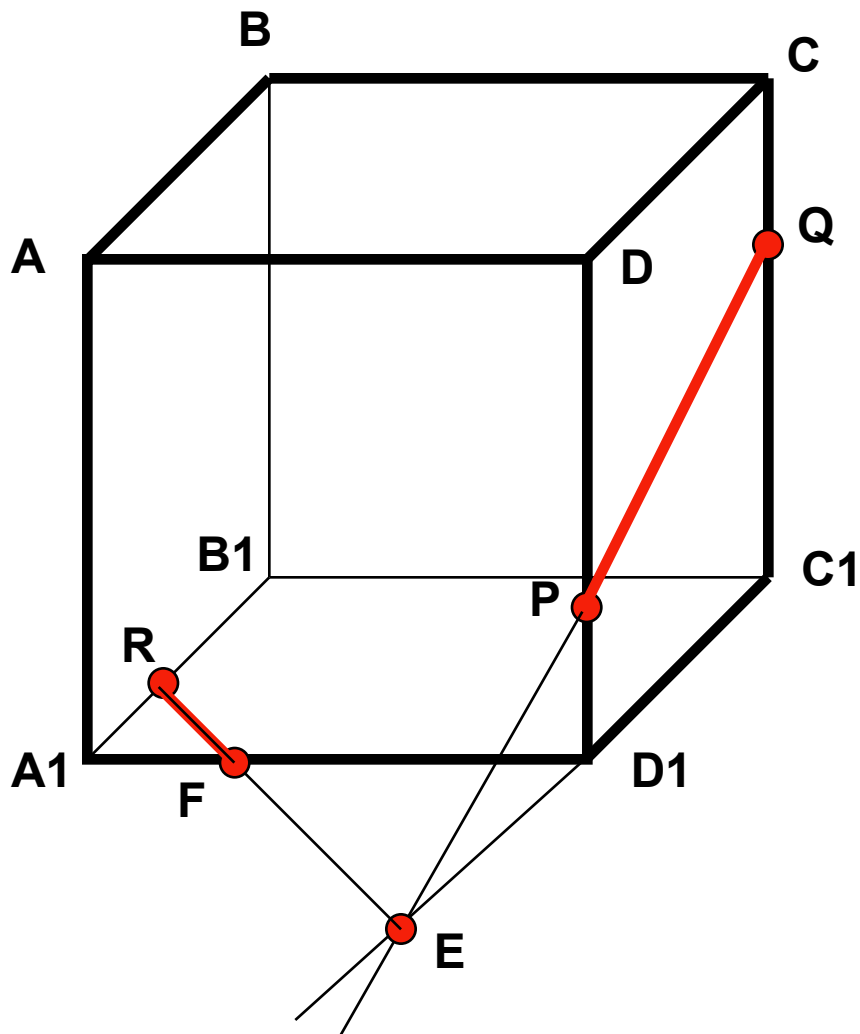
Точки Р и Q заданы, как принадлежащие плоскости сечения. В то же время эти точки принадлежат плоскости грани $C D D_1 C_1$, следовательно линия PQ является линией пересечения этих плоскостей



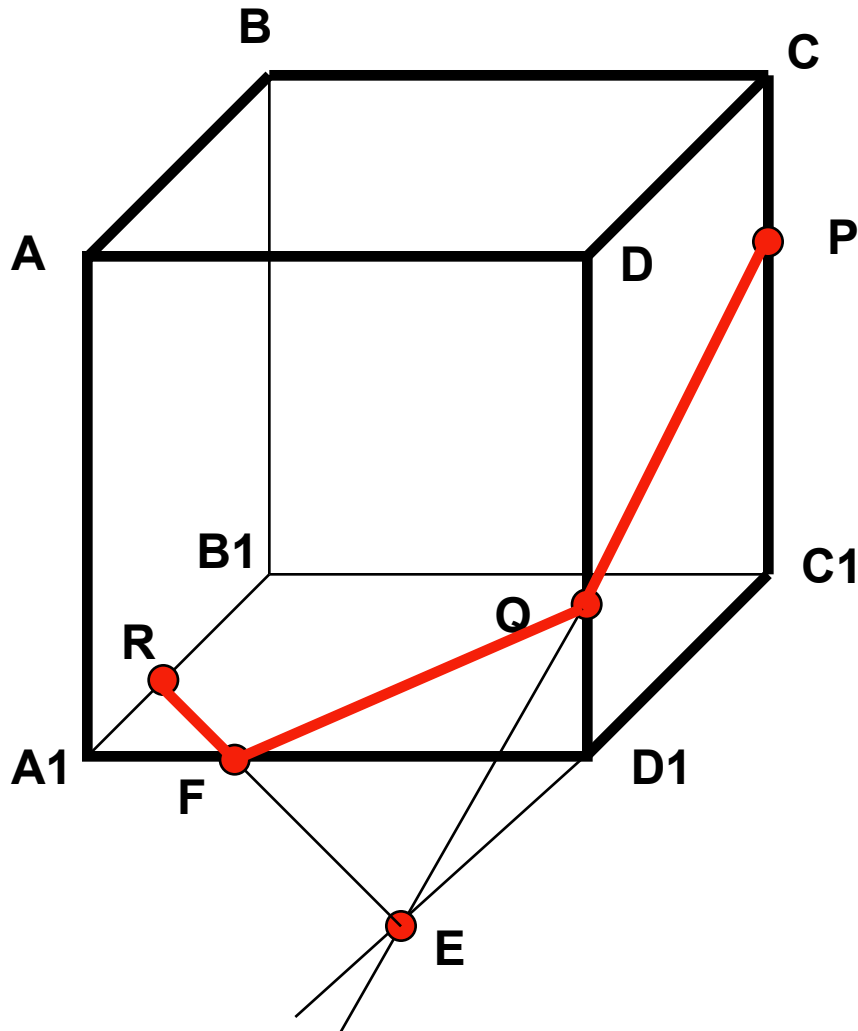
Линии PQ и C1D1 лежат в плоскости грани C C1 D1 D. Найдем точку E пересечения линий PQ и C1 D1.



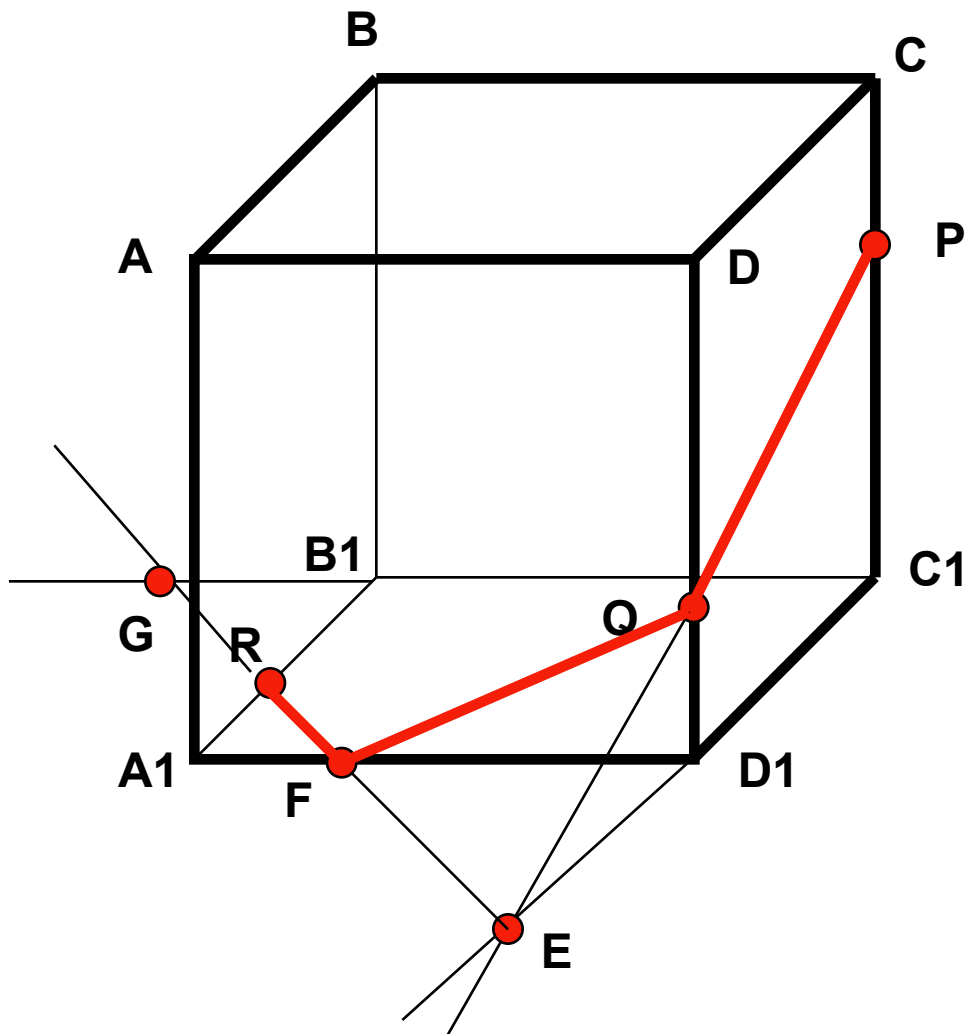
Точки R и E принадлежат плоскости сечения и плоскости основания куба, следовательно линия RE, соединяющая эти точки будет линией пересечения плоскости сечения и плоскости основания куба .



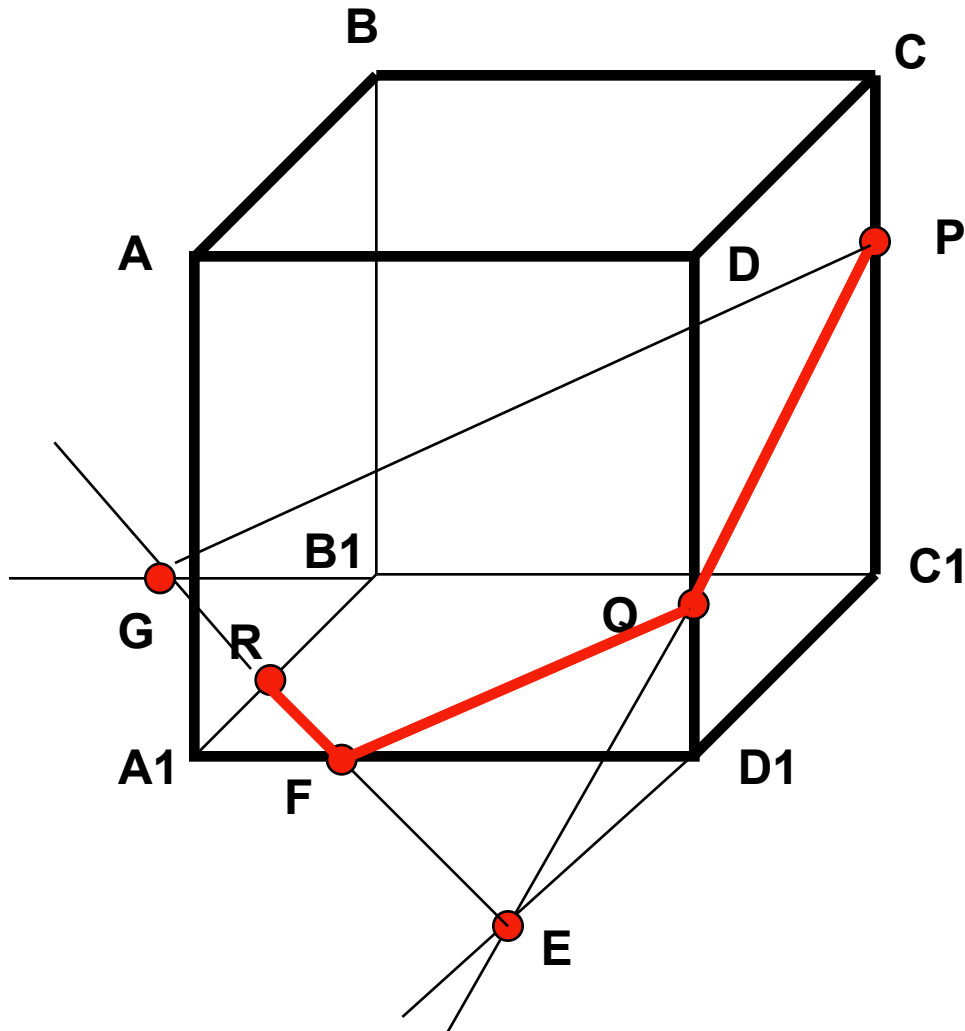
RE пересекает A1 D1 в точке F
и линия RF будет линией
пересечения плоскости
сечения и плоскости грани
A1 B1 C1 D1.



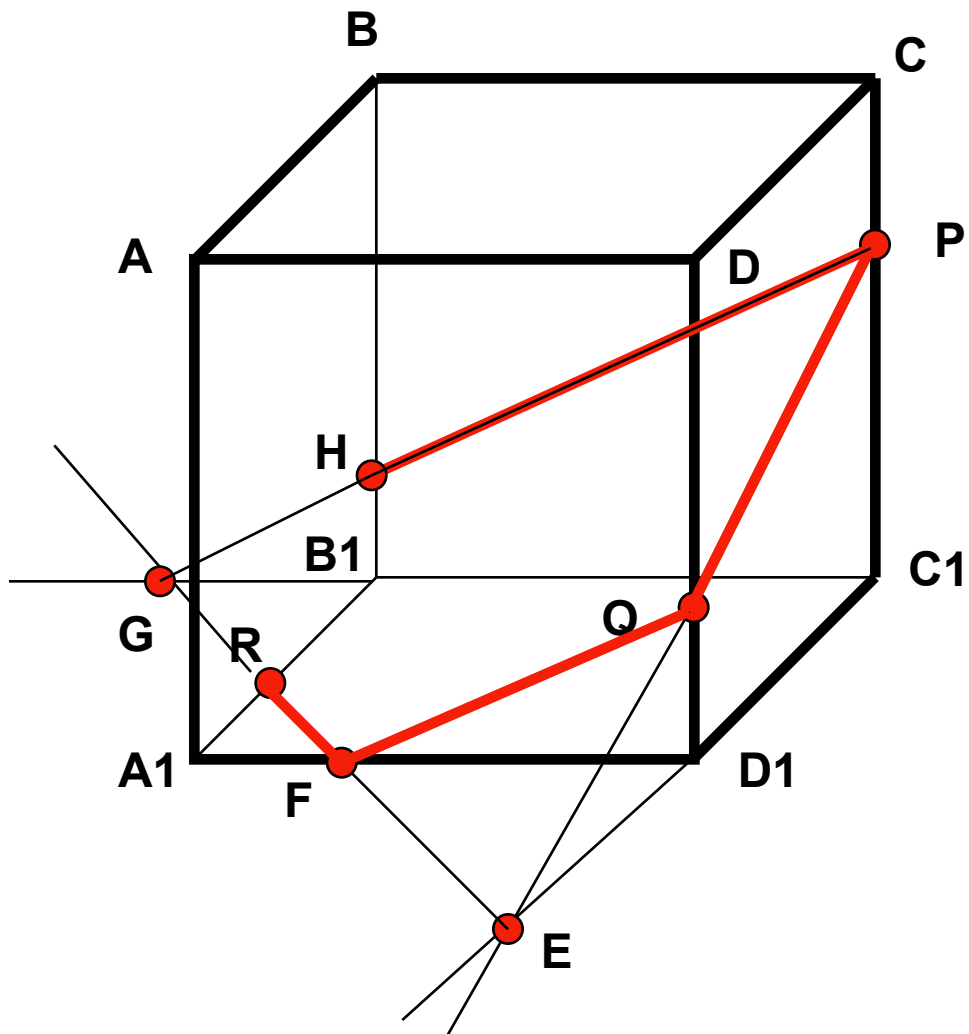
Точки и Q, и F принадлежат плоскости сечения и плоскости грани A A1 D1 D, следовательно линия QF будет линией пересечения этих плоскостей.



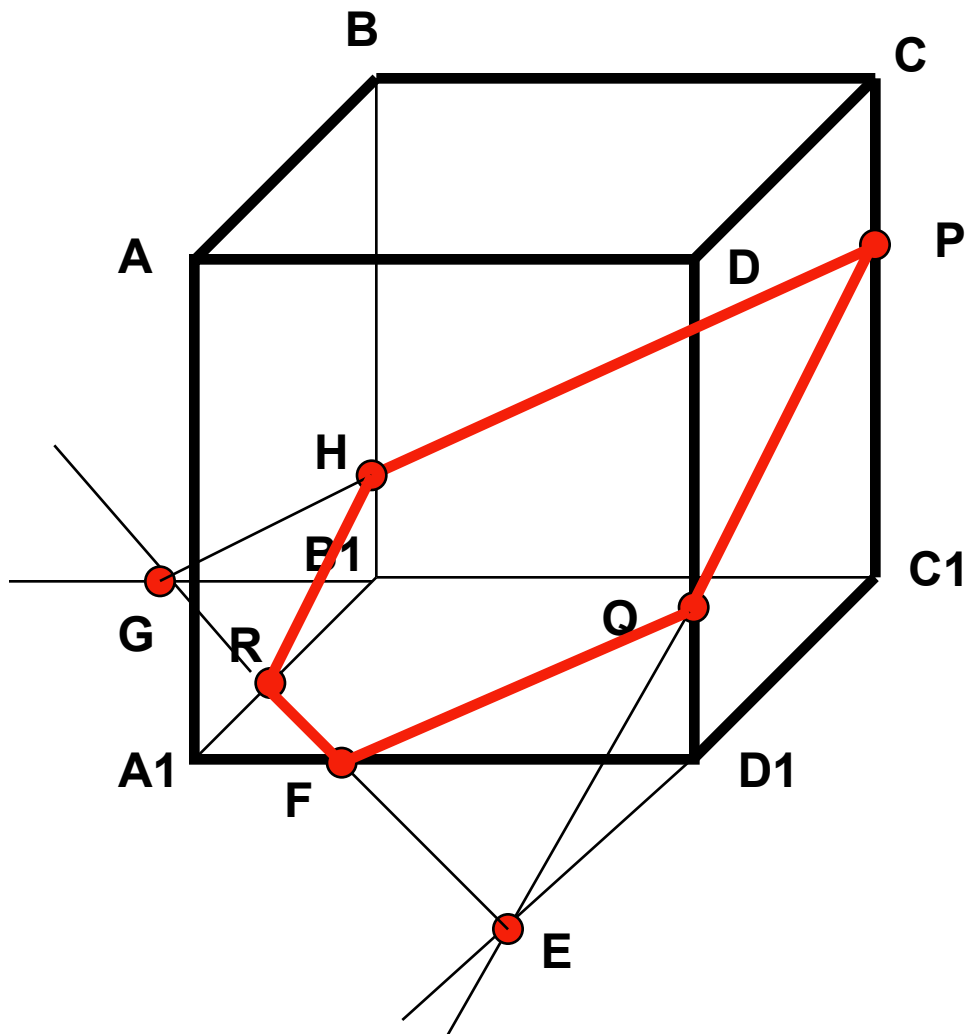
Линии RE и B1C1, лежащие в плоскости основания куба пересекаются в точке G.



