

Многогранники.

*Работа с многогранниками в
программе Cabri 3D*

***10 «а» класс (хим-био
группа)***

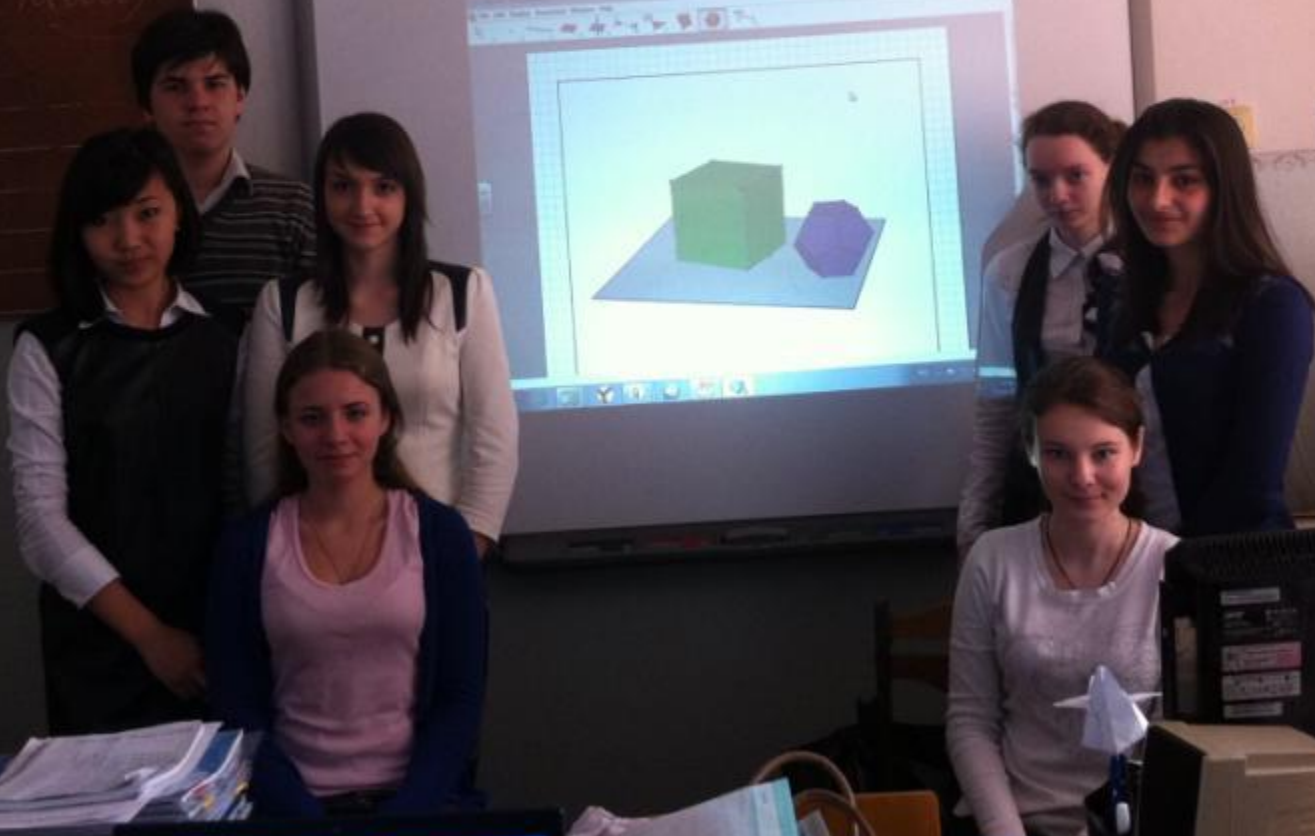
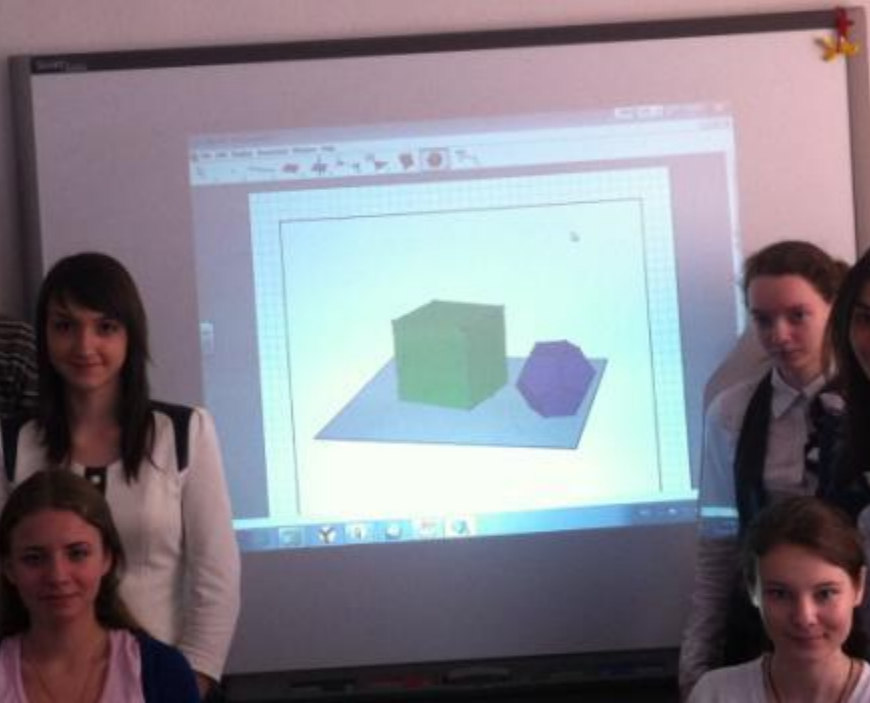
Авторы:


Учитель математики: Луштей Татьяна Николаевна

Учитель информатики: Романова Марина Игоревна

2014 г.

11.18.17 (18.00)
Wahana





*«Правильных многогранников
вызывающе мало, но этот весьма
скромный по численности отряд
сумел пробраться в самые глубины
различных наук».*

Л. Кэрролл

Цели создания проекта:

Обучающая цель: Закрепить понятие о выпуклых многогранниках, их некоторых свойствах, выработка навыков решения задач на построение сечений многогранников в программе Cabri 3D, показать связь математики и информатики с жизнью. Повторение формул для вычисления площадей геометрических фигур, площадей поверхностей многогранников; привитие практических навыков решения заданий ЕГЭ; умения работать в программе Cabri 3D.

Развивающая цель: формирование компетентности в сфере самостоятельной познавательной деятельности, навыков самостоятельной работы с большим объёмом информации, формирование навыков работы в команде, развитие творческих способностей личности, умений сравнивать, выявлять закономерности; развитие логического мышления, памяти и математической речи; графической культуры.

Задачи нашего проекта:

- Обобщение и систематизация знаний
- Расширение спектра задач, доступных учащимся
- Формирование у учащихся устойчивого интереса к геометрии и информатике, выявление способностей учащихся к данным предметам
- Ориентация на профессию, существенным образом связанную с математикой и информатикой, подготовка к сдаче ЕГЭ и обучению в ВУЗе

Наглядная топология как средство познания реального мира

- Понятие поверхности
- Аналитическое задание поверхности
- Параметрические уравнения
- Примеры гомеоморфных поверхностей

Ход работы:

- На уроках геометрии ознакомились с многогранниками
- Изготовили модели правильных многогранников
- Составили и решили задачи разного типа на тему «Многогранники»
- Разделились на 4 группы:

I группа «Призмы»

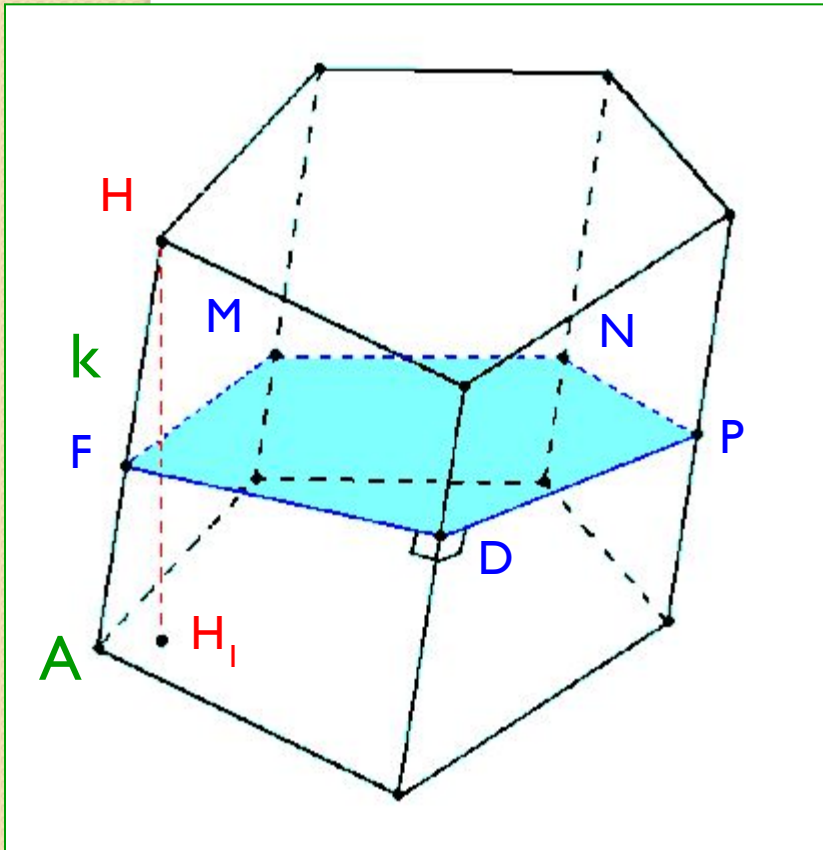
- Создать презентацию на повторение данной темы: определение призмы, виды призм, элементы призмы, формулы для вычисления площади поверхности призмы (боковой и полной)
- Научиться строить призму в программе Cabri 3D
- Составить и решить 3 задачи на применение формул для вычисления площади призмы, изготовить модель фигуры.



Призма

: основания – равные n – угольники, лежащие в параллельных плоскостях, боковые грани –

Наклонная – боковые грани – параллелограммы.



H – высота призмы

k – боковое ребро призмы

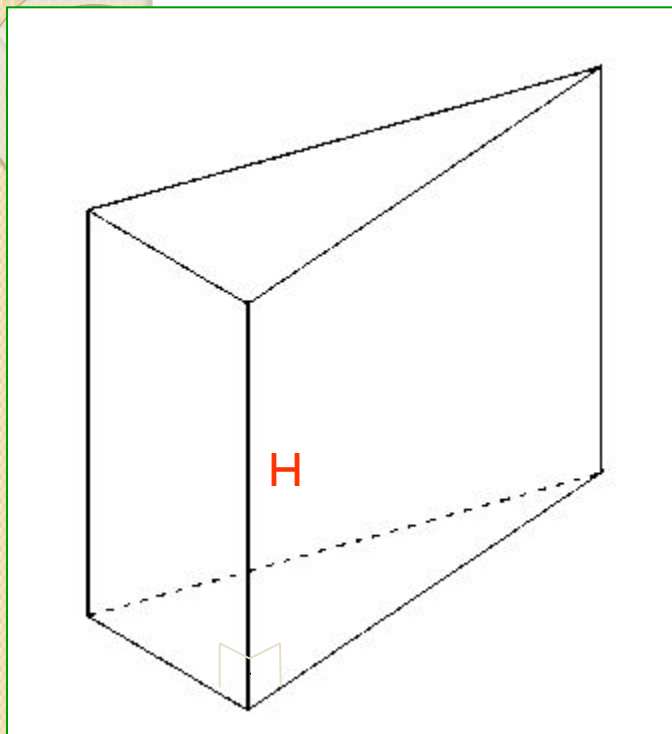
$FMNP$ – сечение, перпендикулярное боковому ребру

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot k$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

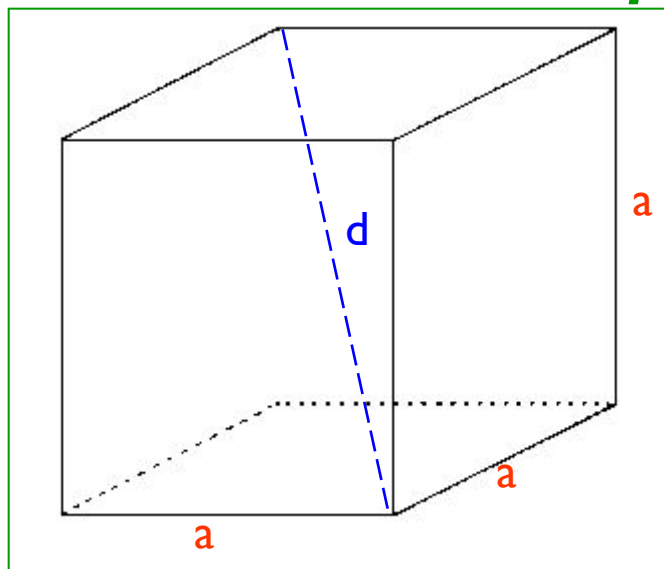
$$V = S_{\text{сеч.}} \cdot k$$

Прямая призма – боковые грани – прямоугольники.



Куб

все грани -
квадраты



$$V = a^3$$

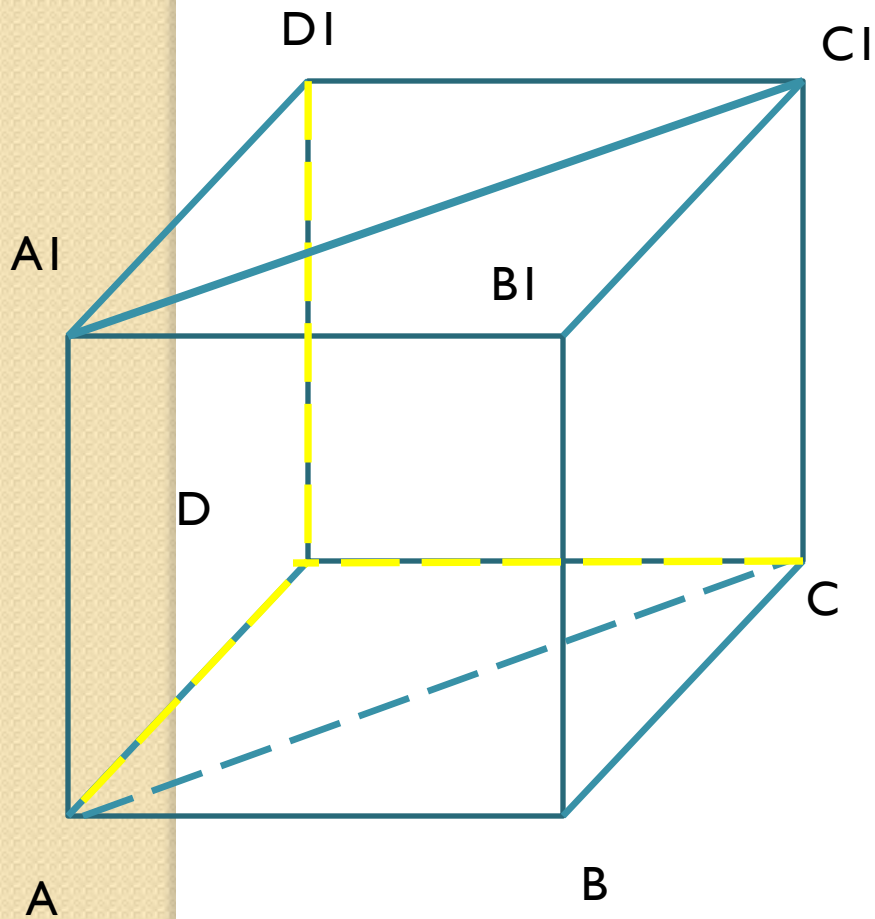
$$d^2 = 3 \cdot a^2$$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

$$L_{\text{каркаса}} = 12 \cdot a$$

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H$$

$$S_{\text{п.п.}} = 6 \cdot a^2$$



Дано:
ABCDA₁D₁C₁D₁-прямая призма,
AA₁=10 см, AB=6см, BC=8см.

Найти:
Площадь AA₁C₁C

Решение:

Диагональные сечения данной призмы равны, так как равны диагонали основания и боковые ребра.

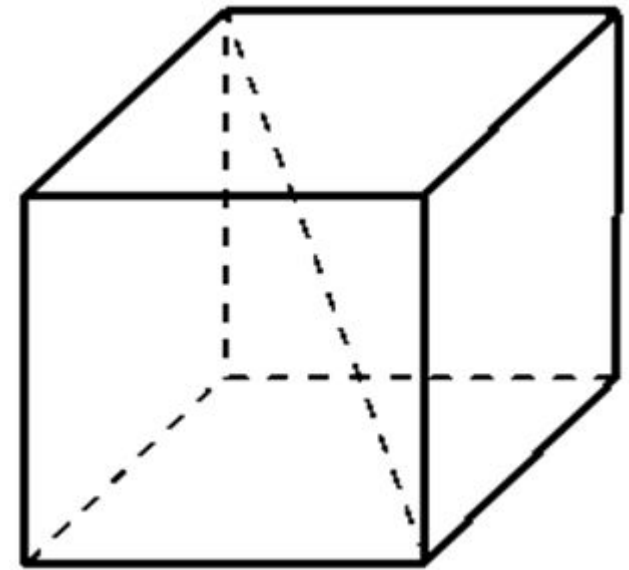
Диагональное сечение AA_1C_1C -прямоугольник. Сторона AC есть диагональ основания $ABCD$. Из прямоугольного тр-ка ABC по теореме Пифагора

$AC = 6^2 + 8^2 = 10$ см. Поэтому

$$S_{AA_1C_1C} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2$$

Ответ: 100 см^2

- Диагональ куба равна .
Найдите его объем.