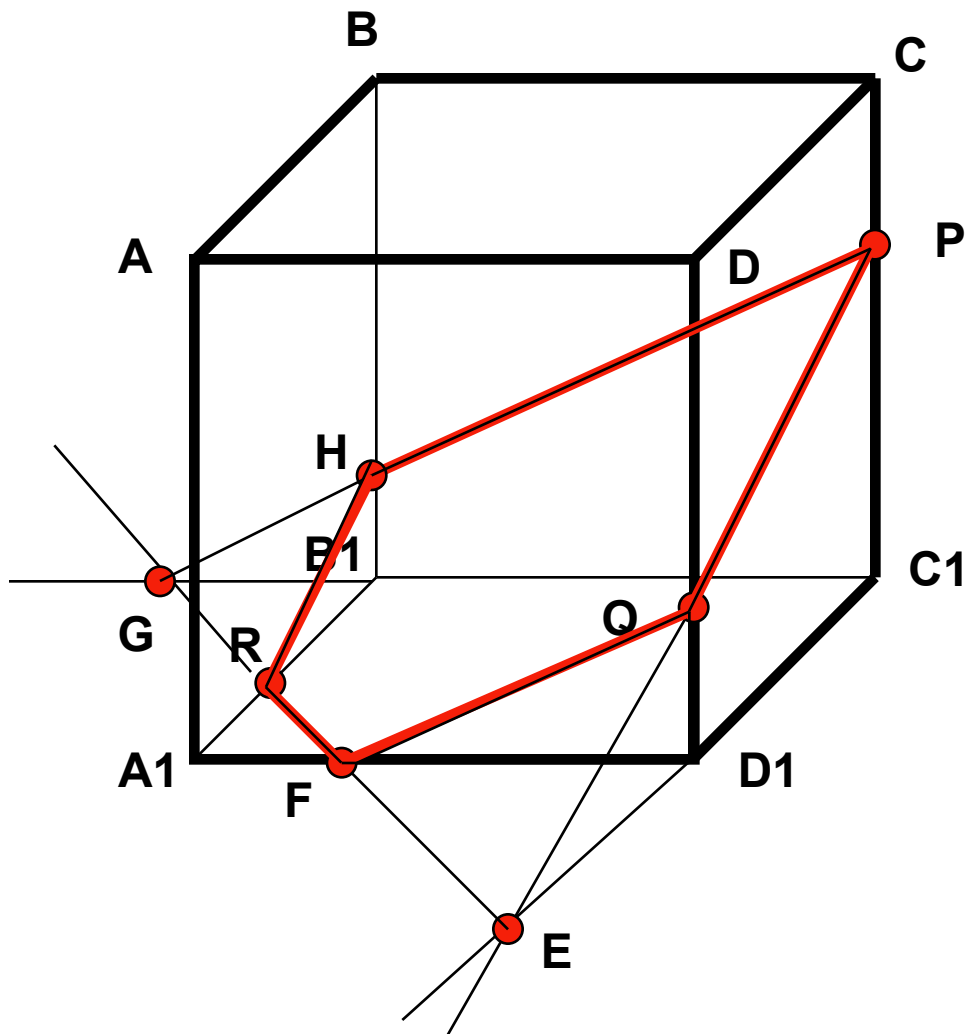
Точки Р и G принадлежат плоскости сечения и плоскости грани В В1 С1 С, следовательно линия РG является линией пересечения этих плоскостей



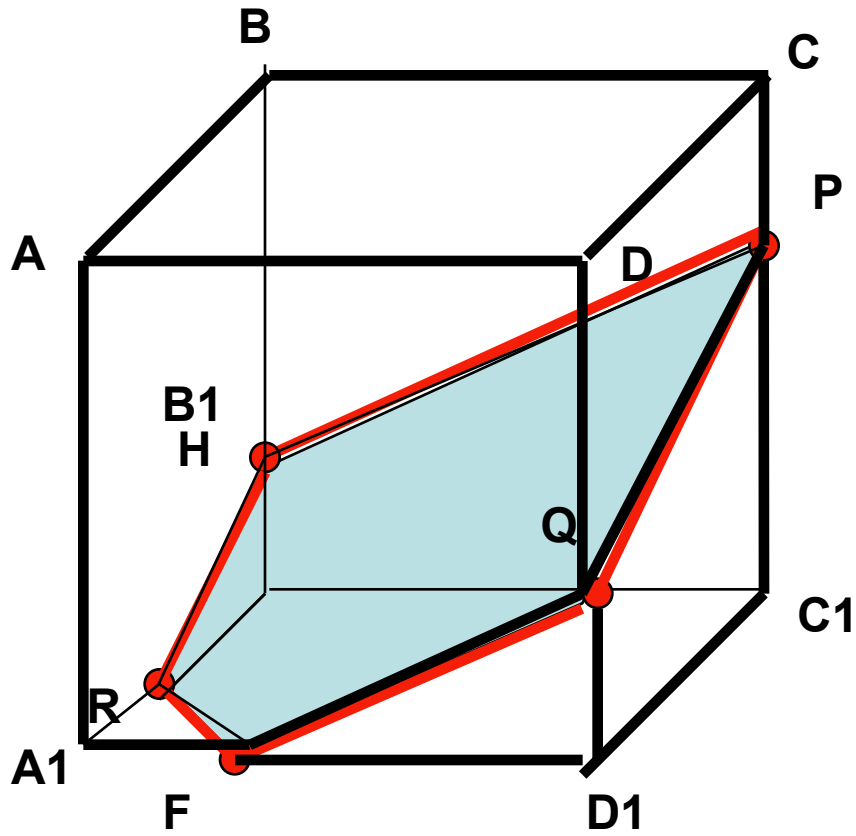
PG пересекает **В В1** в точке **Н** и линия **РН** будет линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани **В В1 С1 С**.



Точки R и H принадлежат плоскости сечения и плоскости грани AA_1B_1B и следовательно линия RH будет линией пересечения этих плоскостей.



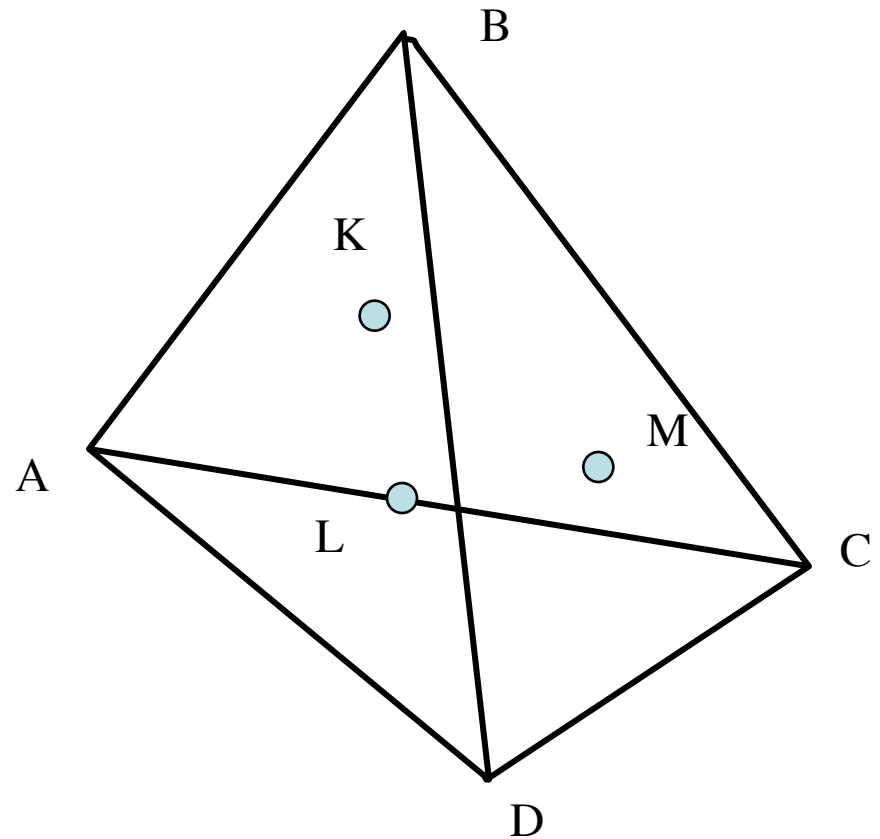
А пятиугольник RHPQF будет
искмым сечением куба
плоскостью, проходящей
через точки R, P, Q.



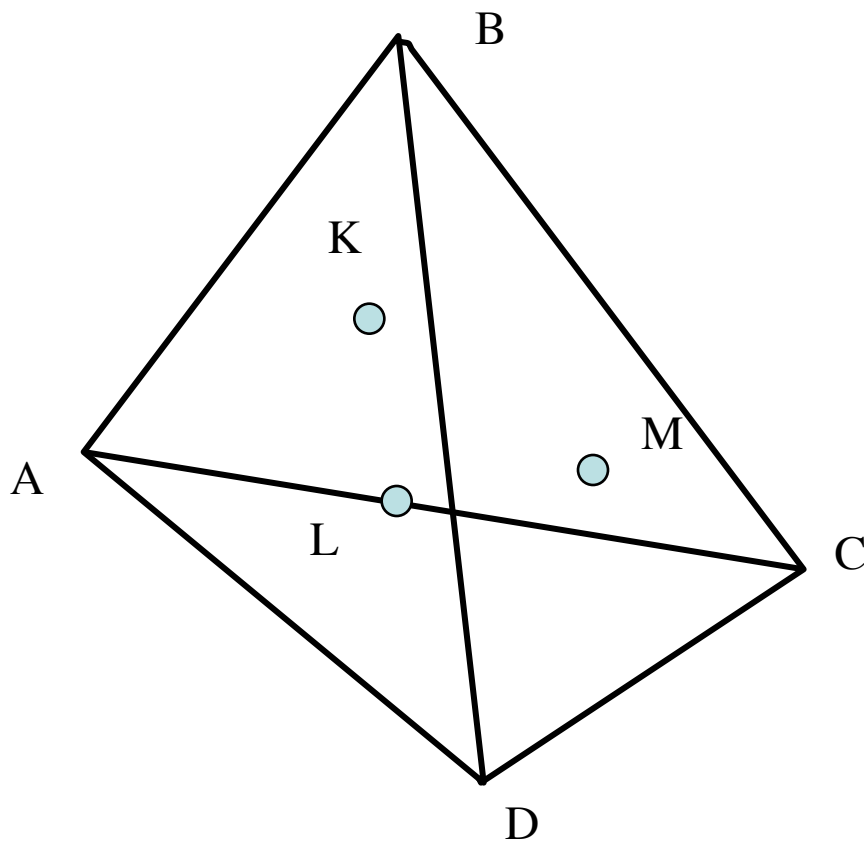
**А пятиугольник RHPQF будет
искмым сечением куба
плоскостью, проходящей
через точки R, P, Q.**

Задача №4 (метод вспомогательной плоскости)

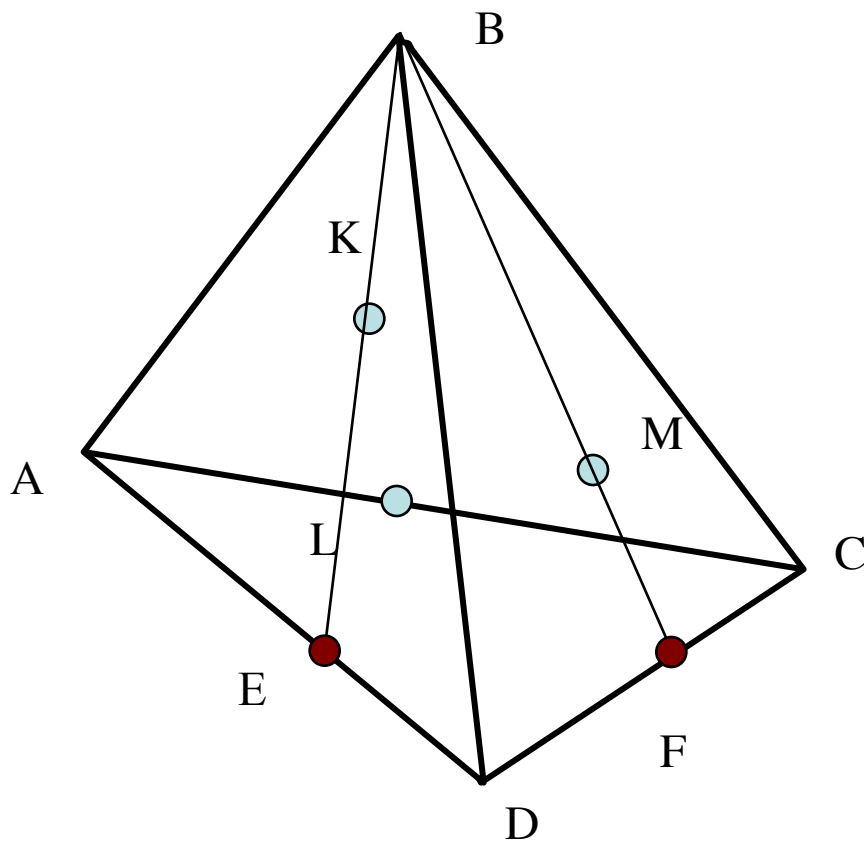
Построить сечение
тетраэдра
плоскостью,
проходящей через 2
точки на его гранях
 ABD , BCD и точку
 L , лежащую на
ребре AC .



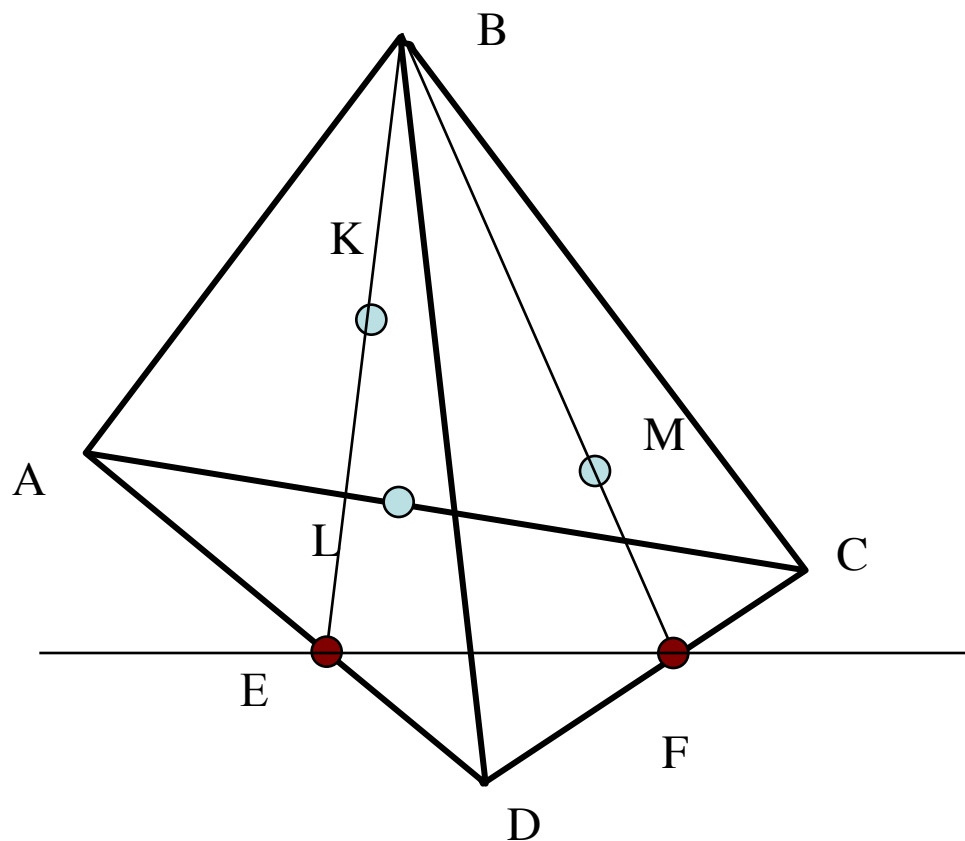
Метод вспомогательной плоскости



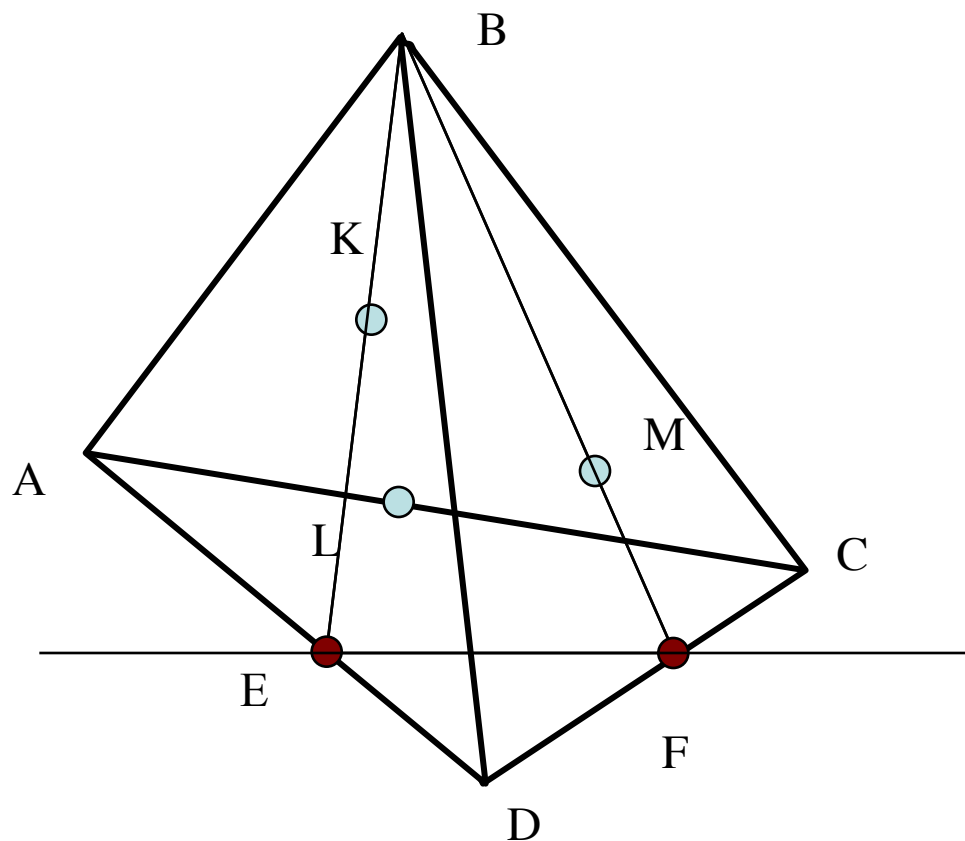
Метод вспомогательной плоскости



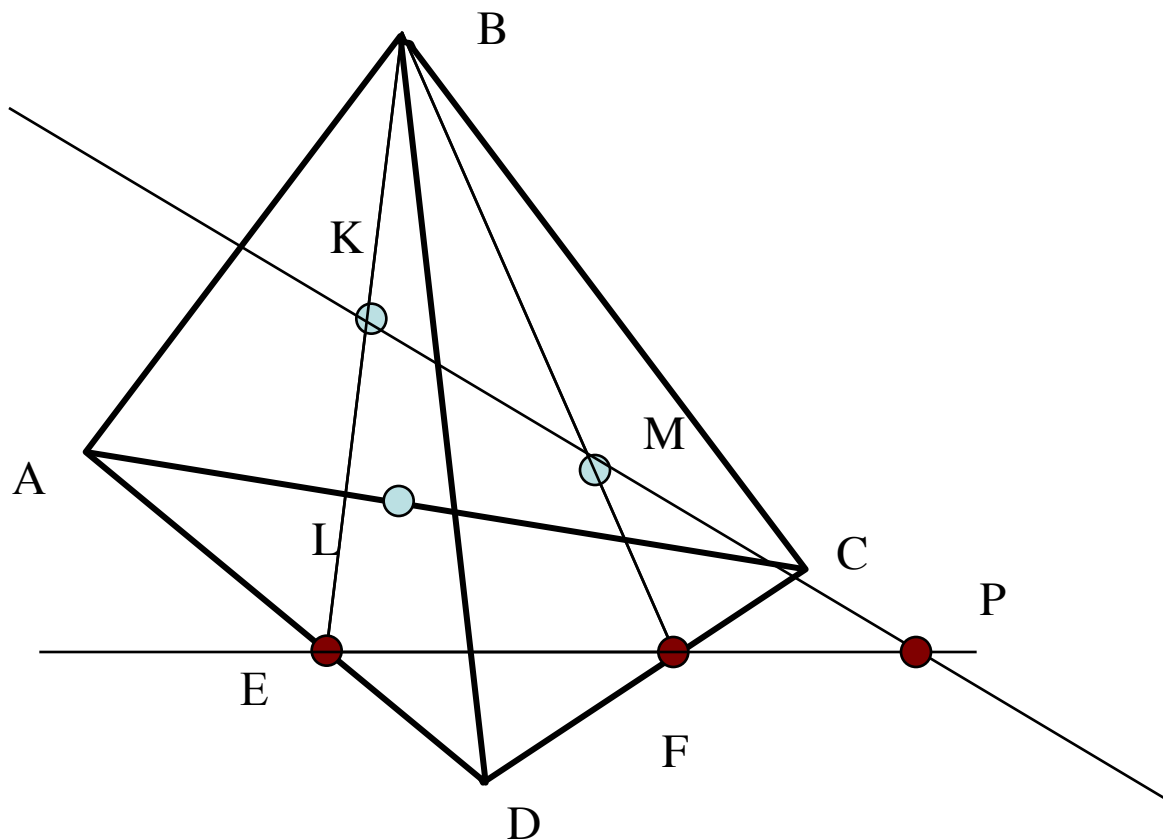
Метод вспомогательной плоскости



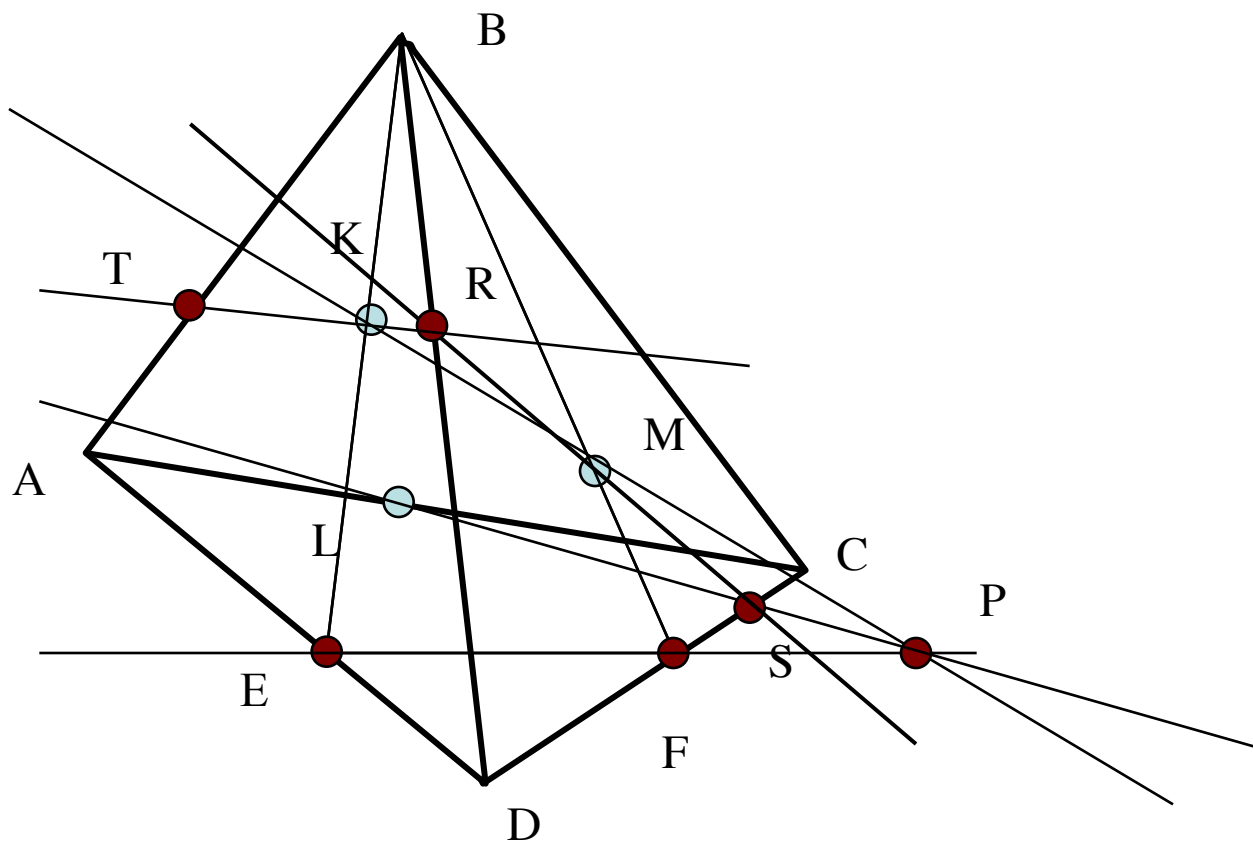
Метод вспомогательной плоскости



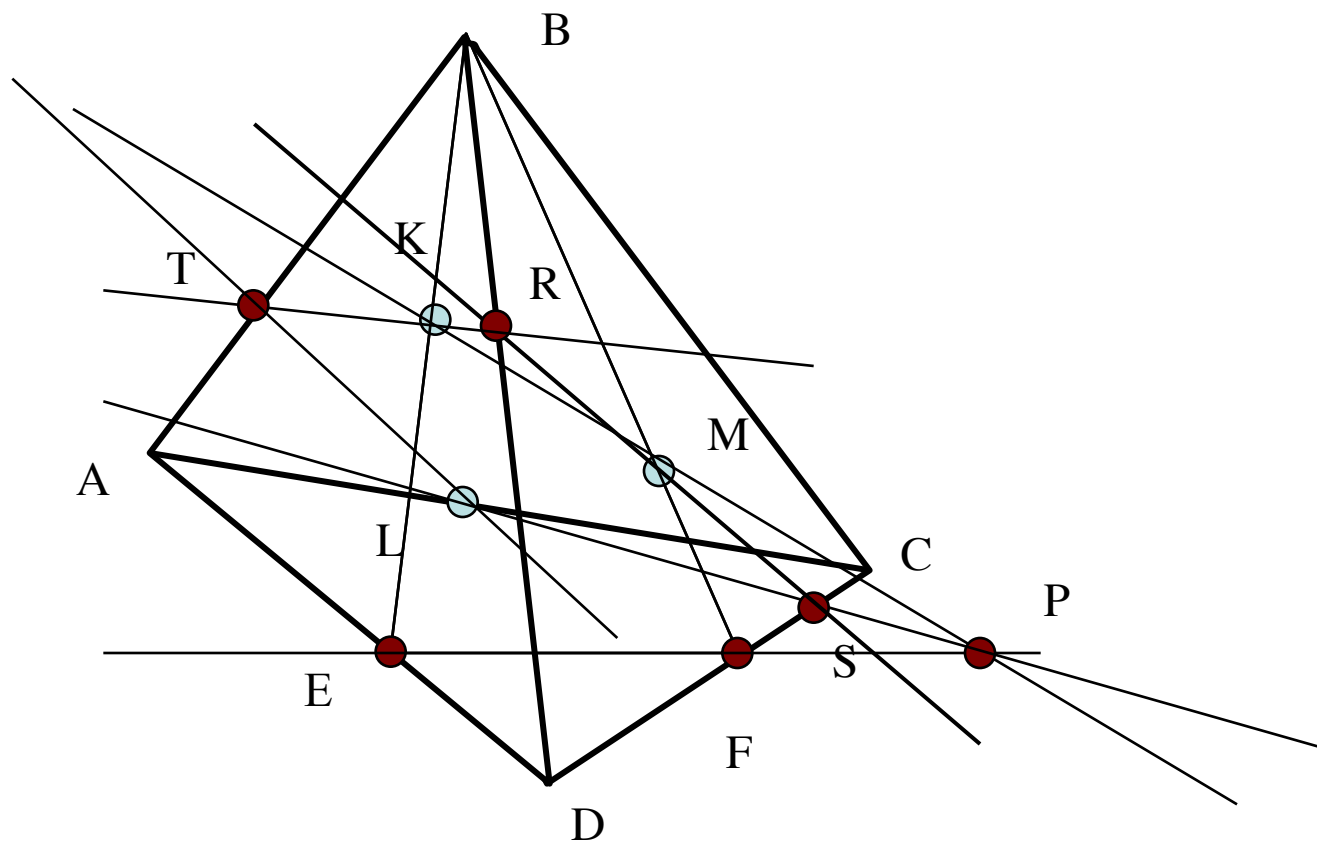
Метод вспомогательной плоскости



Метод вспомогательной плоскости



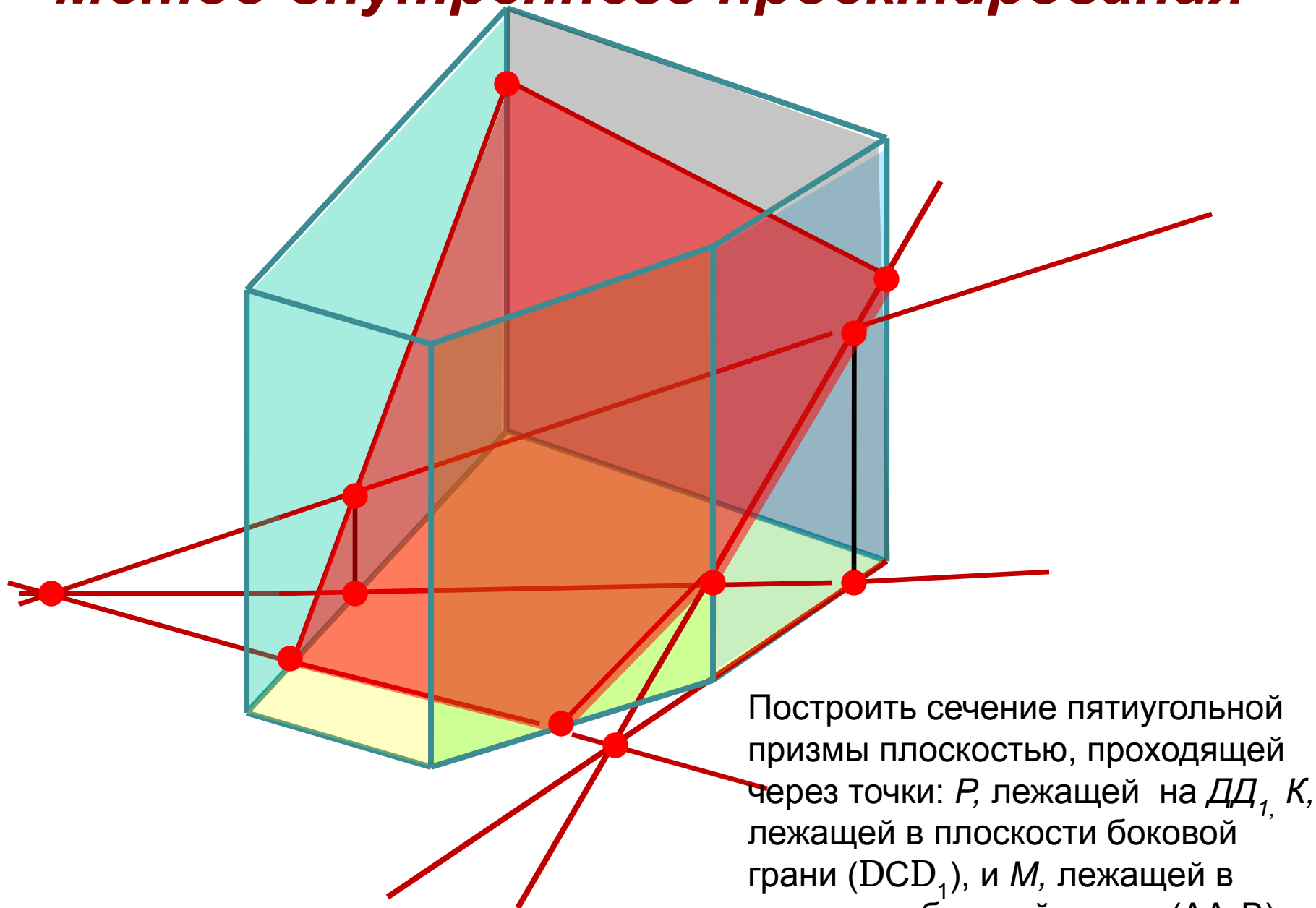
Метод вспомогательной плоскости



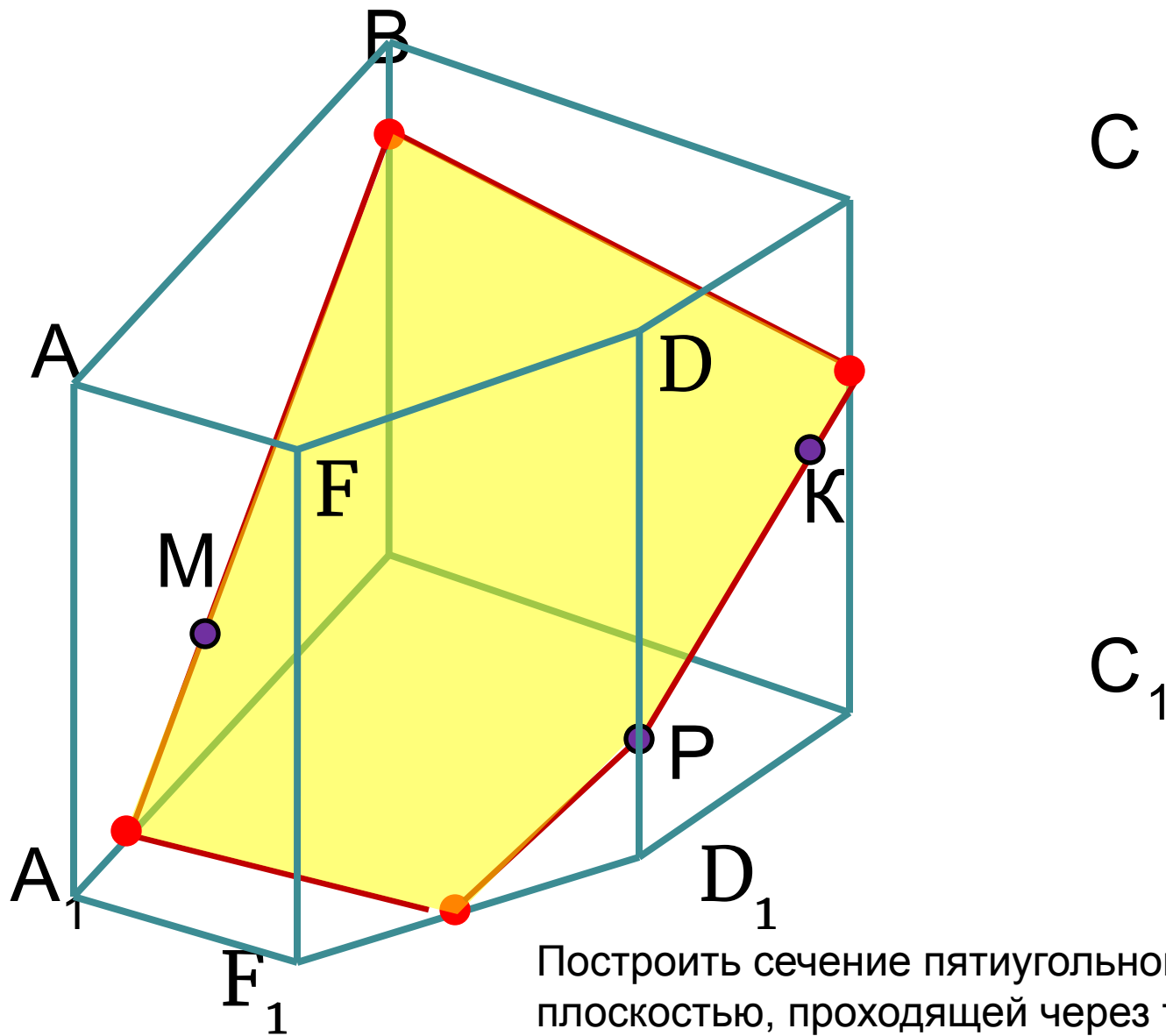
Задача №5 *(метод внутреннего проектирования)*

Построить сечение
пятиугольной призмы
плоскостью, проходящей через
точки: P , лежащей на DD_1 , K ,
лежащей в плоскости боковой
грани (DCD_1) , и M , лежащей в
плоскости боковой грани
 (AA_1B) .

Метод внутреннего проектирования



Автоматический показ анимации!

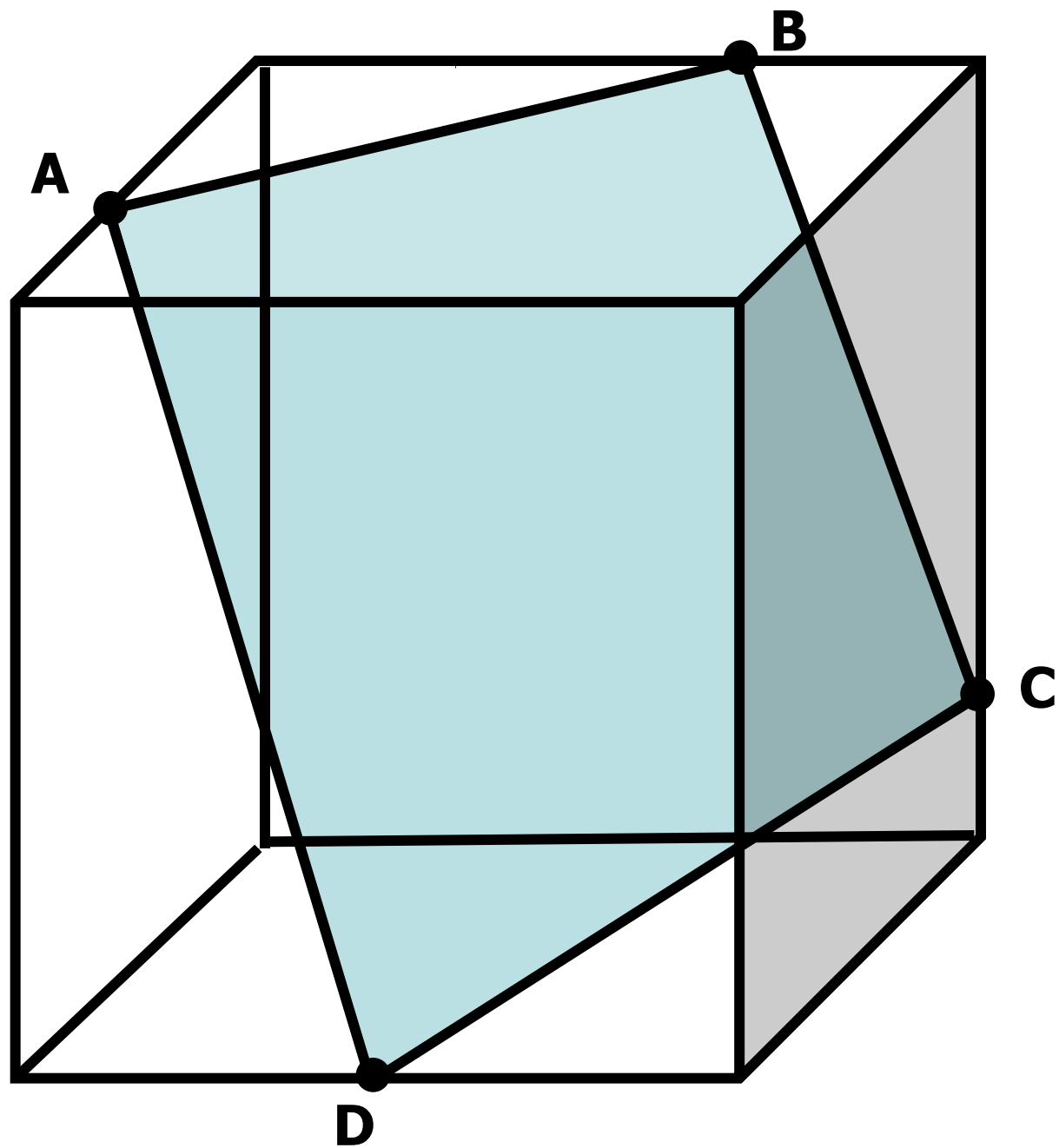


Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки: P , лежащей на DD_1 , K , лежащей в плоскости боковой грани (DCD_1) , и M , лежащей в плоскости боковой грани (AA_1B) .