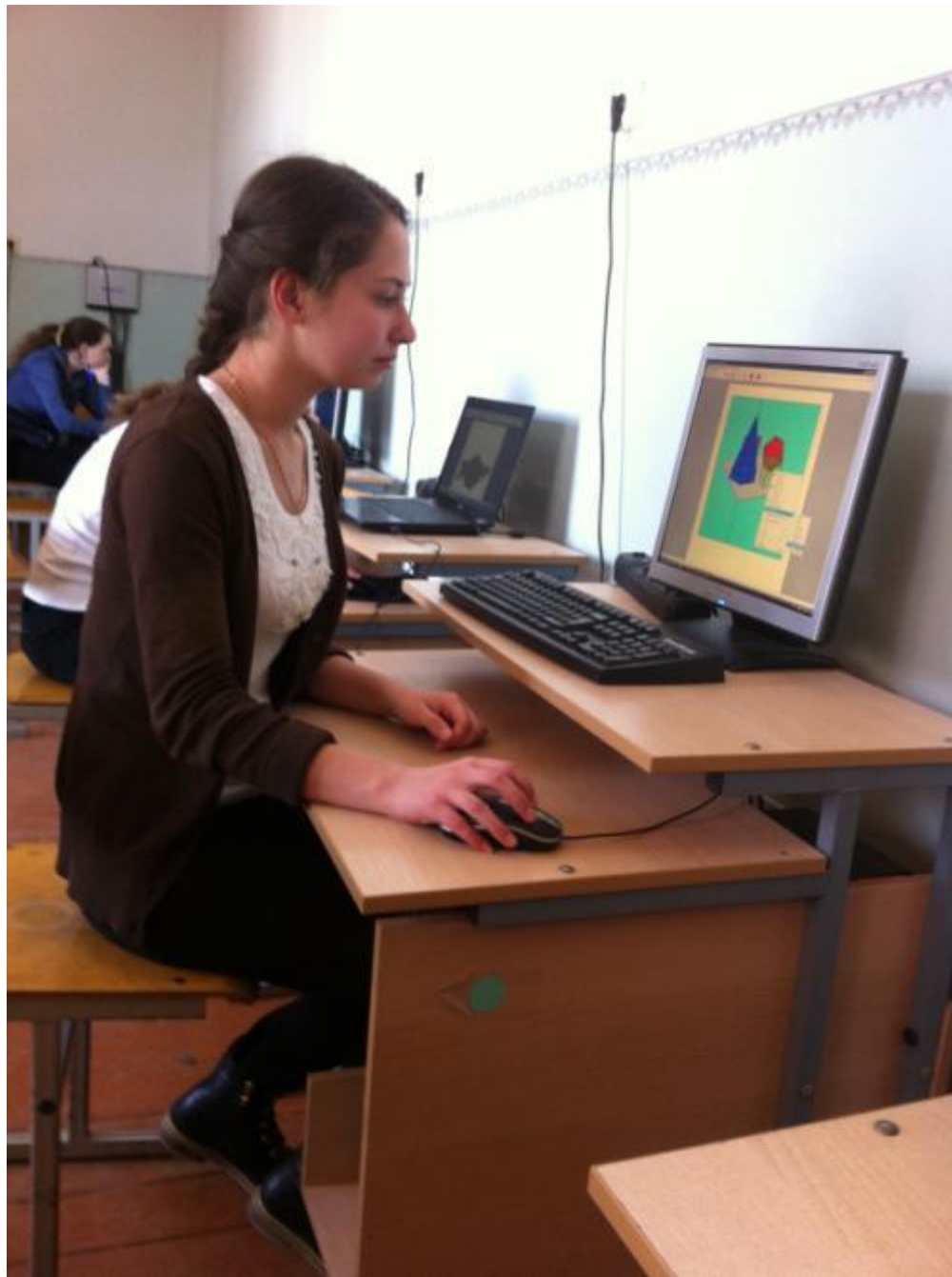
Решение:

Диагональ куба в раз $\sqrt{3}$ больше его ребра. Получим, что ребро равно $a = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$. Тогда объем куба $V = a^3 = 8$.

Ответ: 8

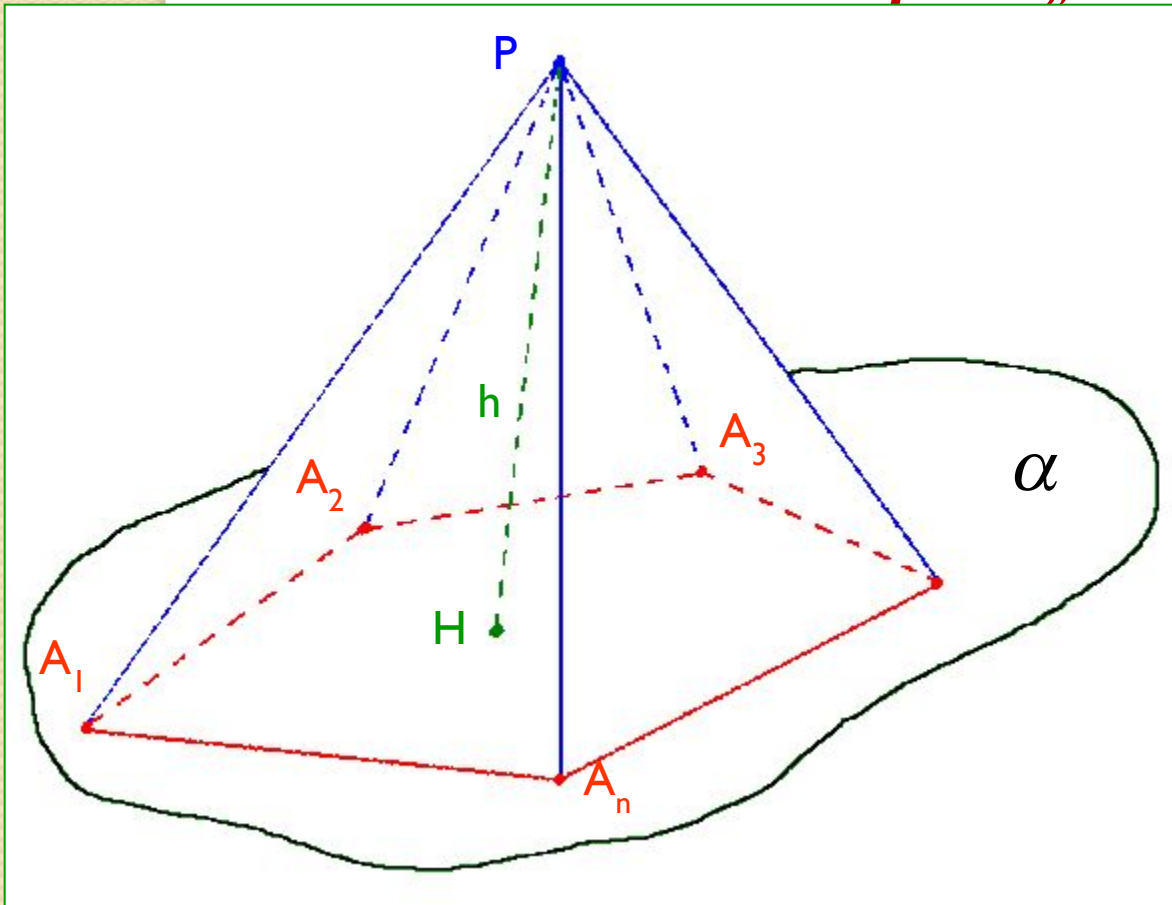
2 группа «Пирамиды»

- ❑ Создать презентацию на повторение данной темы: определение пирамиды, виды пирамид, элементы пирамид, формулы для вычисления площади поверхности пирамиды (боковой и полной).
- ❑ Научиться строить пирамиду в программе Cabri 3D
- ❑ Составить и решить 3 задачи на применение формул для вычисления площади пирамиды, изготовить модель фигуры.



Пирамида

– это многогранник,
состоящий из n -угольника
 $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ (основание) и n
треугольников (боковые
грани), имеющих общую



$PA_1; PA_2; PA_3; \dots; PA_n$ –
боковые ребра

$A_1 A_2; \dots; A_1 A_n$ –
ребра основания

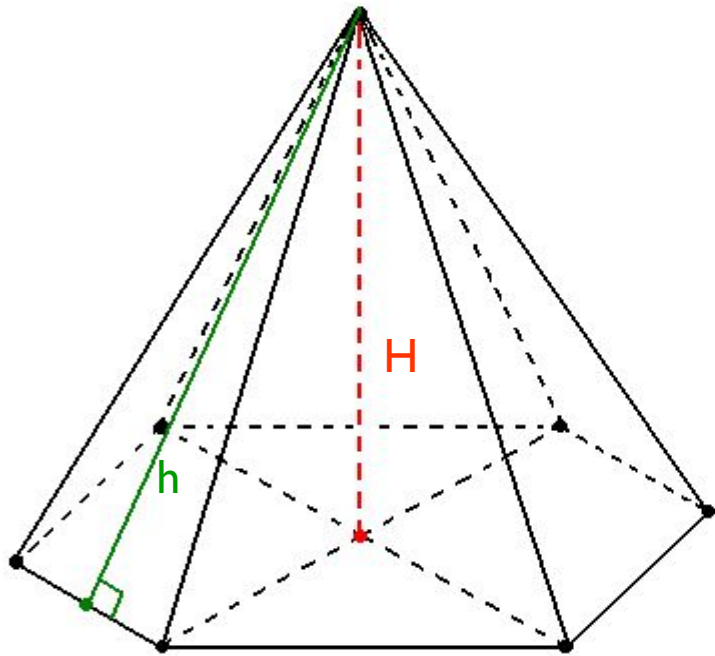
PH – высота
пирамиды - h

$$S_{n.n.} = S_{бок.} + S_{осн.}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

Правильная пирамида

- *основание – правильный многоугольник, вершина проецируется в центр основания;*
- *боковые ребра – равны;*
- *боковые грани – равные равнобедренные треугольники.*



H – высота, h – апофема

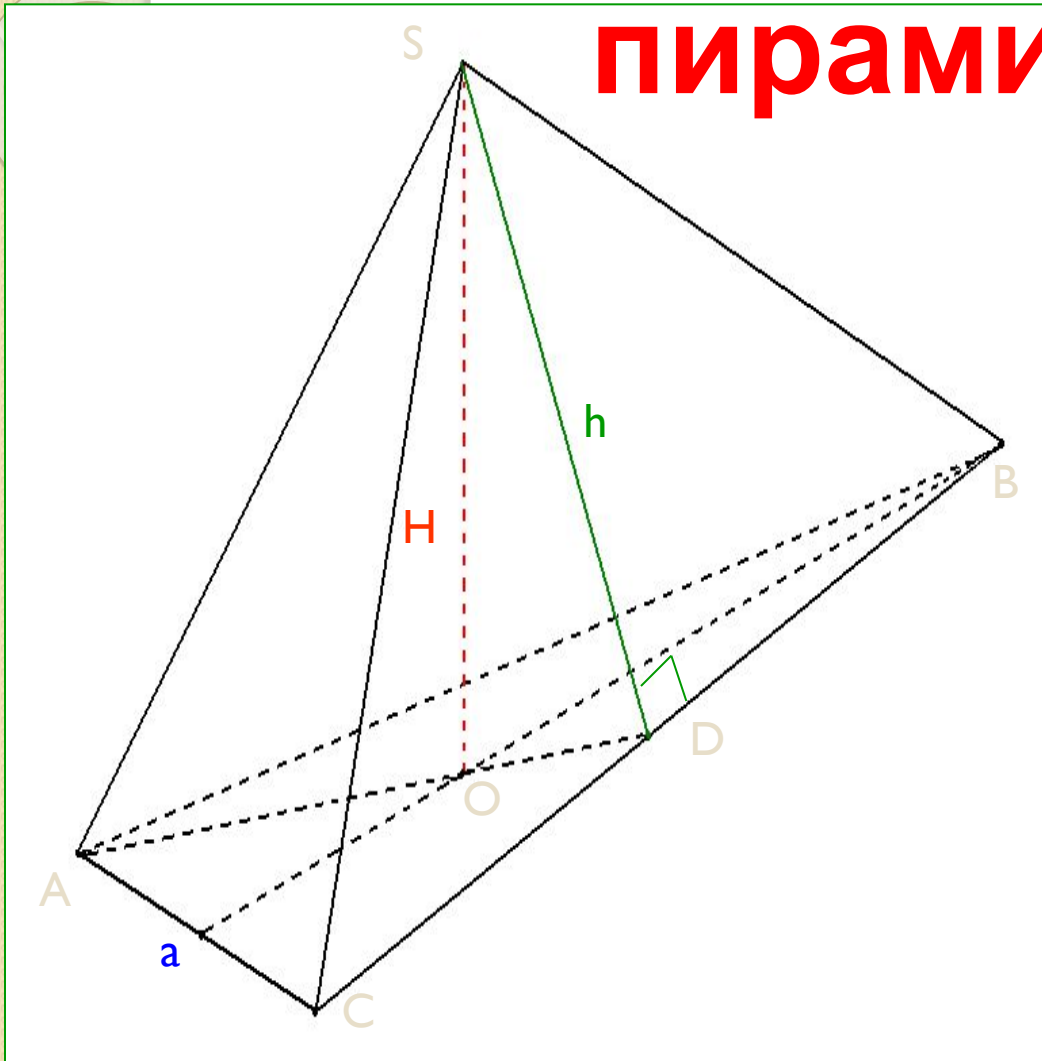
$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$$

Правильная треугольная пирамида

H – высота, h – апофема
 $AB = BC = AC = a$



$$DO = \frac{1}{3} \cdot AD \quad AO = \frac{2}{3} \cdot AD$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h$$

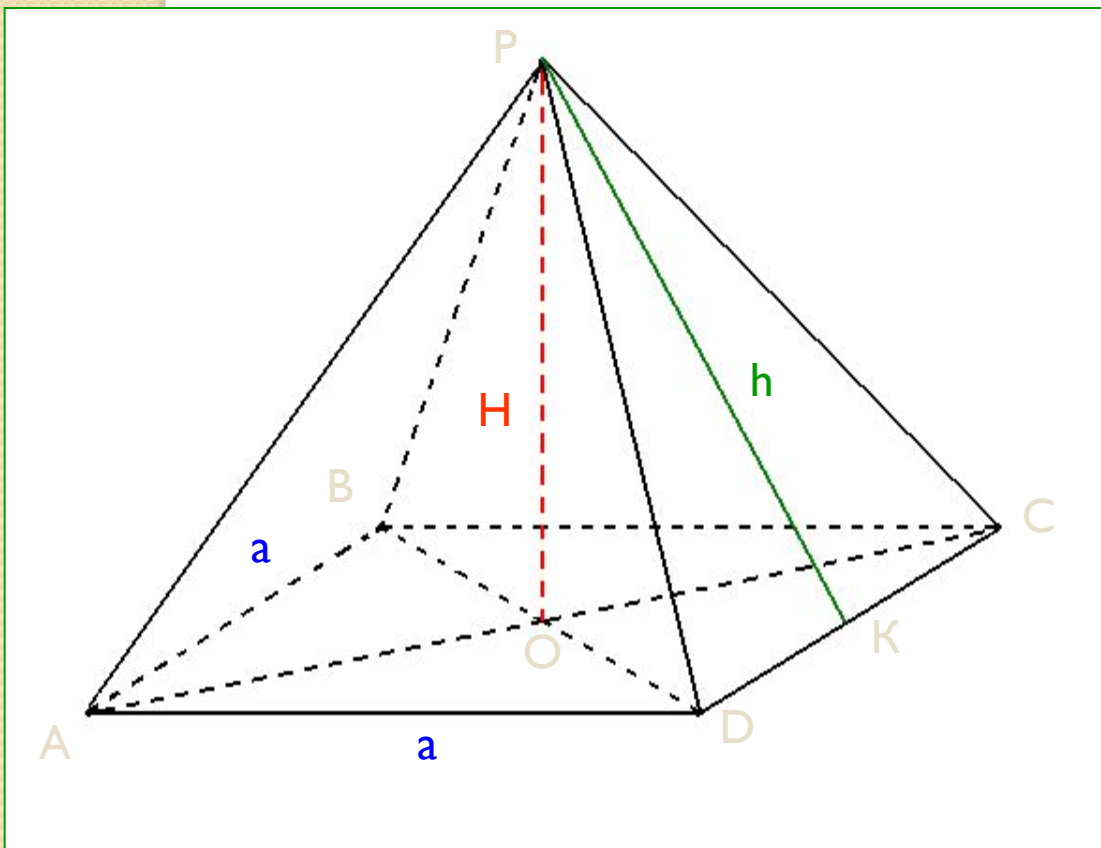
$$S_{\text{n.n.}} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Правильная четырехугольная пирамида

H – высота, **h** – апофема, **a** – сторона основания

AB = BC = CD = DA = a (в основании – квадрат)



K – середина DC

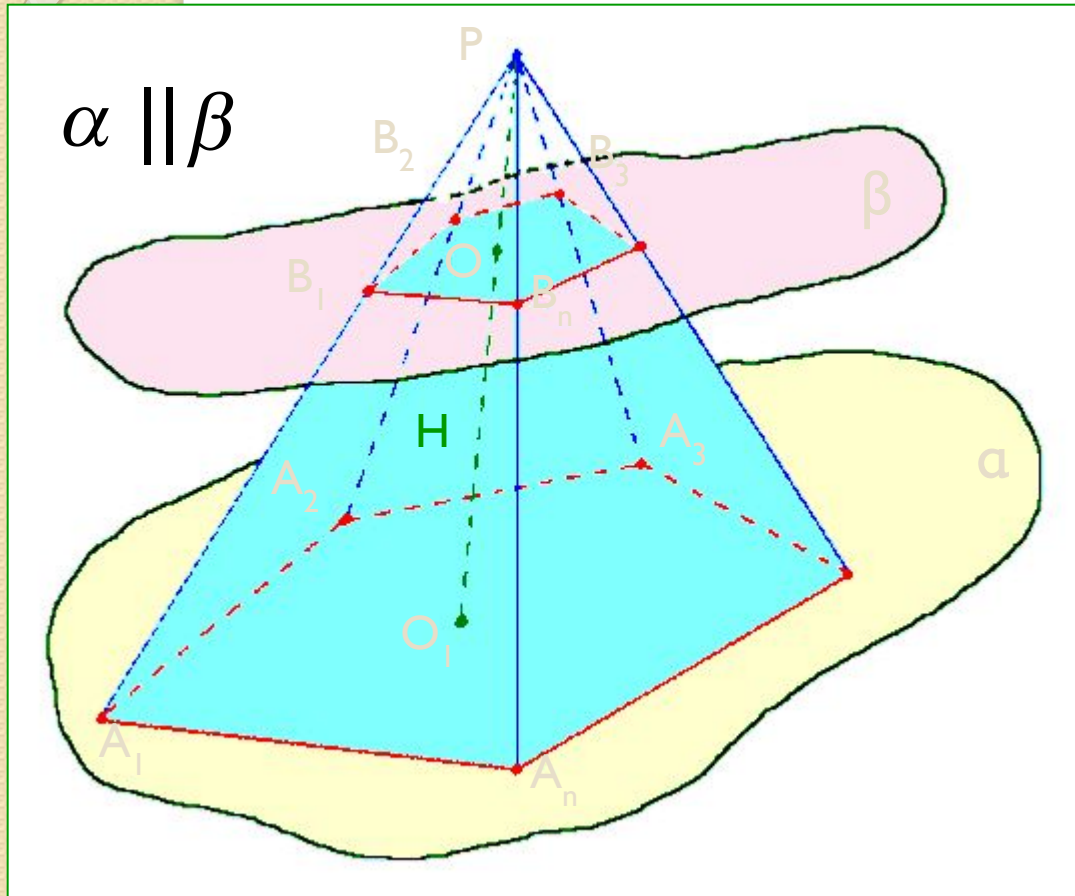
$$OK = \frac{1}{2} \cdot a \quad BD = a \cdot \sqrt{2}$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = 2 \cdot a \cdot h$$