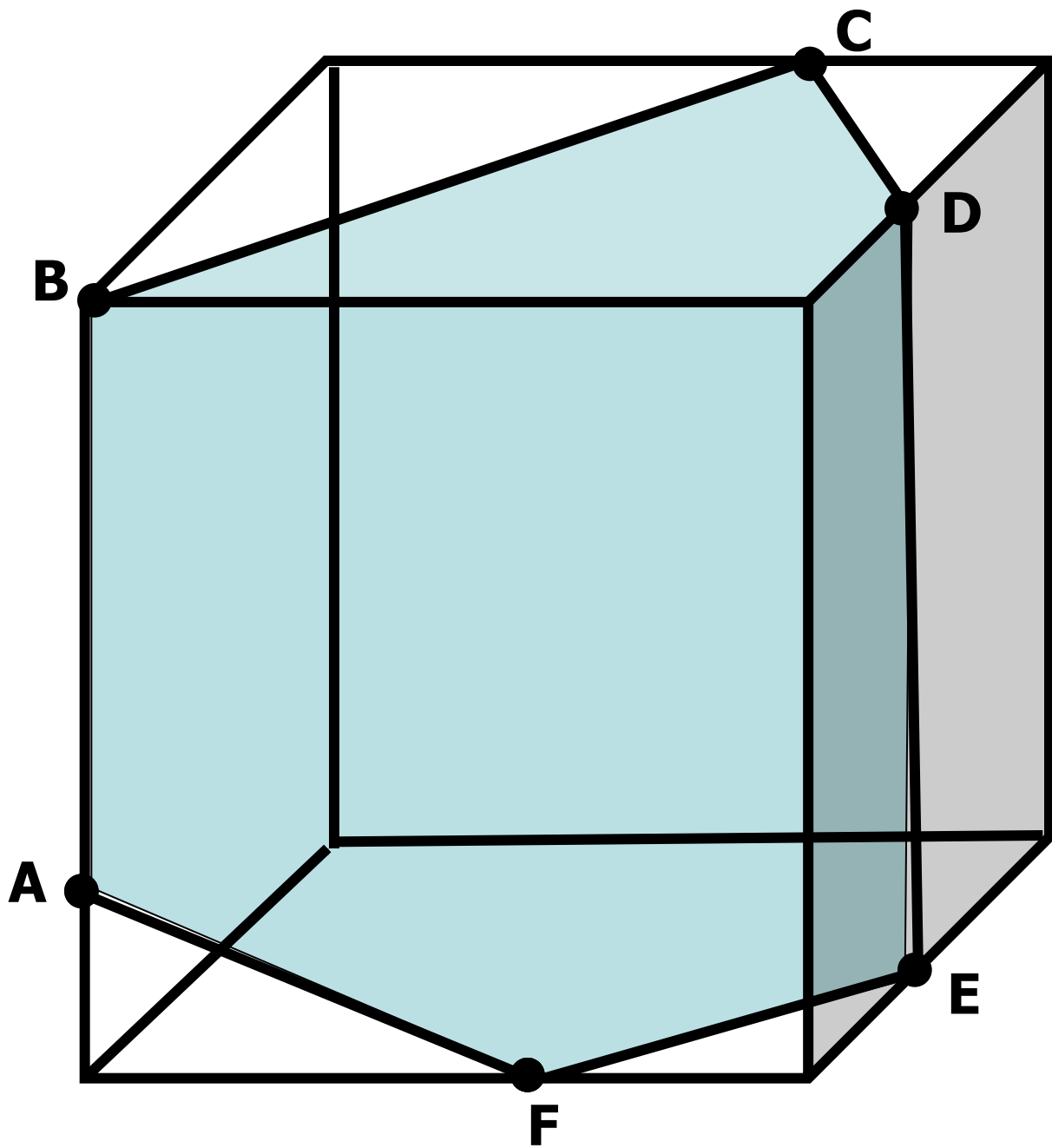
Автоматический показ анимации!

Найдите ошибку

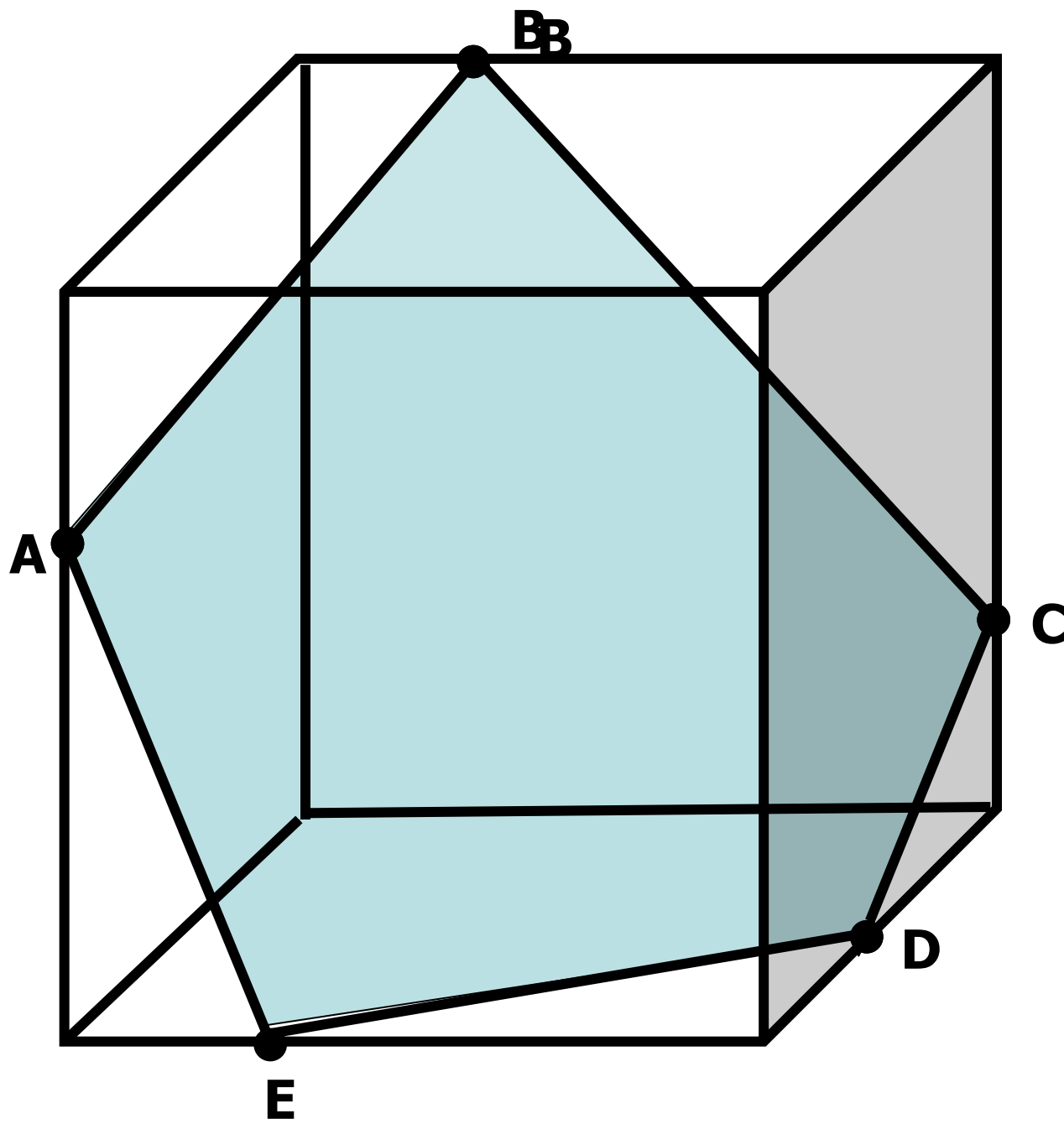
- Правильно ли построены эти сечения? Если нет, объясните почему.



Управление докладчиком

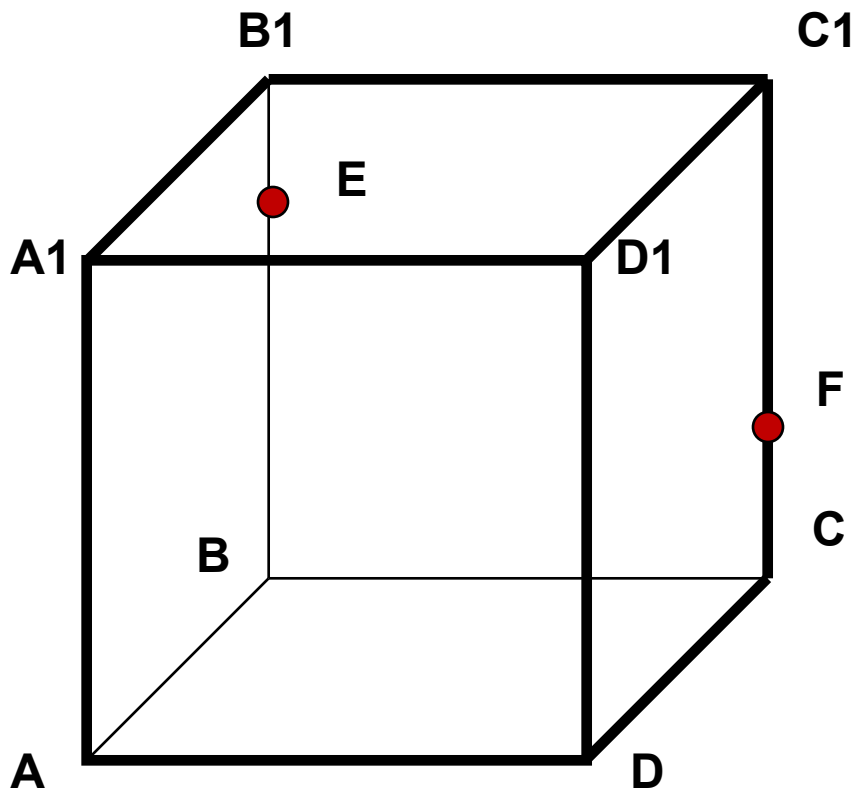


Управление докладчиком



Управление докладчиком

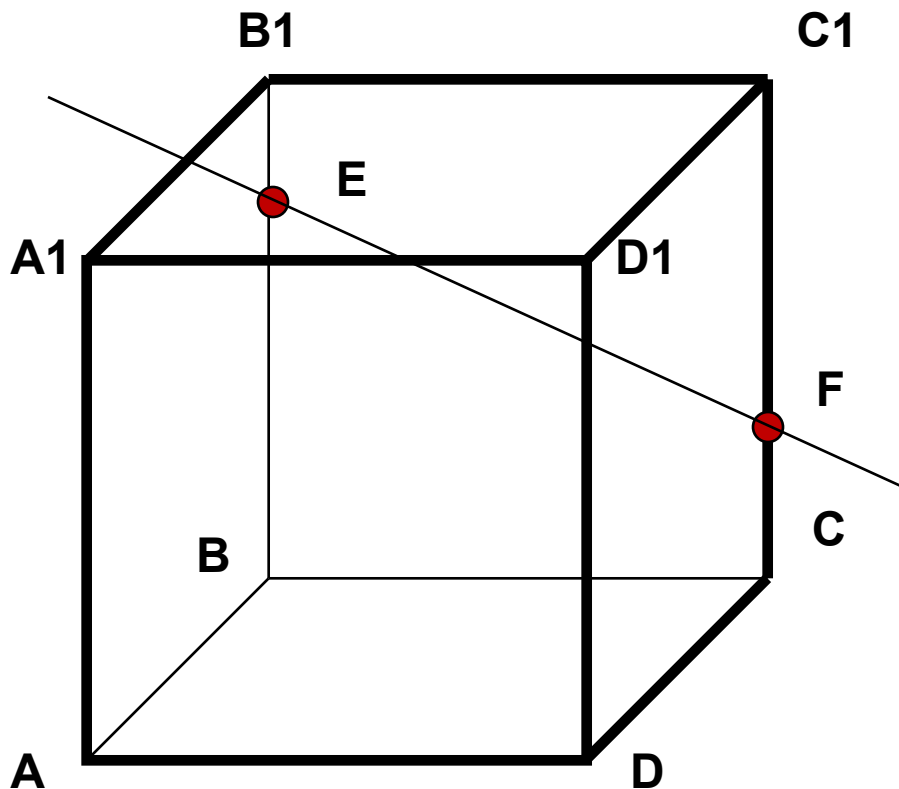
Задание



Найдите:

- точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C

Решение.

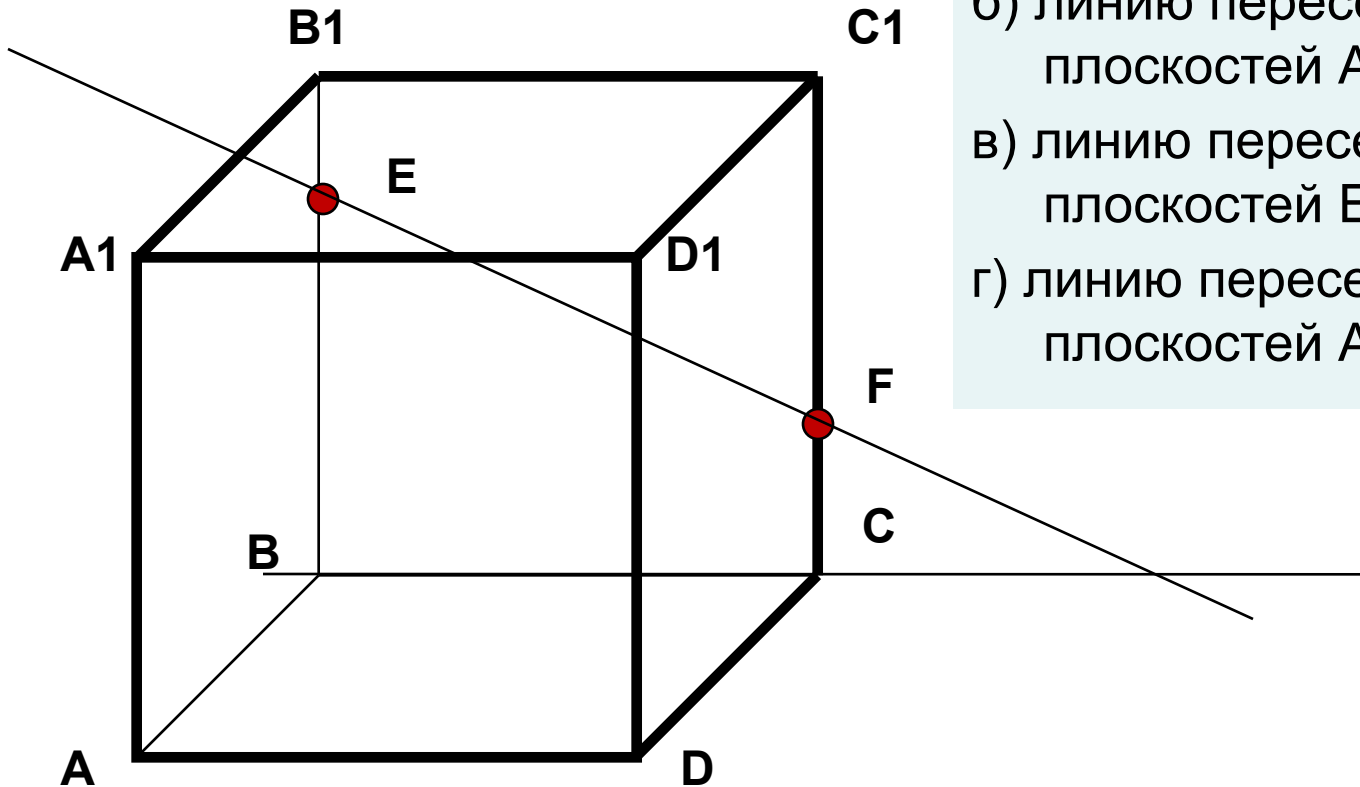


Найдите:

- точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C

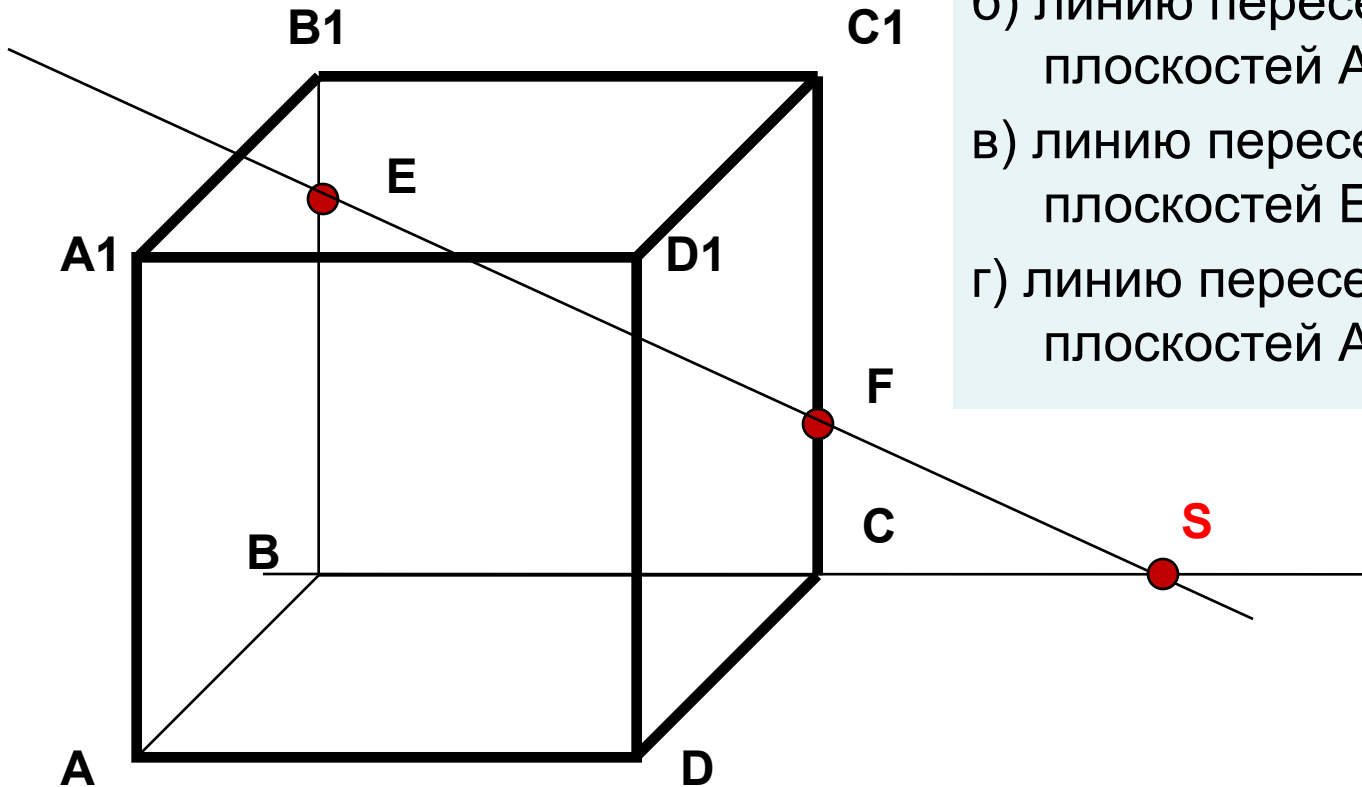
Найдите:

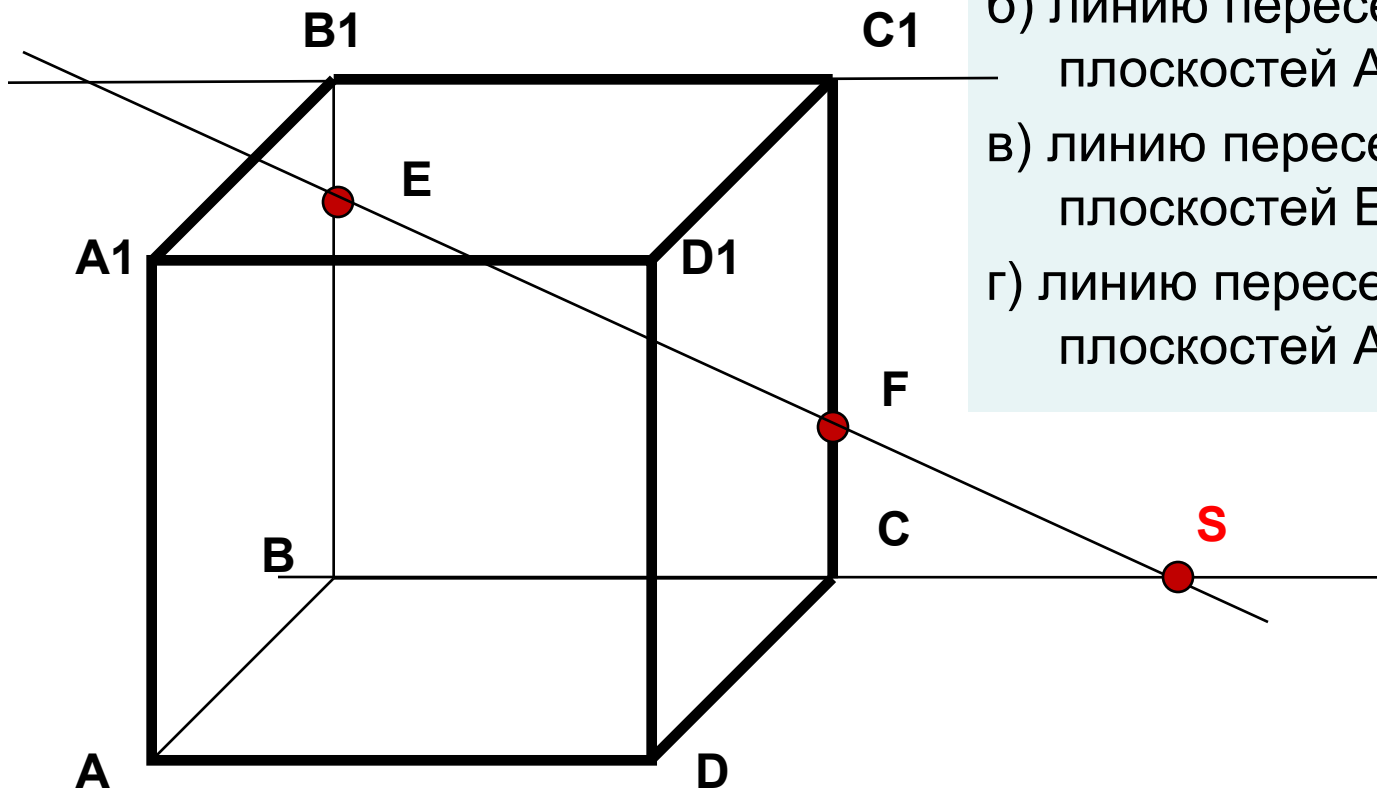
- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