$$S_{\text{н.н.}} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$

Усеченная пирамида



$PA_1A_2\dots A_n$ – произвольная пирамида

α – плоскость основания

β – секущая плоскость,

$PB_1B_2\dots B_n$ – пирамида

$B_1B_2\dots B_n$ – верхнее основание

$A_1A_2\dots A_n$ – нижнее основание

$A_1B_1B_2A_2; \dots; A_nB_nB_1A_1$ – боковые грани – трапеции

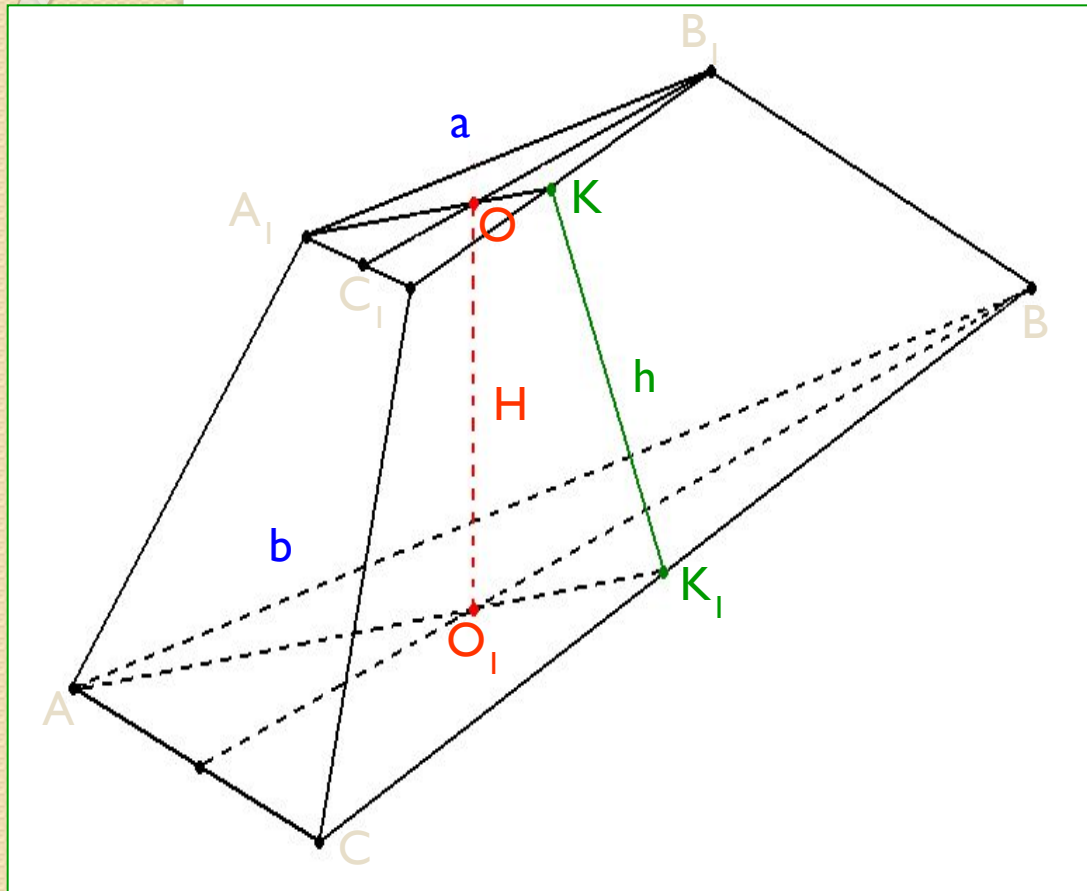
$A_1B_1; A_2B_2; \dots; A_nB_n$ – боковые ребра

$OO_1 = H$ – высота

$$S_{n.n.} = S_{бок.} + S_{в.осн.} + S_{н.осн.} \quad V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (S_{в.осн.} + S_{н.осн.} + \sqrt{S_{в.осн.} \cdot S_{н.осн.}})$$

Правильная треугольная усеченная пирамида –

боковые грани – равные между собой равнобокие трапеции.



ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ –
равносторонние

$OO_1 = H$ – высота

$KK_1 = h$ – апофема

$$P_{в.осн.} = 3 \cdot a$$

$$P_{н.осн.} = 3 \cdot b$$

$$S_{в.осн.} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

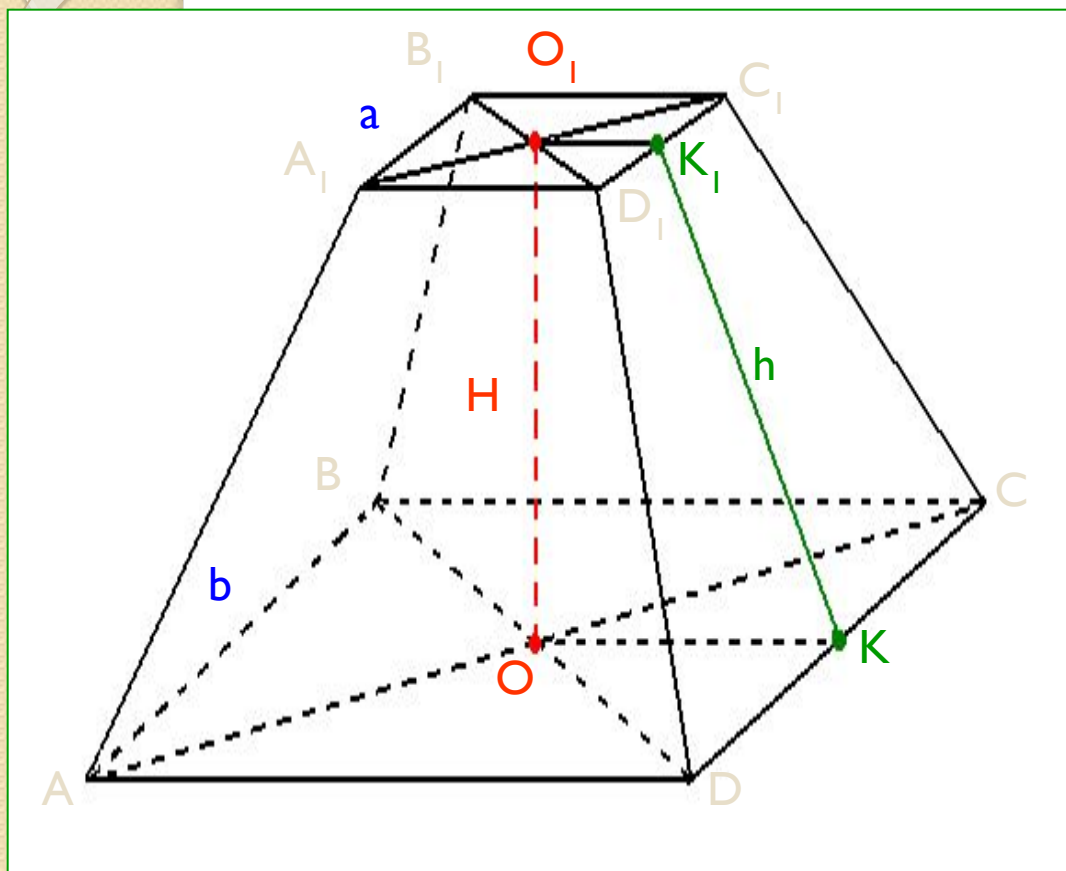
$$S_{н.осн.} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (P_{в.осн.} + P_{н.осн.})$$

$$S_{бок.} = \frac{3}{2} \cdot h \cdot (a + b)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} \right) \quad V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{3}}{4} \right)$$

Правильная четырехугольная усеченная пирамида – боковые грани – равные между собой равнобокие трапеции.



$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ –
квадраты

$OO_1 = H$ – высота

$KK_1 = h$ – апофема

$$P_{в.осн.} = 4 \cdot a \quad P_{н.осн.} = 4 \cdot b$$

$$S_{в.осн.} = a^2 \quad S_{н.осн.} = b^2$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (P_{в.осн.} + P_{н.осн.})$$

$$S_{бок.} = 2 \cdot h \cdot (a + b)$$

$$S_{н.п.} = a^2 + b^2 + 2 \cdot h \cdot (a + b)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (a^2 + b^2 + \sqrt{a^2 \cdot b^2})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (a^2 + b^2 + a \cdot b)$$

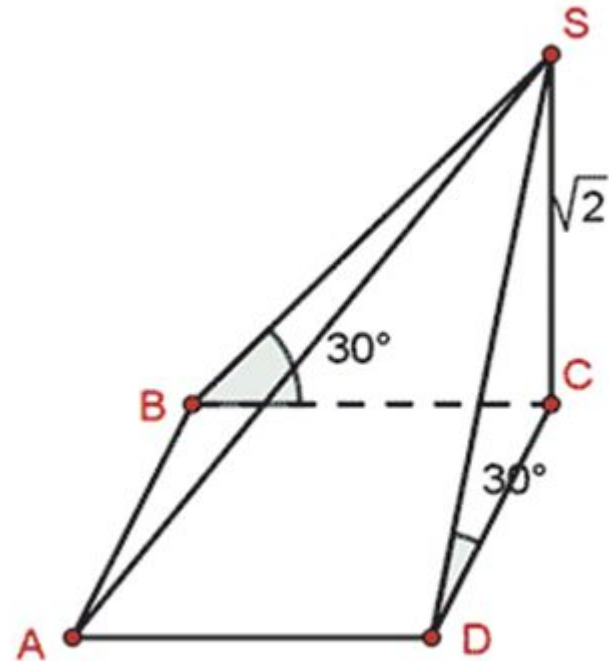
Задача 1.

Основанием пирамиды служит квадрат, две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны к плоскости её основания, две другие её боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, каждый из которых равен 30° .

Высота пирамиды равна $\sqrt{2}$

Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

$$\begin{aligned} \Delta BSC = \Delta DSC, \Delta BSA = \Delta ASD - \\ \text{прямоугольные: } \angle C = \angle B = \angle D = \\ = 90^\circ \text{ в этих треугольниках} \\ SD = SB = 2\sqrt{2}; \text{ сторона квадрата} \\ \text{равна } \sqrt{6}; S_{\Delta BSC} = S_{\Delta DSC} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}; \\ S_{\Delta BSA} = S_{\Delta ASD} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}; \\ S_{\text{бок.пов.}} = 2S_{\Delta BSC} + 2S_{\Delta BSA} = \\ = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}; \\ \text{Ответ: } 6\sqrt{3} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

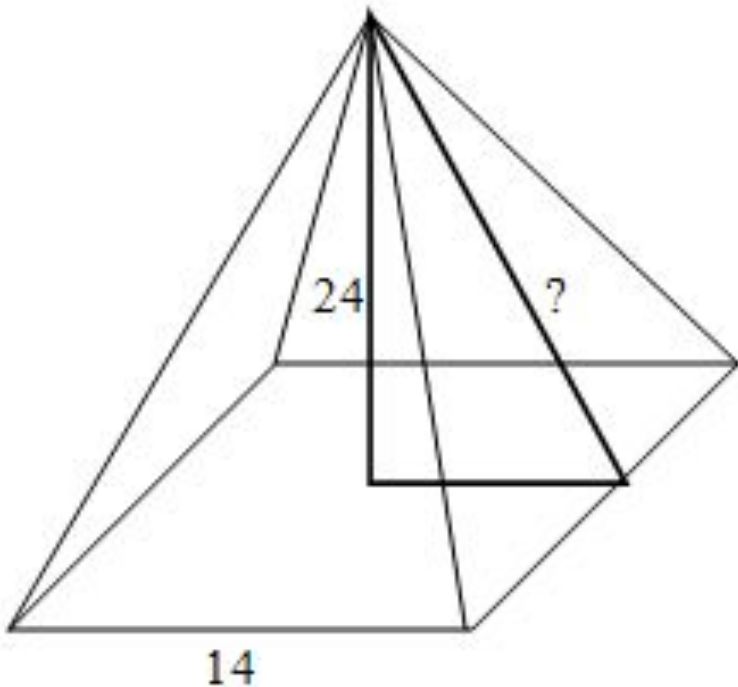


Задача №2.

Высота и сторона основания правильной четырехугольной пирамиды соответственно равны 24 и 14. Найдите апофему пирамиды.

Решение.

Поскольку пирамида правильная, то в ее основании лежит правильный четырехугольник - квадрат. Кроме того, высота пирамиды проецируется в центр квадрата. Таким образом, катет прямоугольного треугольника, который образован апофемой пирамиды, высотой и отрезком, их соединяющим, равен половине длины основания правильной четырехугольной пирамиды.



Откуда по теореме Пифагора длина апофемы будет найдена из уравнения:

$$7^2 + 24^2 = x^2$$

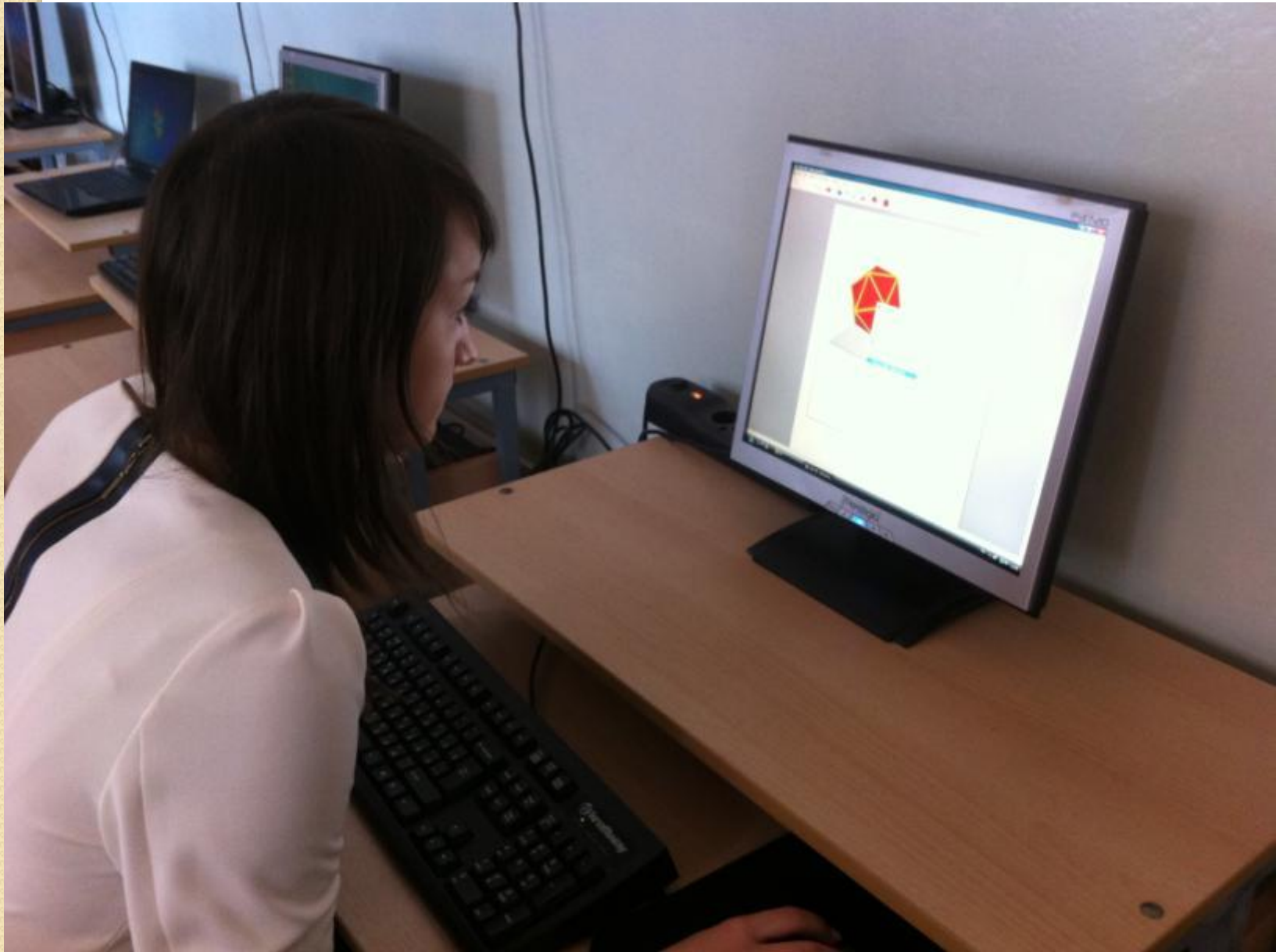
$$x^2 = 625$$

$$x = 25$$

Ответ: 25 см

3 группа «Правильные многогранники»

- Создать презентацию на повторение данной темы: определение правильных многогранников, виды правильных многогранников, свойства многогранников, объяснение ограниченного количества видов правильных многогранников.
- научиться строить развертку данной фигуры в программе Cabri 3D
- составить и решить 3 задачи на данную тему, изготовить модель фигуры.





Платон

Учение о правильных многогранниках изложил в своих трудах Платон. С тех пор правильные многогранники называют Платоновыми телами. Существует пять видов правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

ВСПОМНИМ

*Многогранник- это поверхность,
составленная из многоугольников и
ограничивающая некоторое
геометрическое тело.*

- ***Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.***

Правильные многогранники еще называют Платоновыми телами.

Существует пять правильных многогранников: 1) тетраэдр, 2) куб, 3) октаэдр, 4) икосаэдр, 5) додекаэдр.



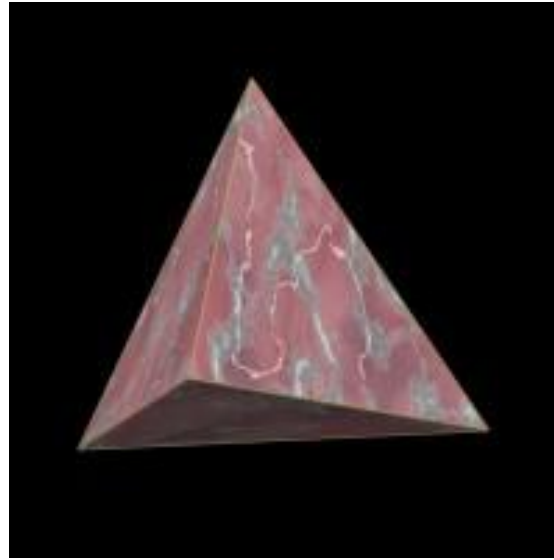
ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА.

Все эти типы многогранников были известны в Древней Греции. Этим красивым телам посвящена XIII книга «Начал» Евклида. Их называют еще телами Платона. Они занимали видное место в его идеалистической картине мира. Четыре из них олицетворяют в ней четыре «сущности», или «стихии»:

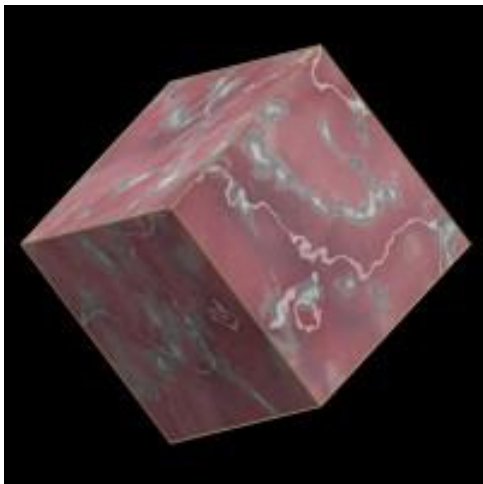
тетраэдр - **огонь**, икосаэдр - **воду**, куб - **землю**, октаэдр - **воздух**. Додекаэдр воплощал в себе «**все сущее**», символизировал все мировоззрение, почитался главнейшим.

ТЕТРАЭДР.

«Тетраэдр» в дословном переводе с греческого языка означает «четырёхгранник.» У правильного тетраэдра грани - правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.



ГЕКСАЭДР.



«Гексаэдр» в переводе с греческого языка означает «шестигранник». У куба все грани - квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

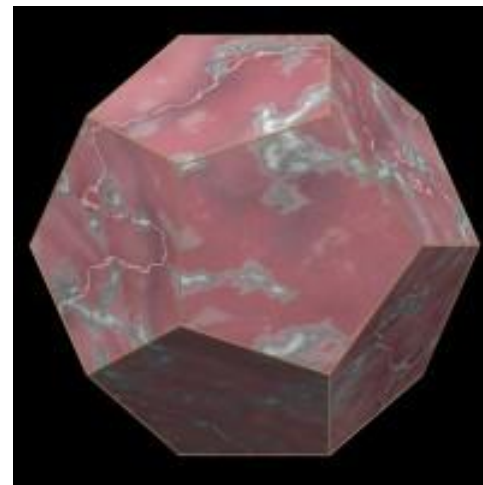
ОКТАЭДР.