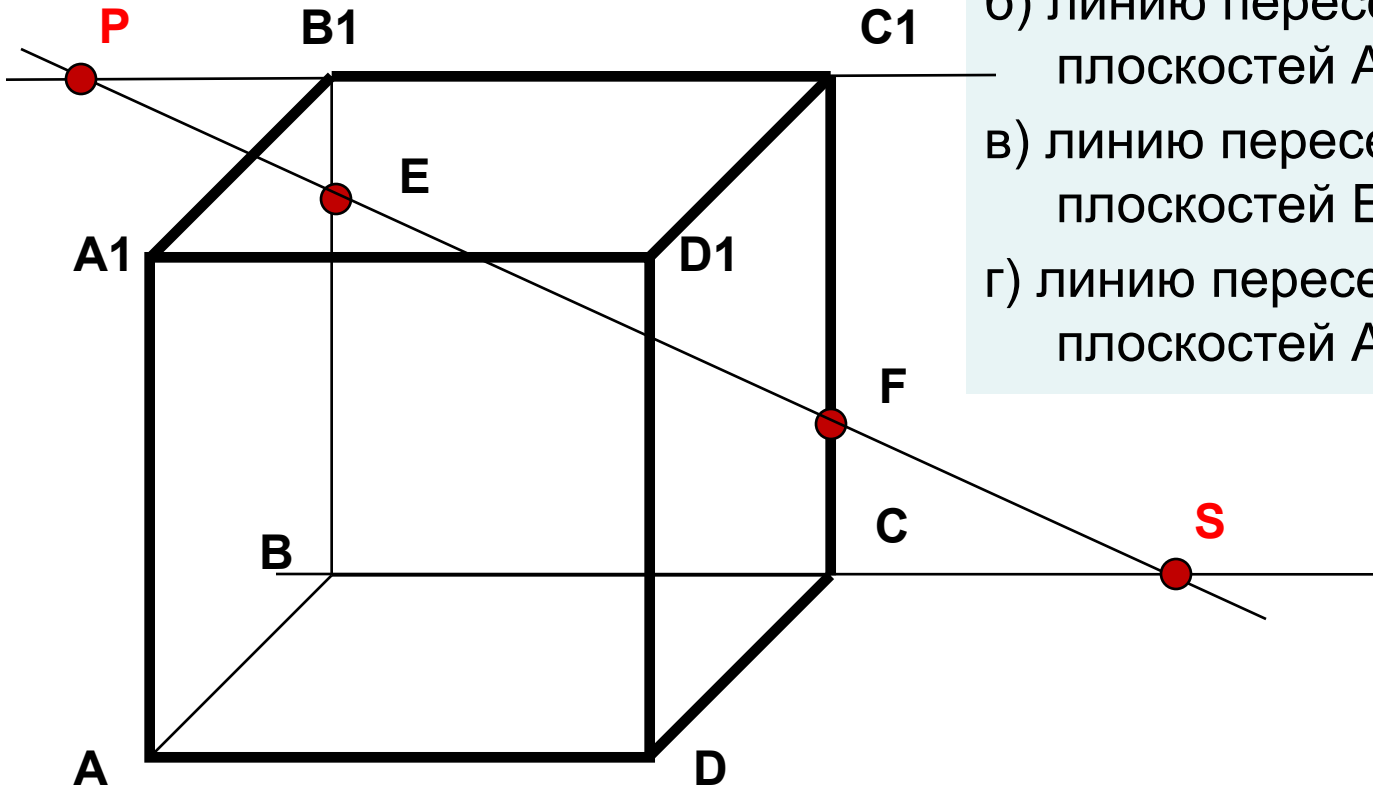


Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C

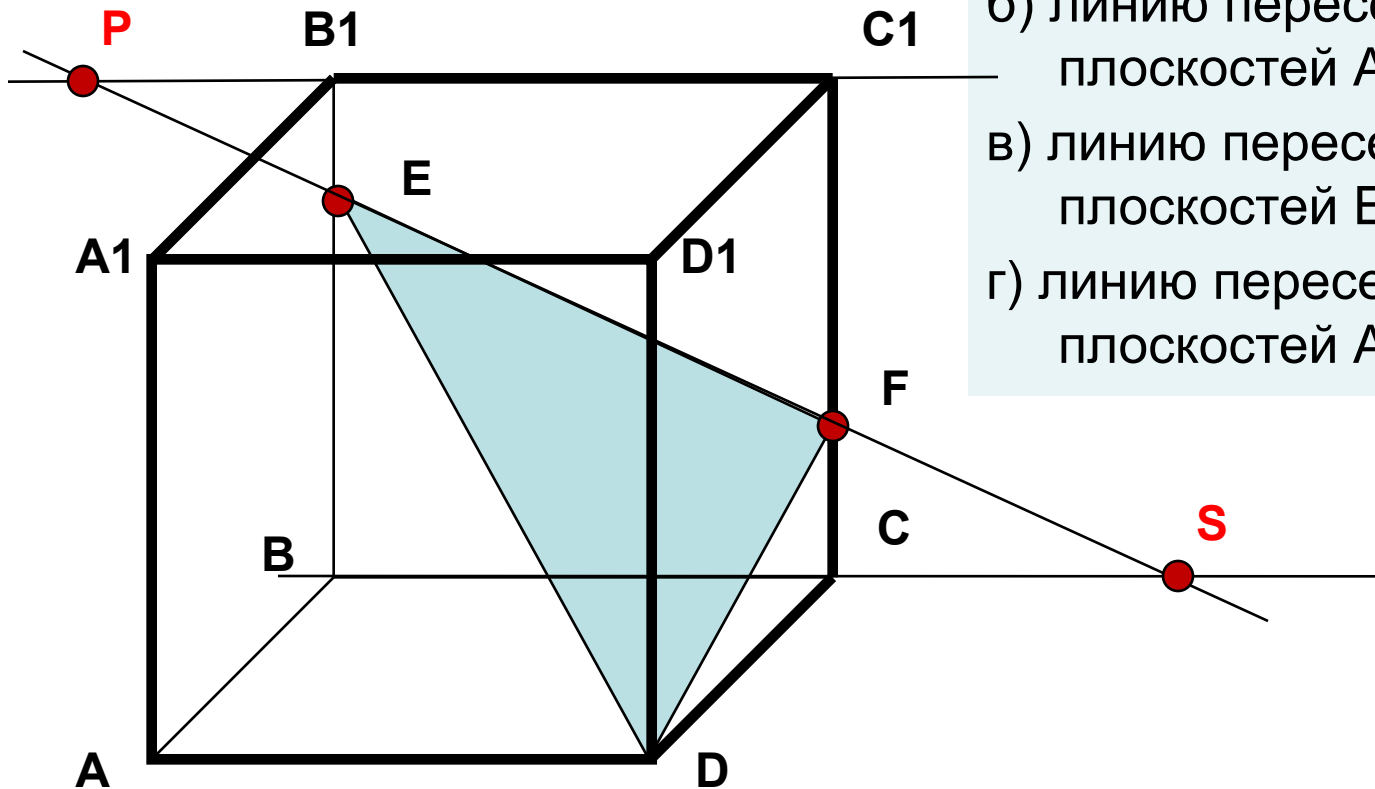
Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



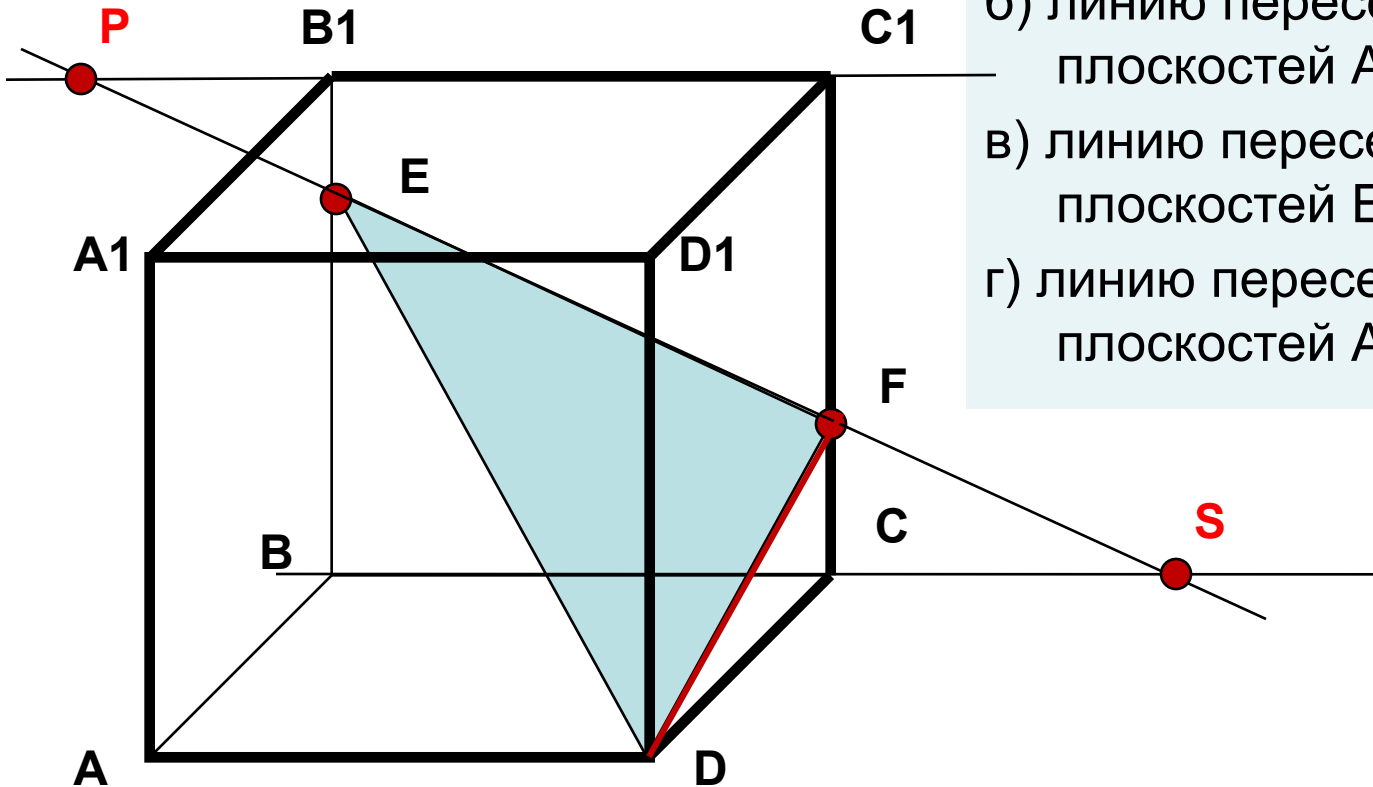
Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



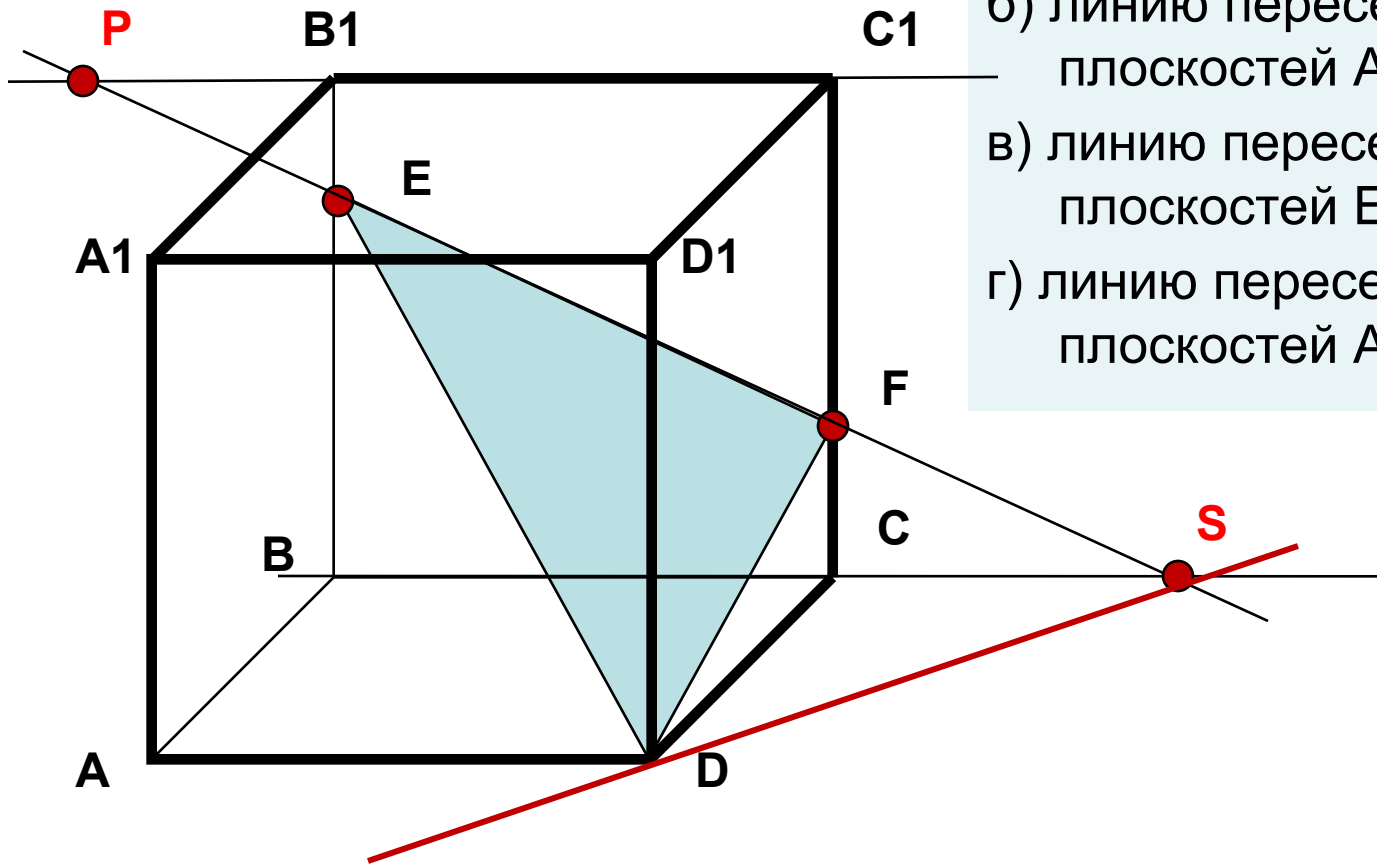
Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



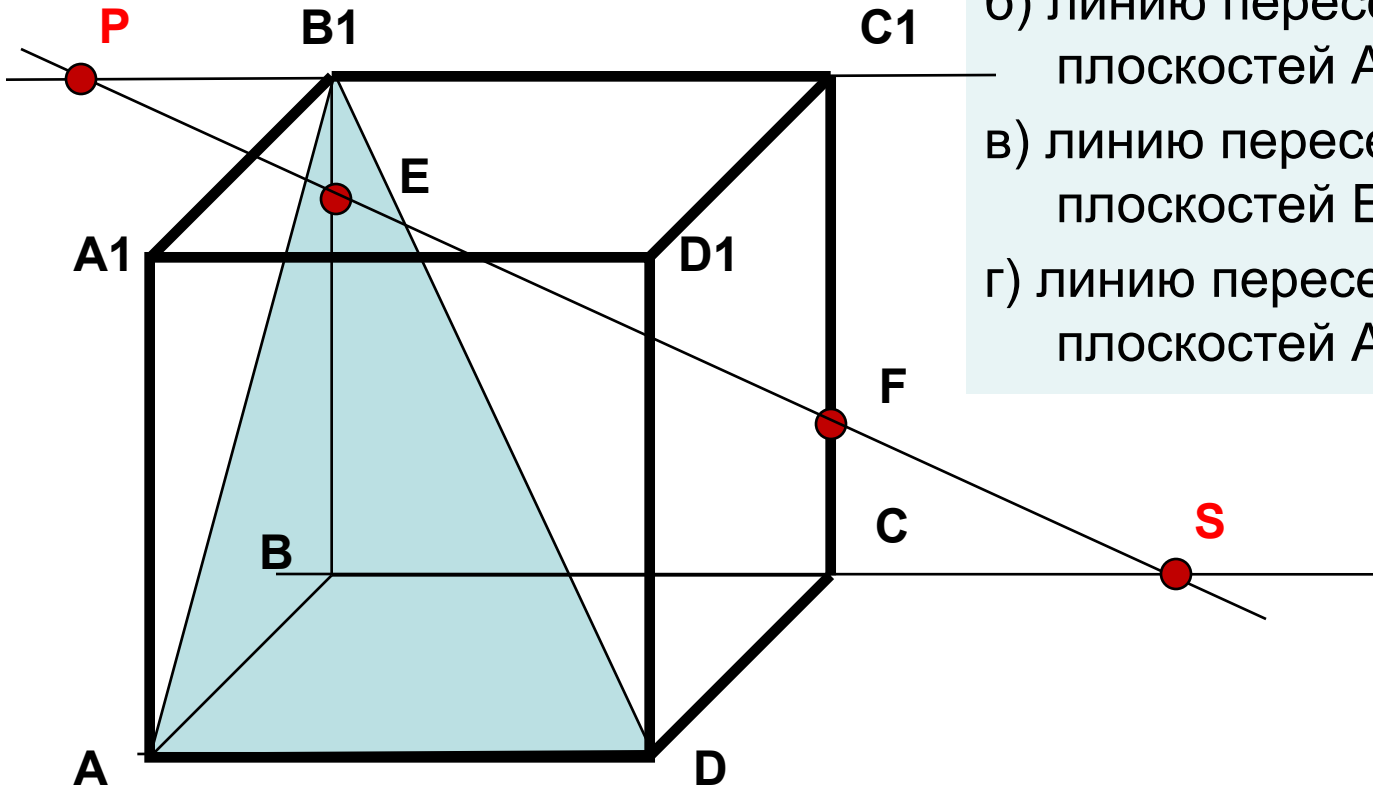
Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