«Октаэдр» в переводе с греческого языка означает «восьмигранник». У октаэдра грани - правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.



ДОДЕКАЭДР.

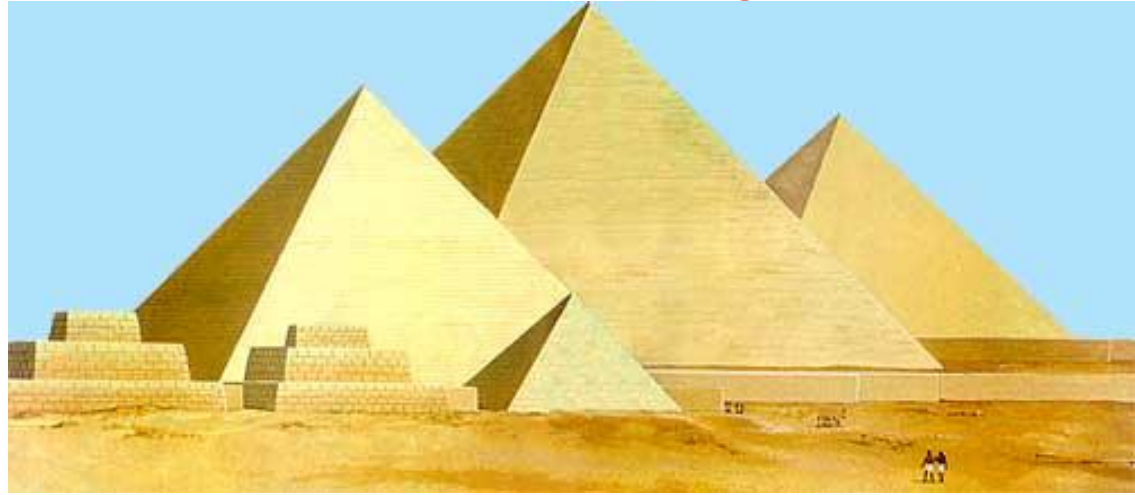
«Додекаэдр» в переводе с греческого языка означает «двенадцатигранник». У додекаэдра грани - правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра



Многогранники в ювелирном деле

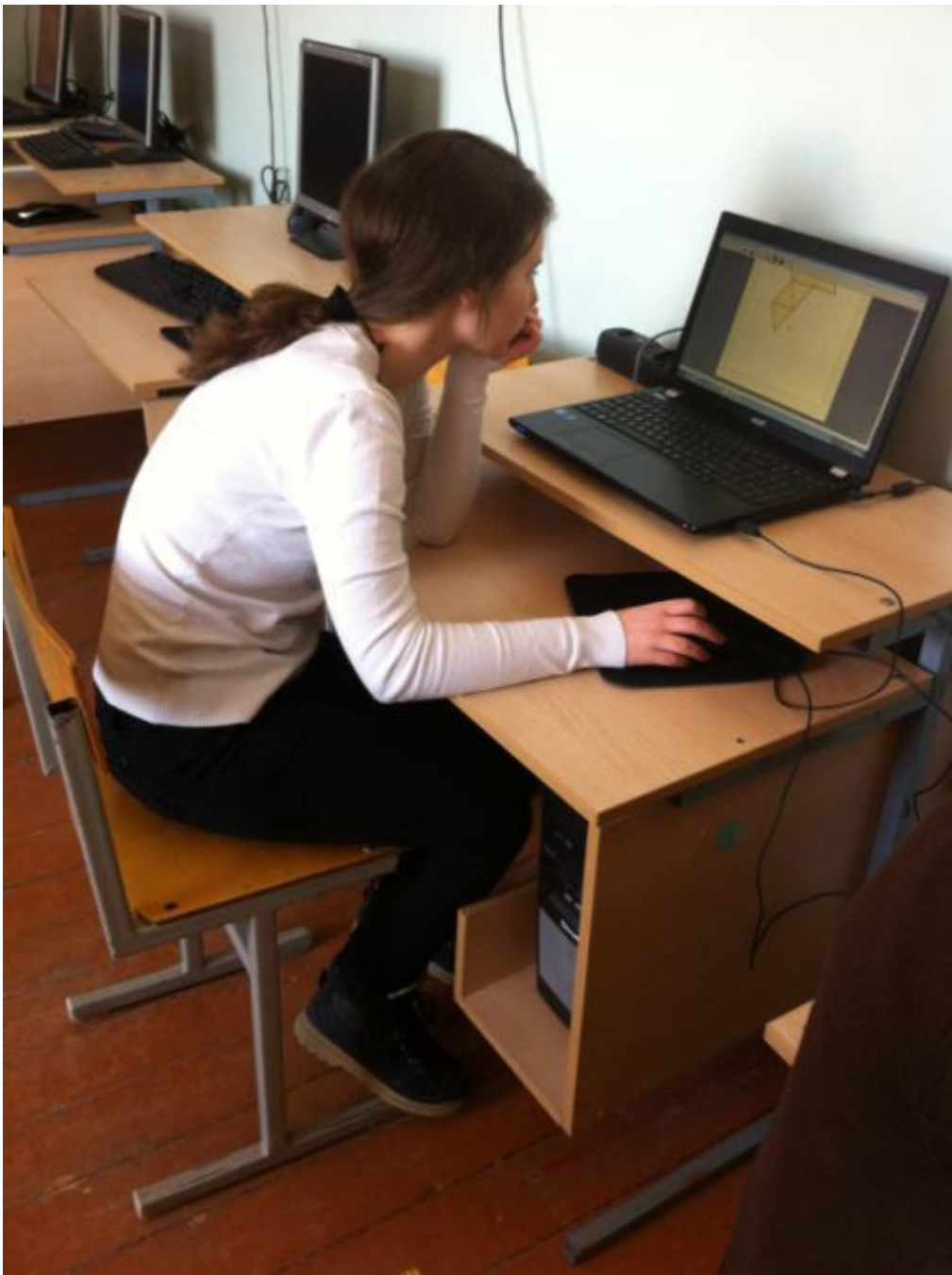


Многогранники в архитектуре



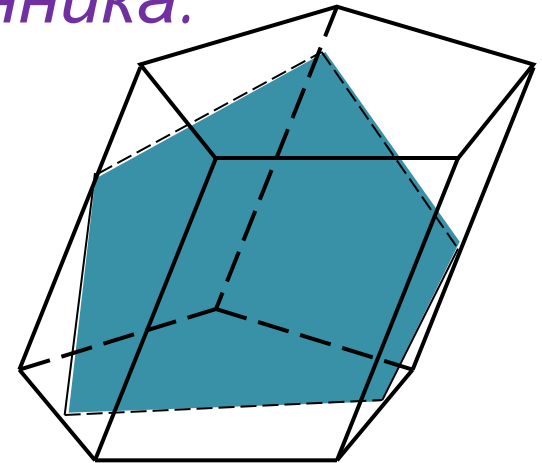
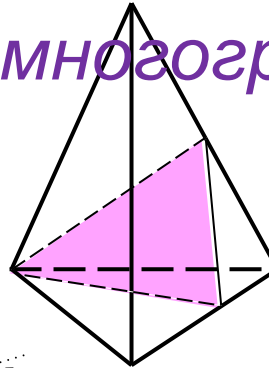
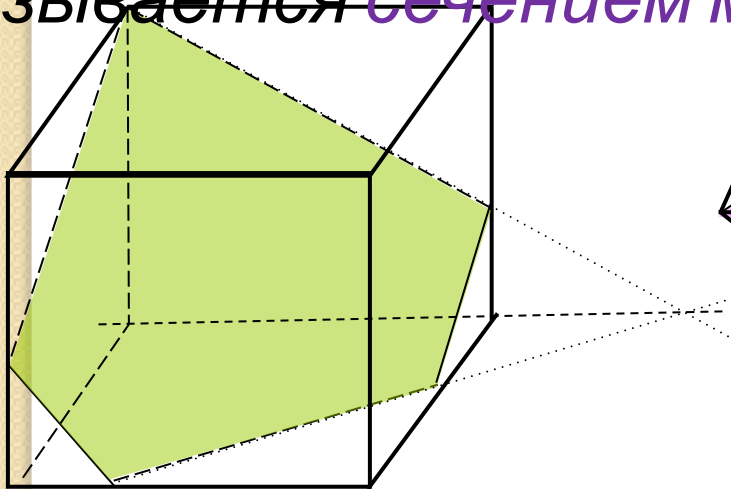
4 группа «Построение сечений многогранников»

- Создать презентацию на повторение данной темы: определение сечения, правила их построения
- Научиться строить сечения многогранников в программе Cabri 3D
- Составить и решить 3 задачи на построение сечений.



Определение сечения.

- **Секущей плоскостью многогранника** назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.
- Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением многогранника**.