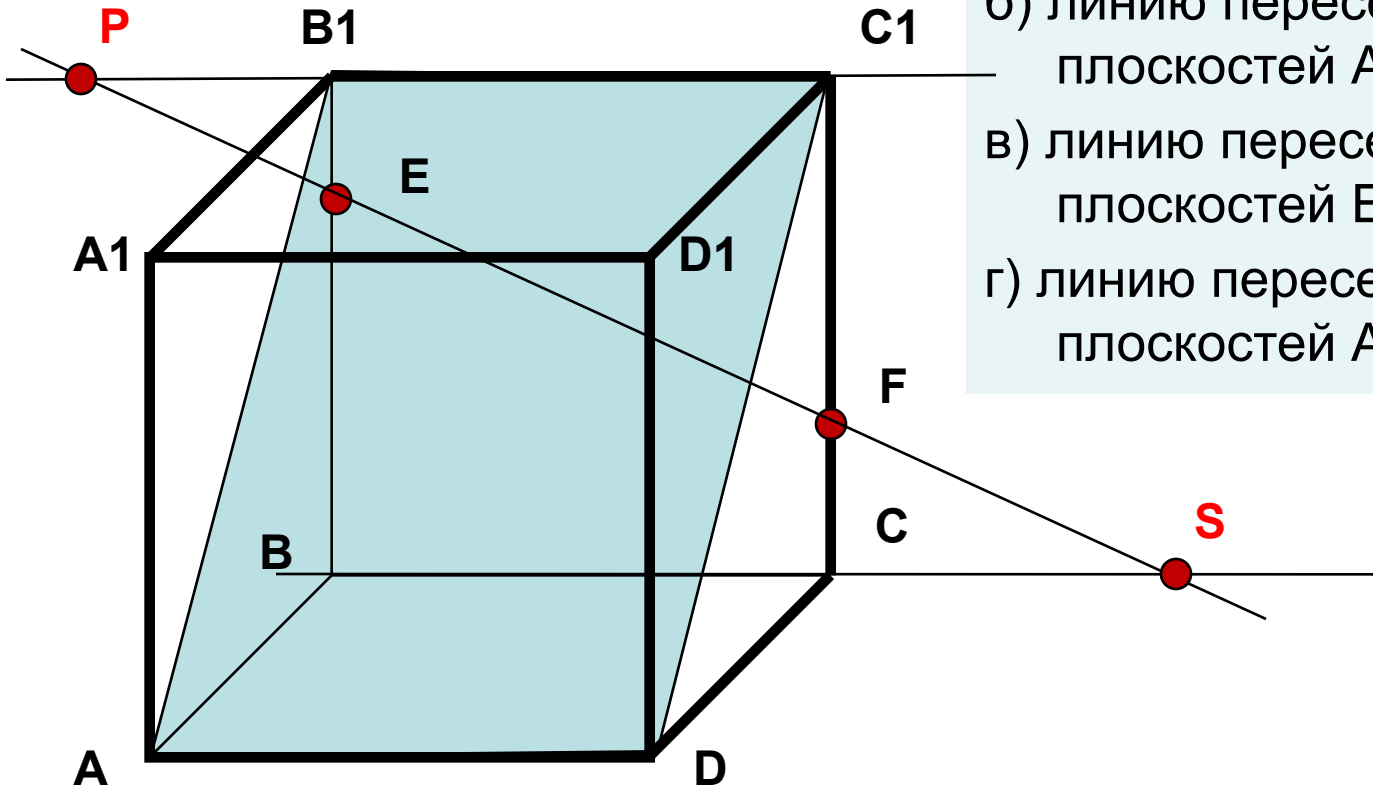
Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



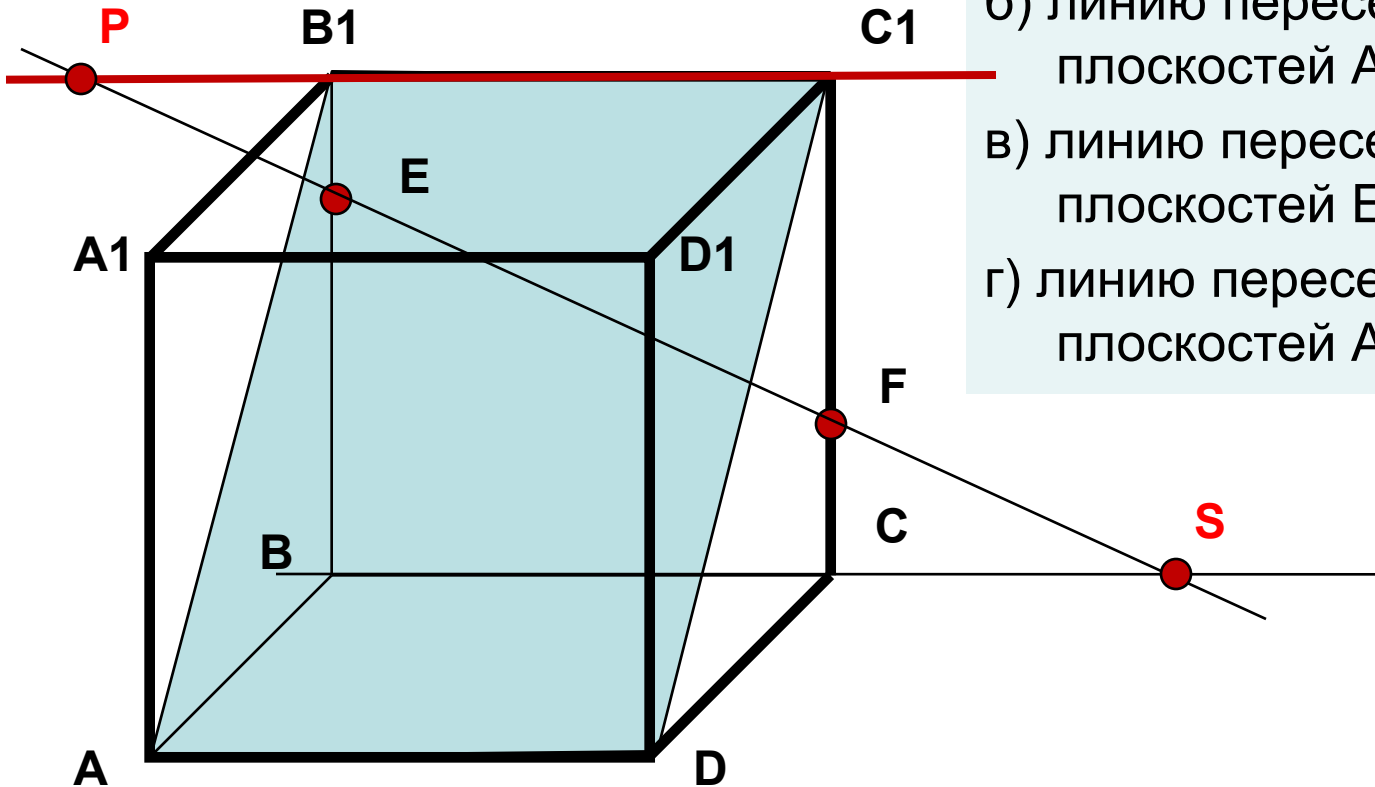
Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C



Найдите:

- а) точки пересечения прямой EF с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$
- б) линию пересечения плоскостей ADF и EFD
- в) линию пересечения плоскостей EFD и ABC
- г) линию пересечения плоскостей AB_1D и BB_1C

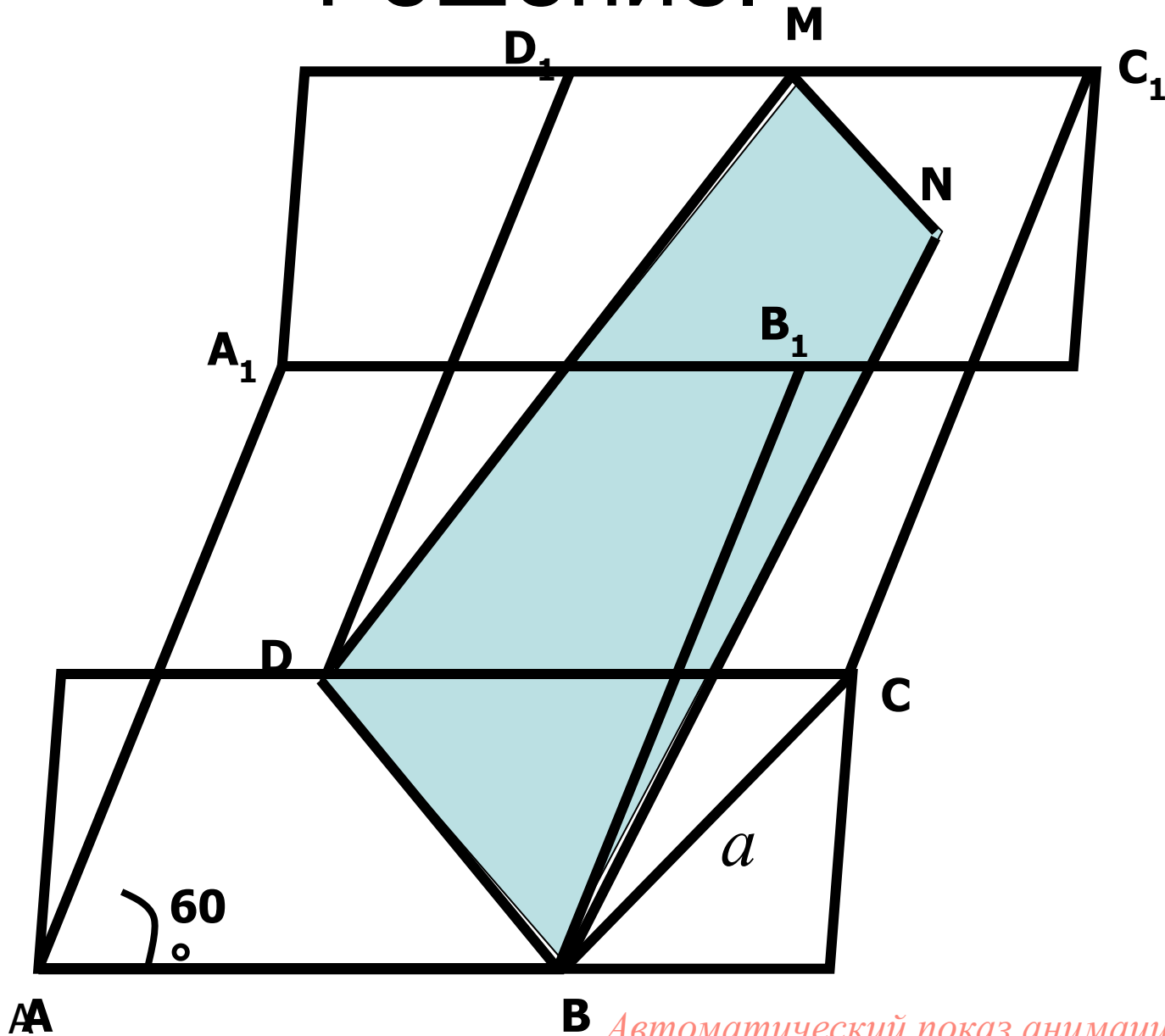


Решите задачу

- *Все грани параллелепипеда – равные ромбы со стороной a см и острым углом 60° .*
 - а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B , D и M , если M – середина ребра B_1C_1 .*
 - б) Докажите, что построенное сечение – равнобедренная трапеция.*
 - в) Найдите стороны трапеции.*

Решение.

a)



B *Автоматический показ анимации!*

б) Пусть α – секущая плоскость,

$\alpha \cap ABCD = BD$, $\alpha \cap BCC_1V_1 = BM$, $MN \parallel BD$.
Сечение – трапеция $BDNM$.

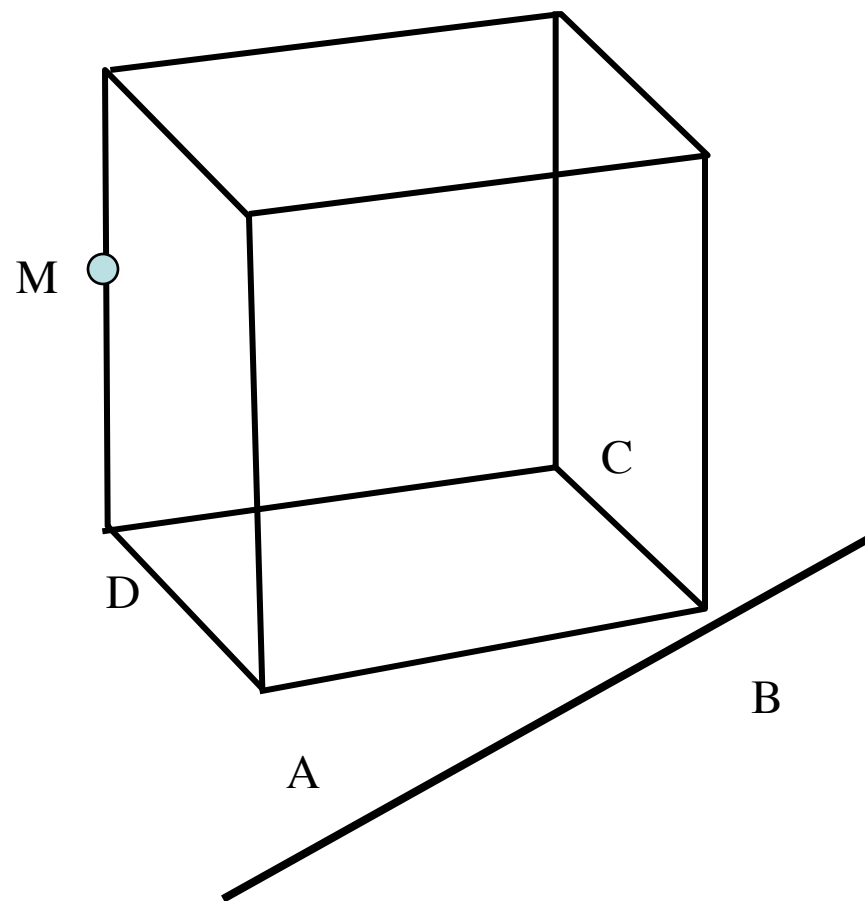
$\Delta BB_1M = \Delta DD_1N$ ($BB_1 = DD_1$, $B_1M = D_1N$,
 $\angle B_1 = \angle D_1$)

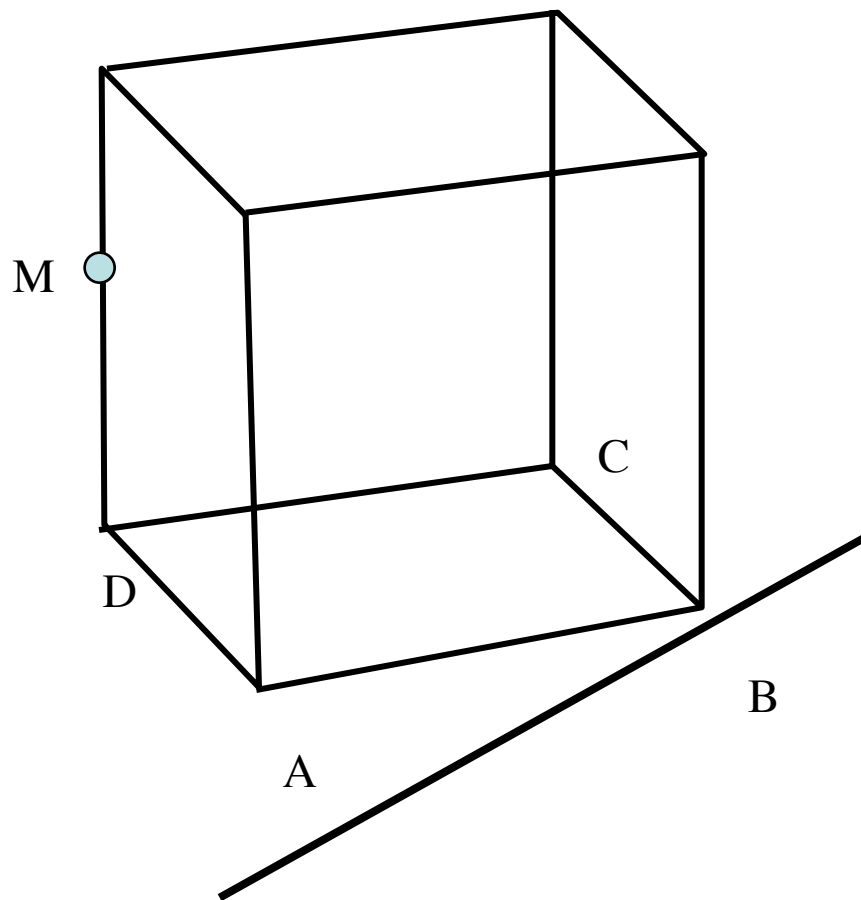
Следовательно, $BM = DN$, значит,
трапеция $BDNM$ – равнобедренная.

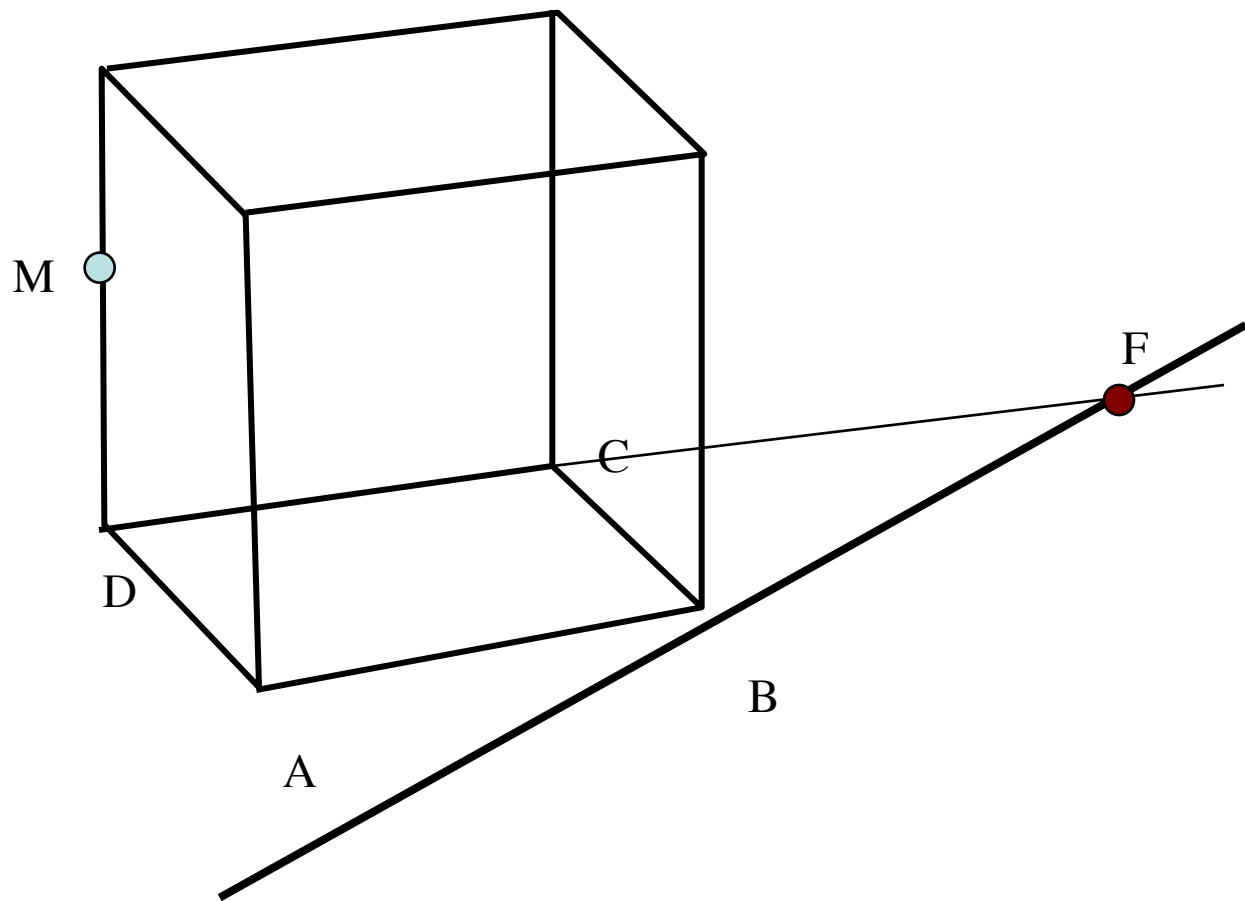
в) $BD = a$ см, $MN = \frac{a}{2}$ см, $BM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ см.