если две точки многогранника принадлежат сечению, то прямая, проходящая через них, принадлежит секущей плоскости

Теоретические основы:

По аксиоме: если две точки принадлежат плоскости, то и вся прямая, проходящая через эти точки, принадлежит плоскости

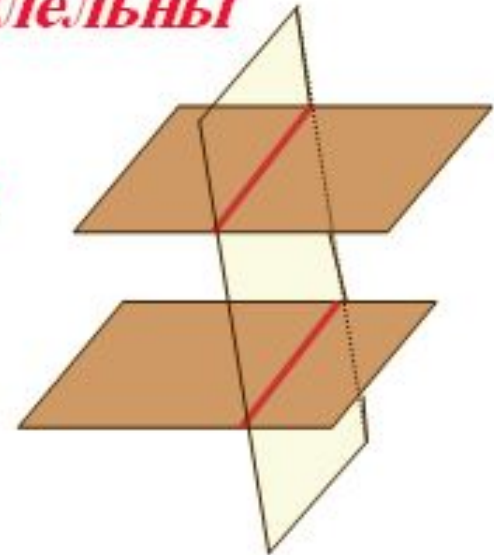


***если секущая плоскость пересекает две
противоположные параллельные грани
многогранника, то***

линии пересечения параллельны

Теоретические основы:

***По теореме: если две параллельные
плоскости пересекаются третьей
плоскостью, то линии их
пересечения параллельны***

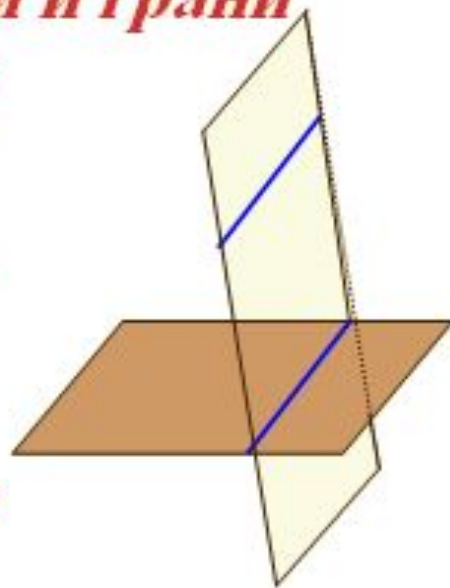


***если секущая плоскость проходит через
прямую, параллельную грани многогранника и
пересекает её, то***

***линия пересечения плоскости и грани
параллельна данной прямой***

Теоретические основы:

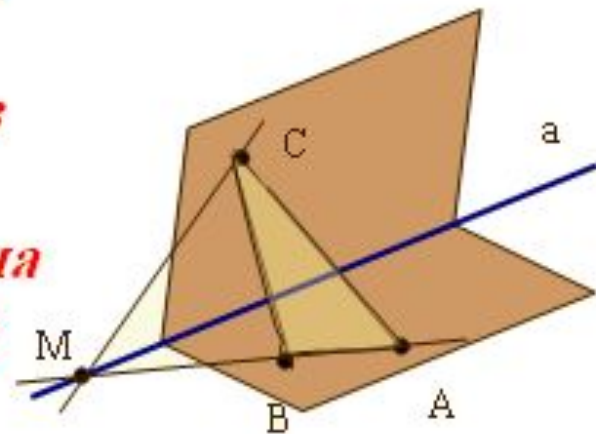
***Если плоскость проходит через
прямую, параллельную другой
плоскости, и пересекает эту
плоскость, то линия пересечения
параллельна данной прямой***



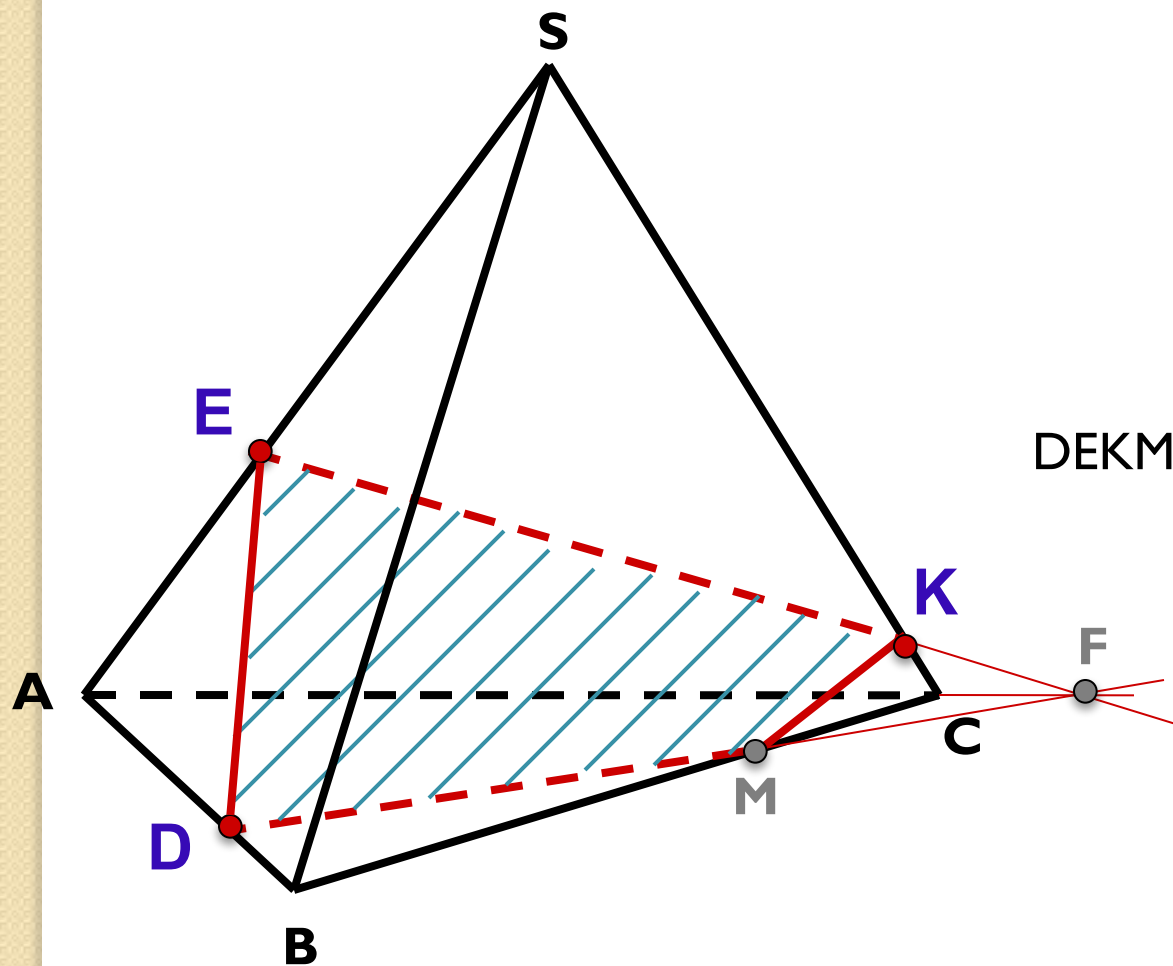
**общая точка секущей плоскости и
плоскостей двух пересекающихся
граней лежит на
прямой, содержащей общее ребро граней**

Теоретические основы:

***Если прямая, лежащая в одной из
пересекающихся плоскостей,
пересекает другую плоскость, то она
пересекает и линию пересечения
плоскостей***



*Задача 1. Построить сечение плоскостью, проходящей
через данные точки D, E, K.*



Построение:

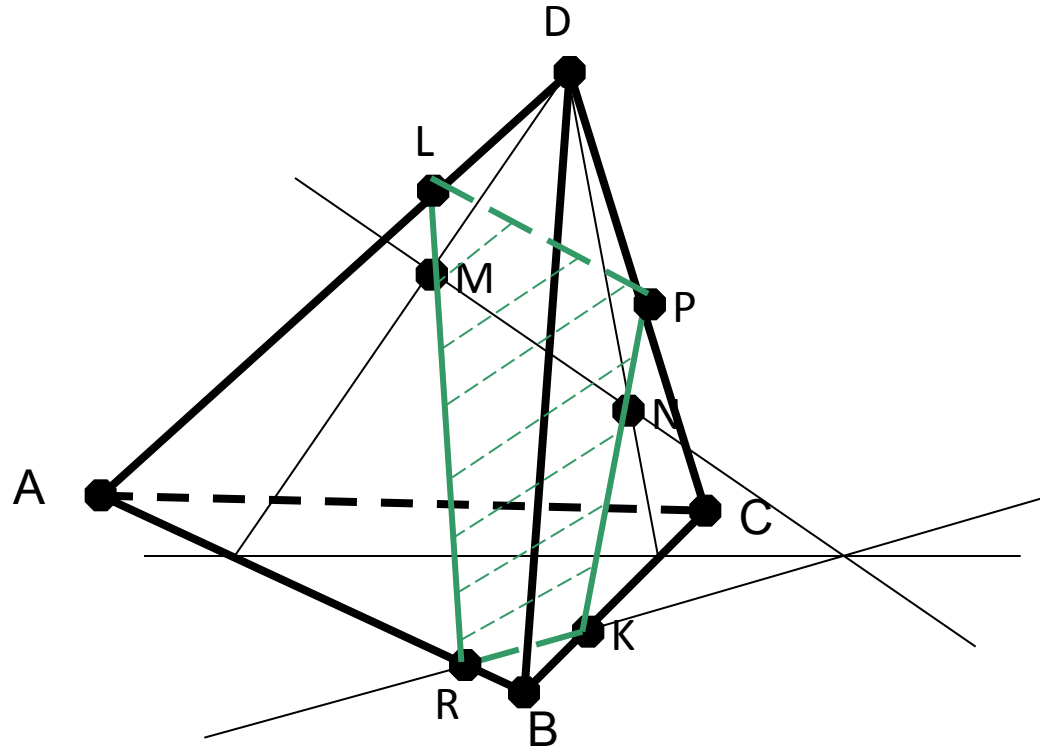
1. DE
2. EK
3. $EK \cap AC = F$
4. FD
5. $FD \cap BC = M$
6. KM

DEKM – искомое сечение

Задача 2. Постройте сечение тетраэдра ДАВС плоскостью, проходящей через точки $K \in BC$, $M \in АДВ$, $N \in ВДС$.

Решение

1. $M \rightarrow M_1, N \rightarrow N_1$
2. $X = NM \cap N_1M_1$
3. $R = KX \cap АВ$
4. $RL = \alpha \cap АВД,$
 $M \in RL$
5. $KP = \alpha \cap ВДС,$
 $N \in KP$
6. $LP = \alpha \cap АДС$
7. **RLPK - искомое сечение**



**Спасибо за
внимание!**