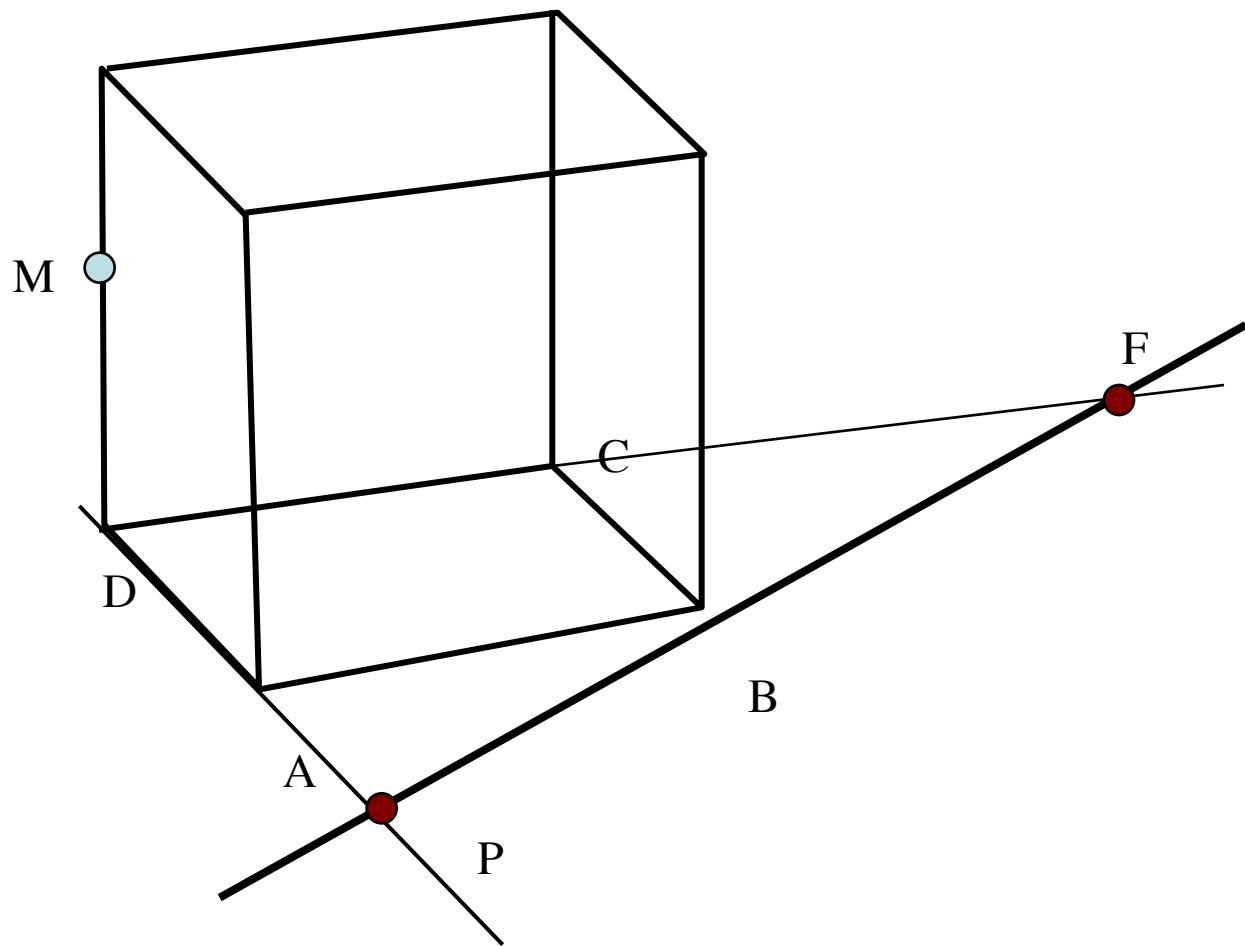
Задача.

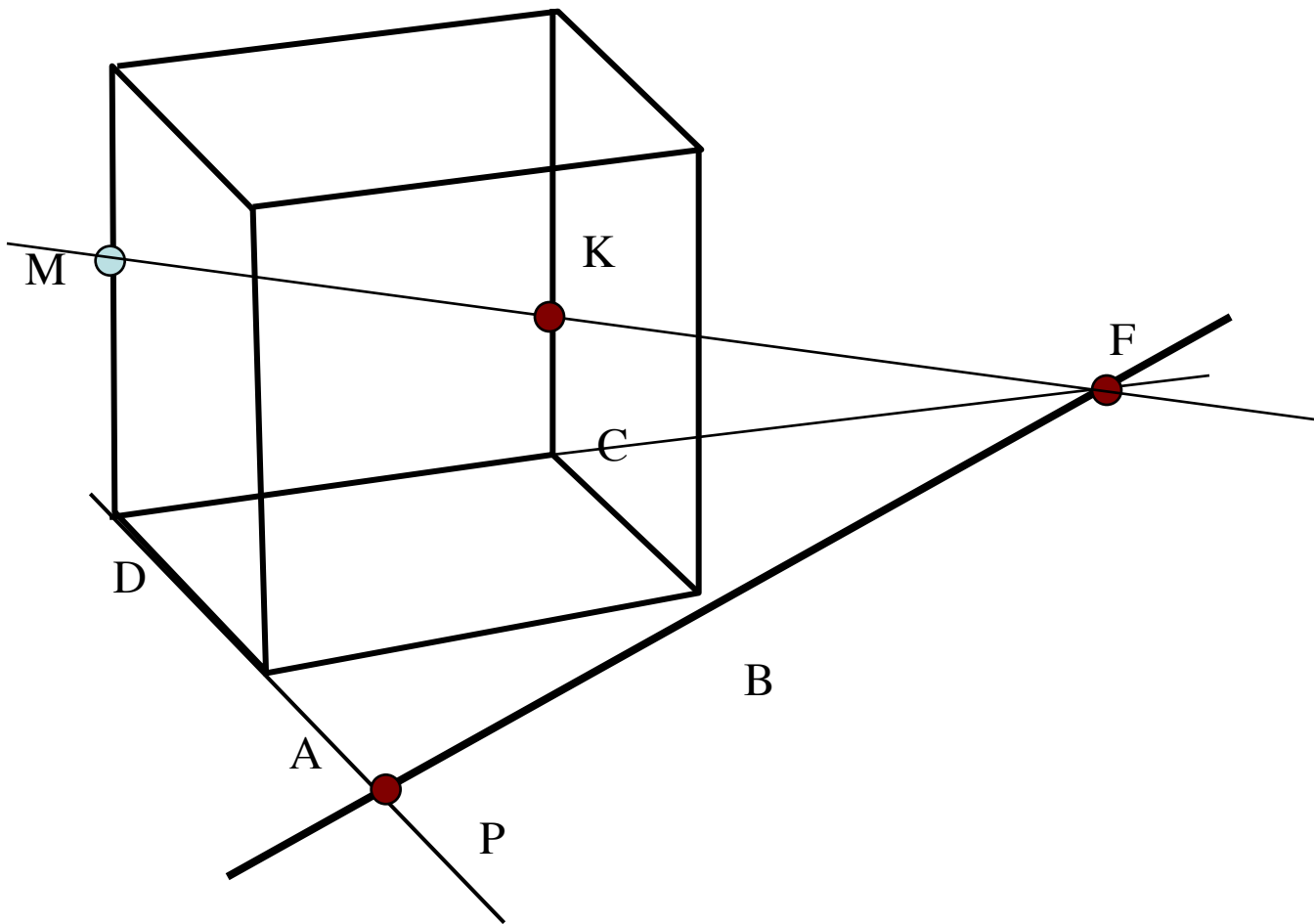
Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку на его ребре и прямую, лежащую в плоскости нижнего основания.

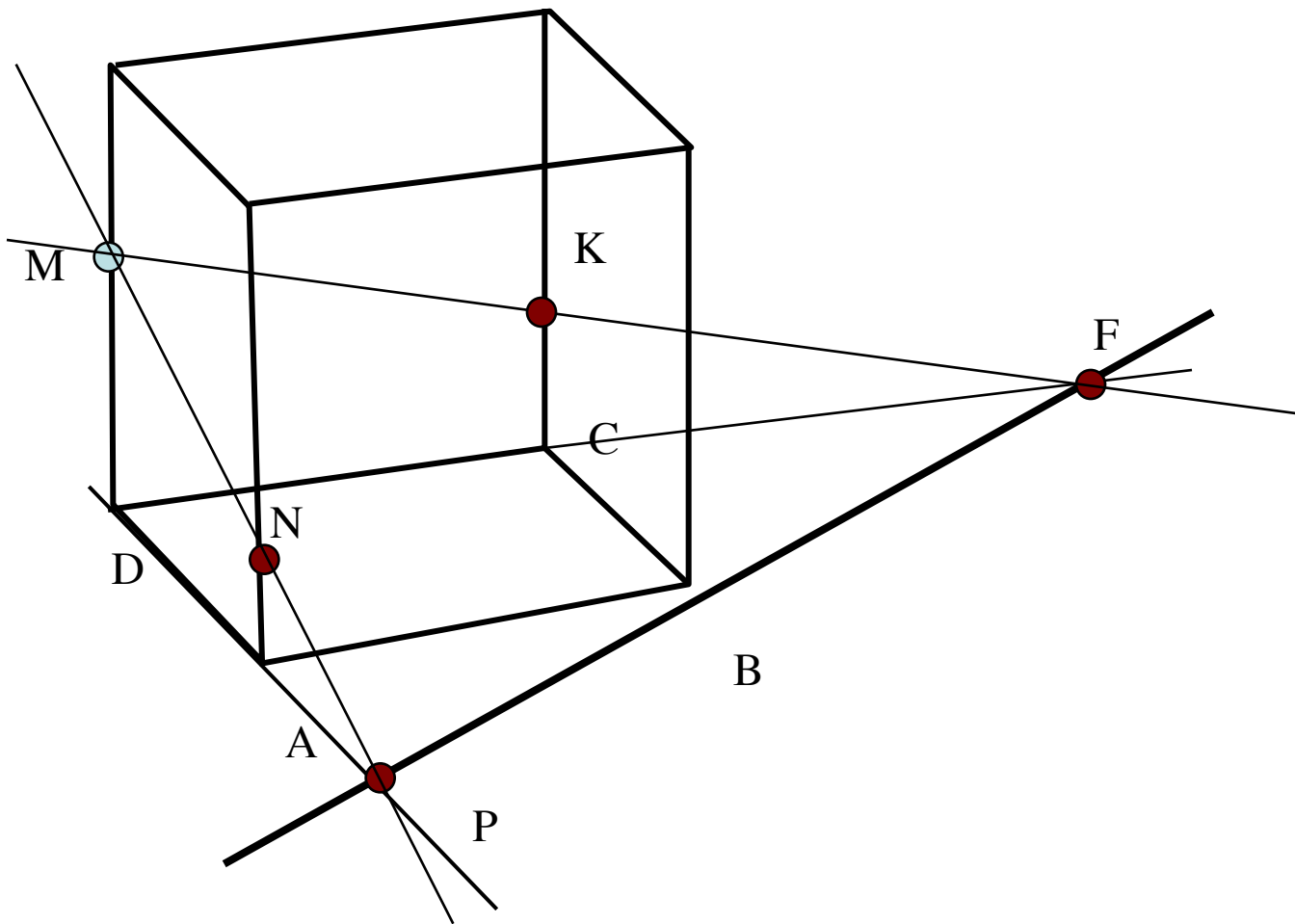


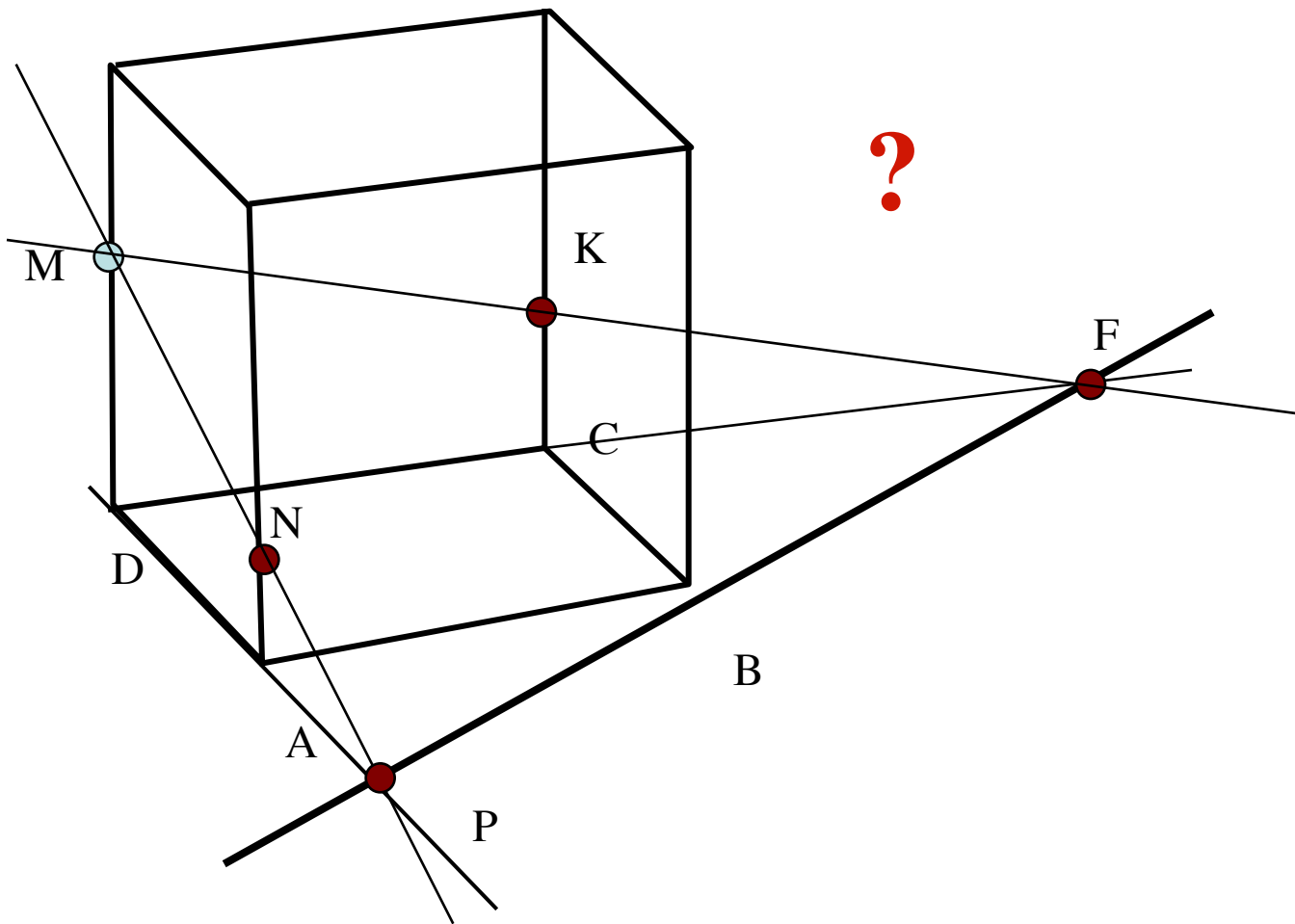




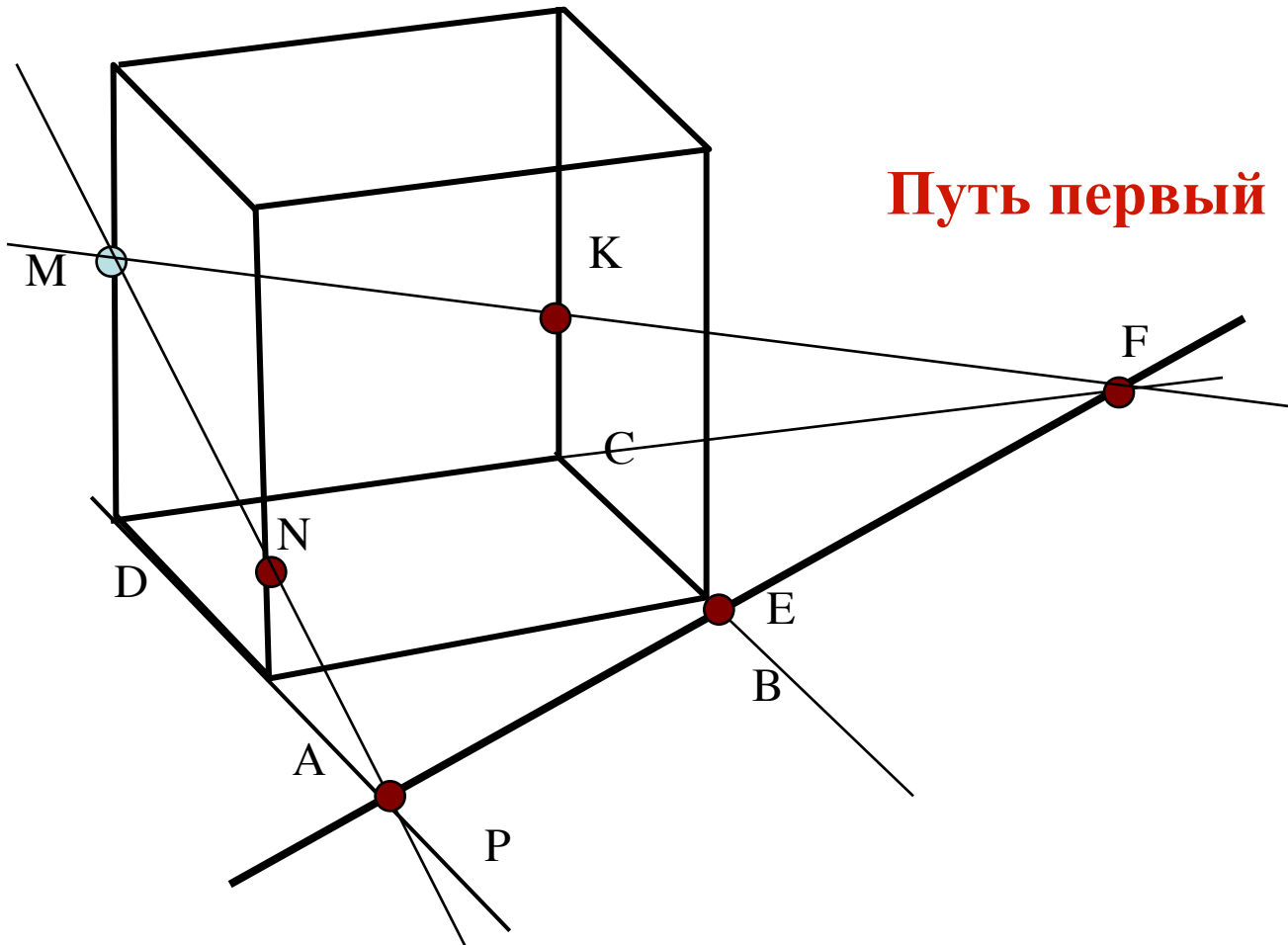




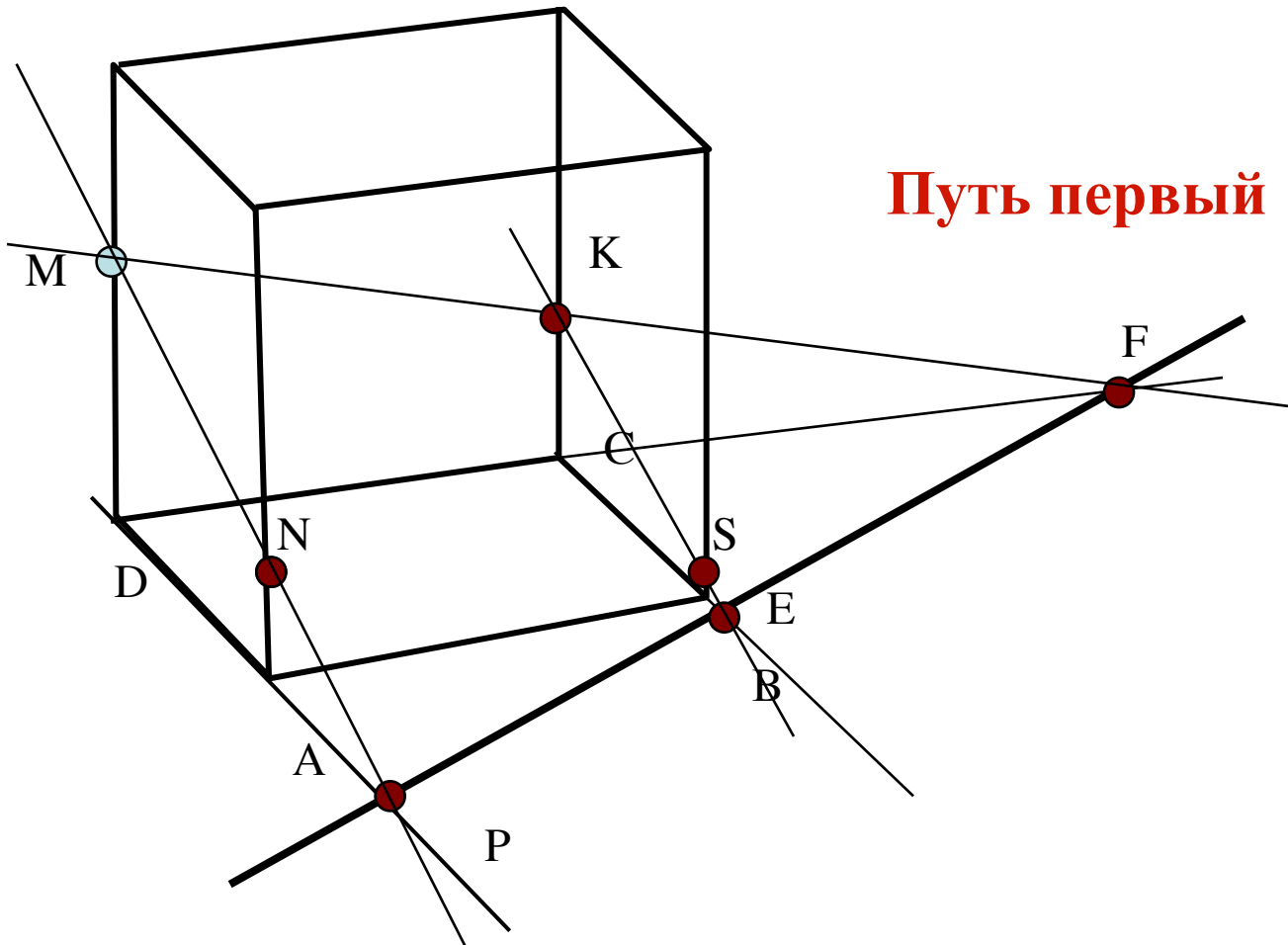




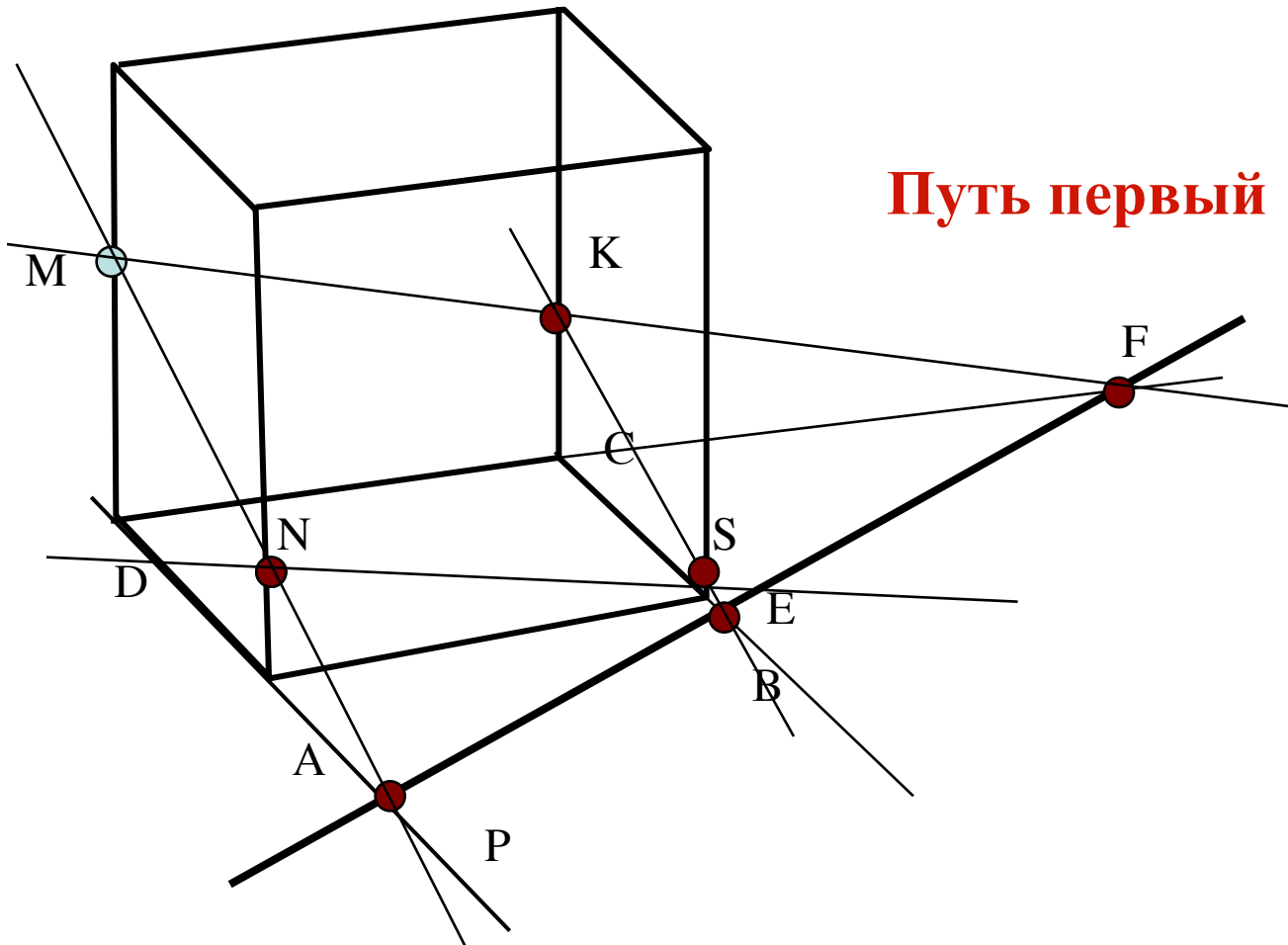
Метод следов



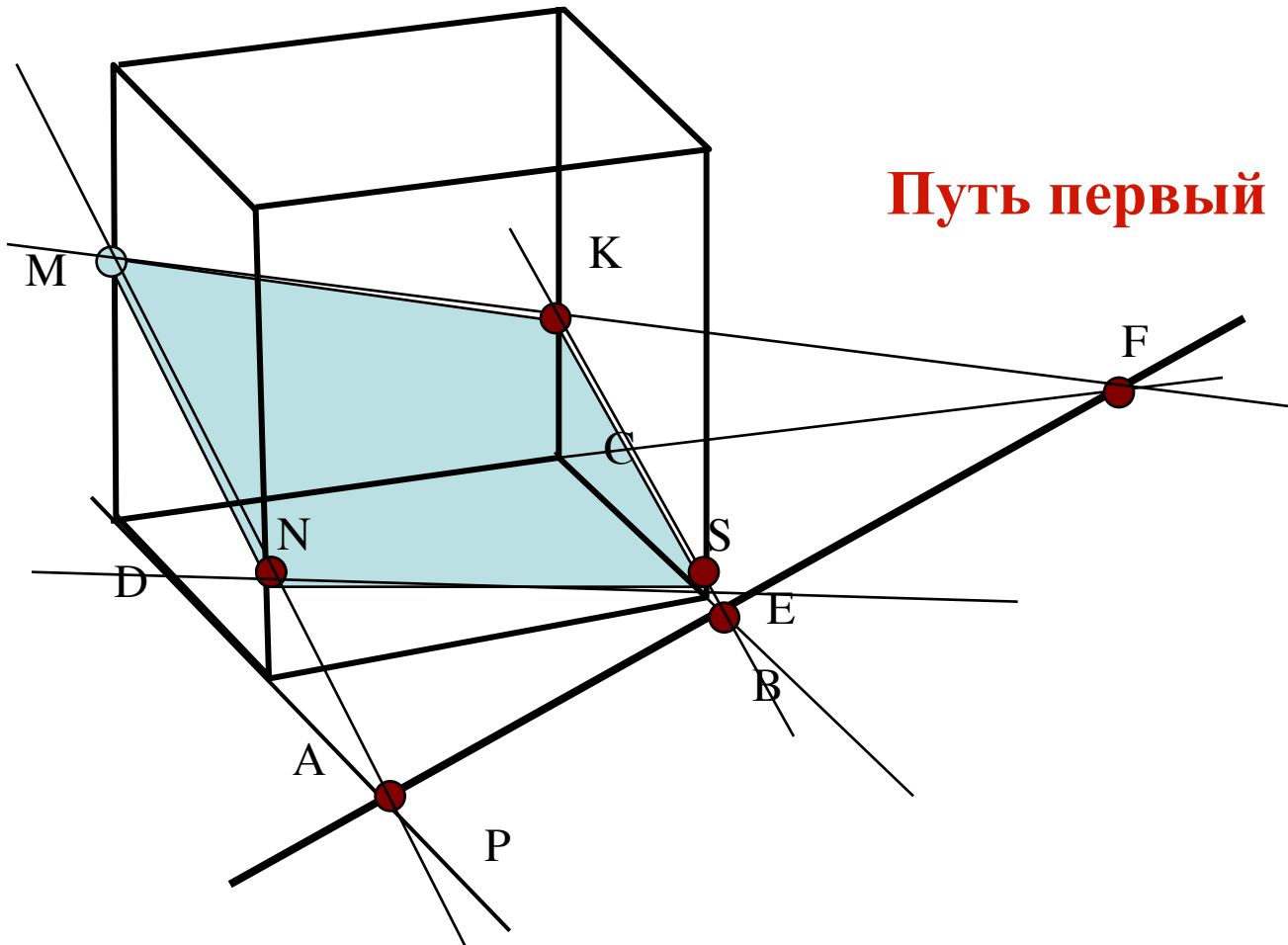
Метод следов



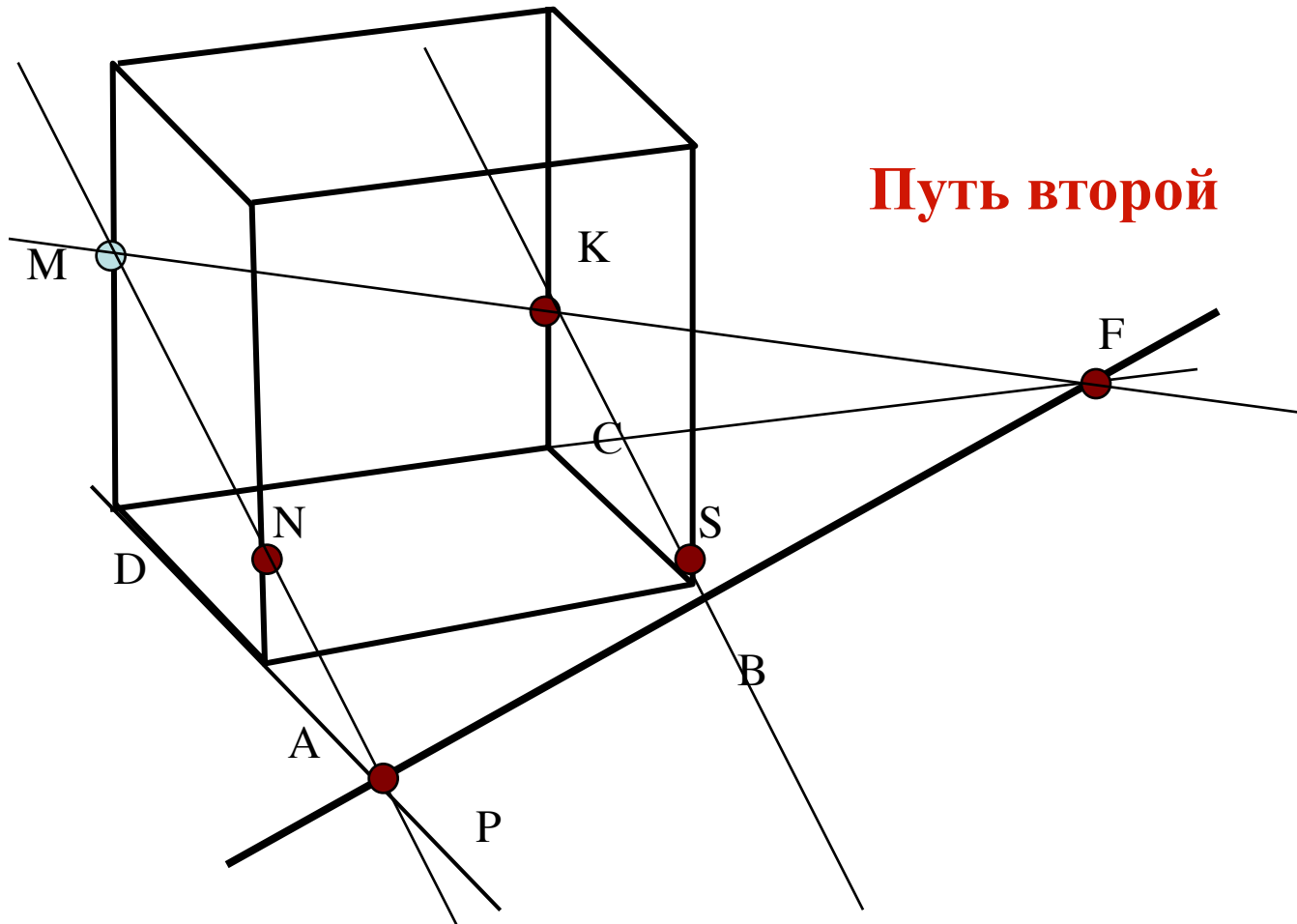
Метод следов



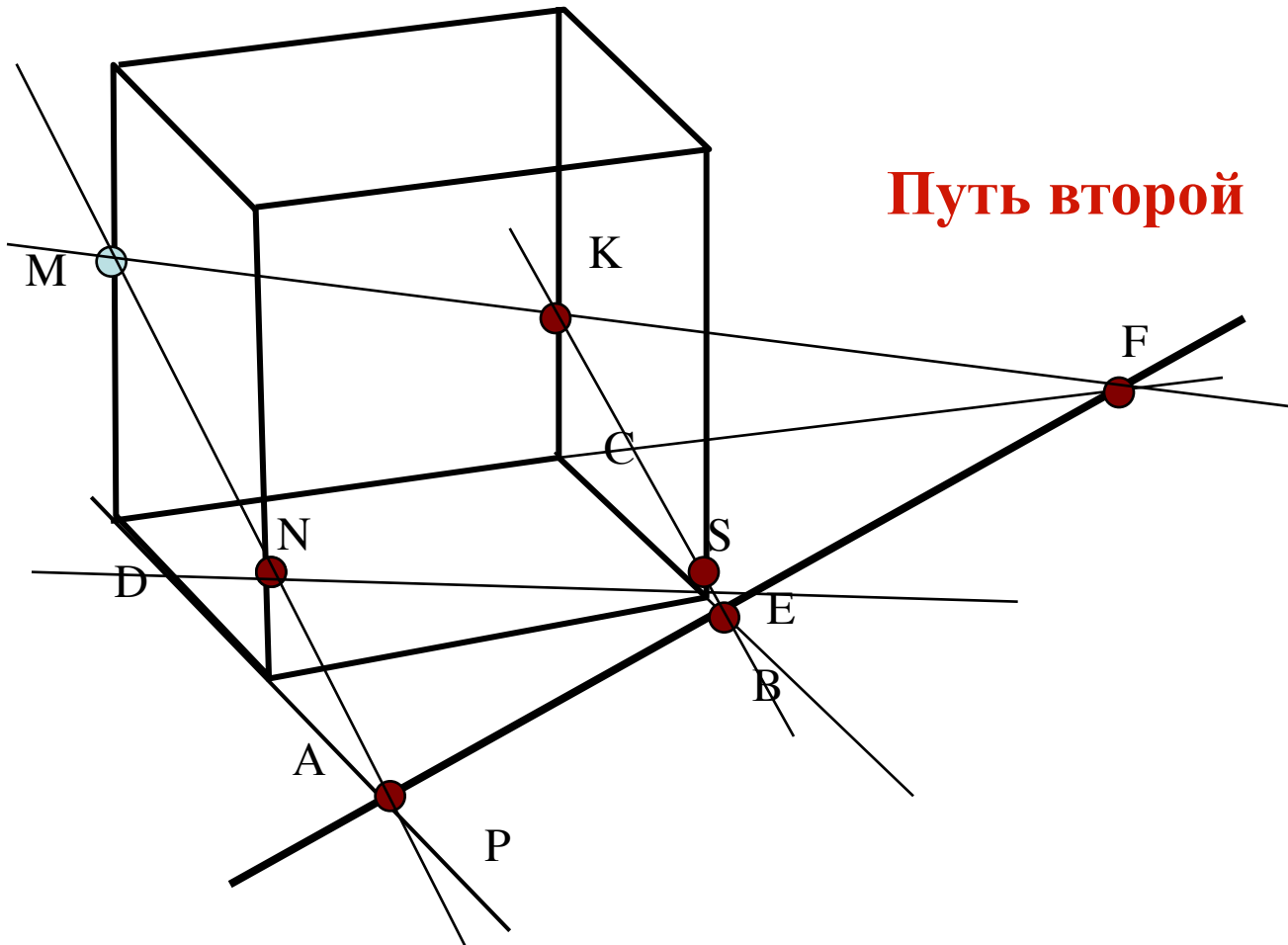
Метод следов



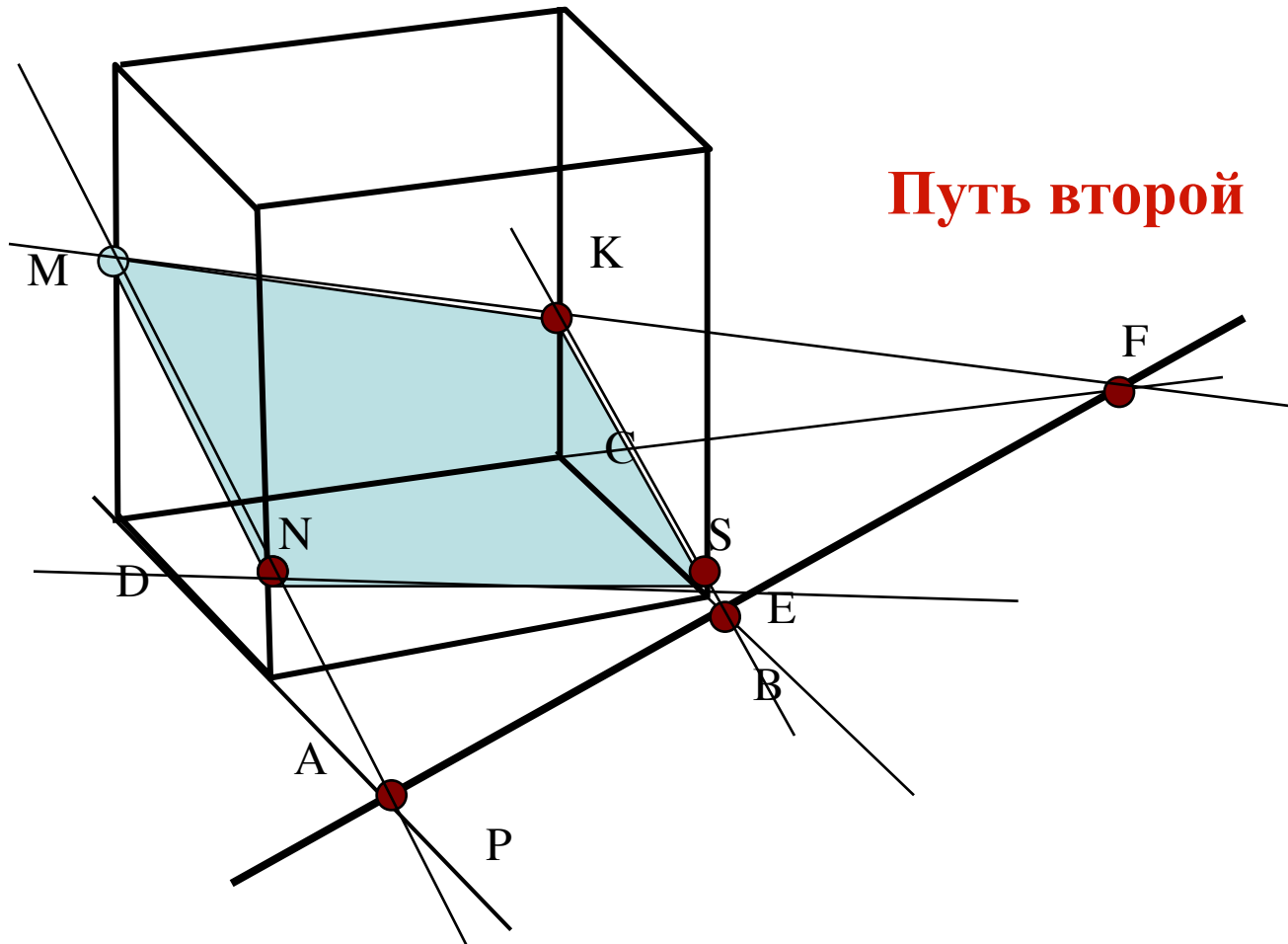
Метод параллельных прямых



Метод параллельных прямых



Метод параллельных прямых



При подготовке работы были ИСПОЛЬЗОВАНЫ

- «Построение сечений многогранников», составитель: Екимова Ирина Викторовна, учитель информатики, МОУ «СОШ №36» г.Норильска;
- «Построение сечений многогранников», составитель: Мачихина Зинаида Ефимовна, ПЛ №17;
- «Построение сечений многогранников», Сейтова Галина Евгеньевна, учитель информатики школы №198, г. Москва;
- «Построение сечений многогранников», Остапенко Ирина Евгеньевна, МОУ «Гимназия №6» (УВК «Бекар»)