

Вписанная окружность



Учитель математики ГБОУ гимназии № 1504 Железнова Я.А.

Определение

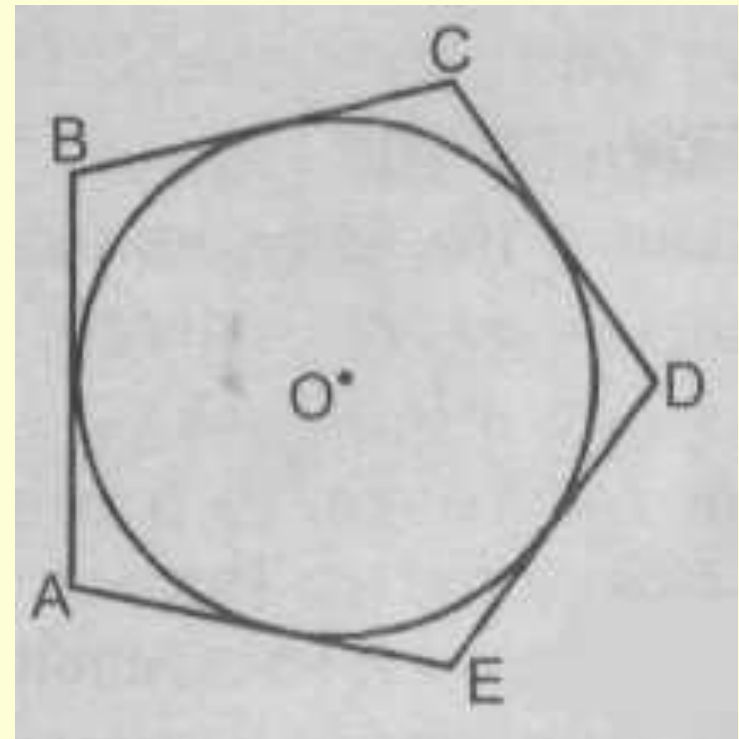


Если все стороны многоугольника
касаются окружности, то
окружность называется вписанной
в многоугольник,
а многоугольник – описанным около
этой окружности.



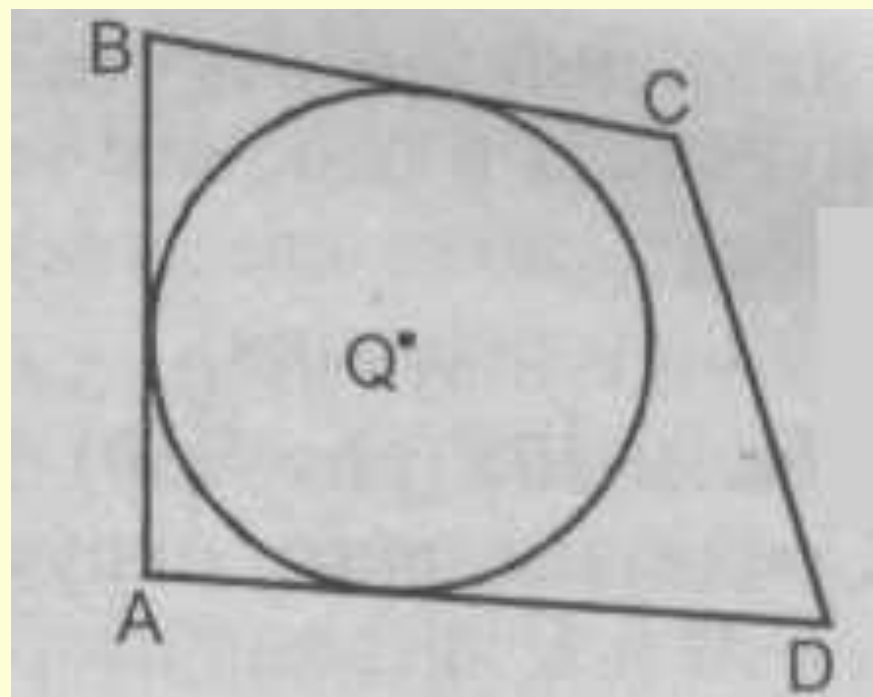


**Пятиугольник $ABCDE$
описанный.
Окр. (O, R) – вписанная.
 AB, BC, CD, DE, AE
касательные**





Окружность с центром Q не вписана в четырехугольник $ABCD$, т. к. CD не касается окружности.





ТЕОРЕМА

В любой треугольник можно
вписать окружность.

Замечание: в треугольник можно
вписать только одну окружность.



Дано

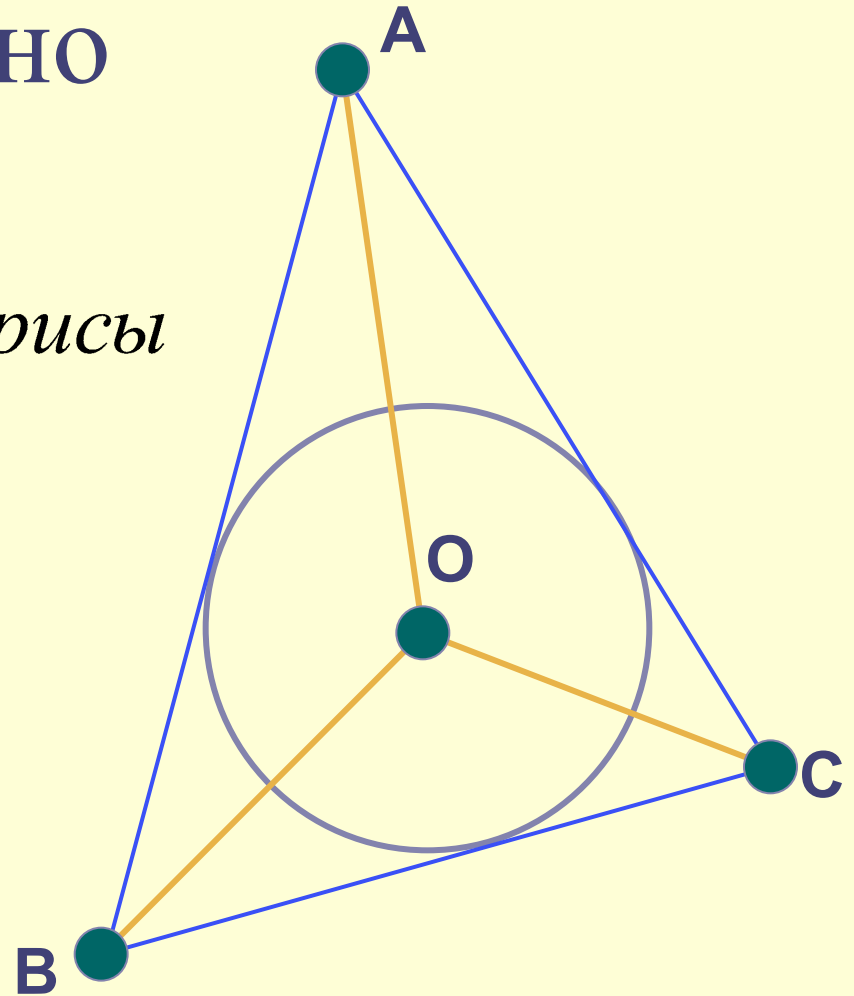
$\triangle ABC$

AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$

Доказать, что

окр. $(O; R)$ вписанная.



Доказательство

Проведем

$$OK \perp AB, OM \perp AC, OL \perp BC$$

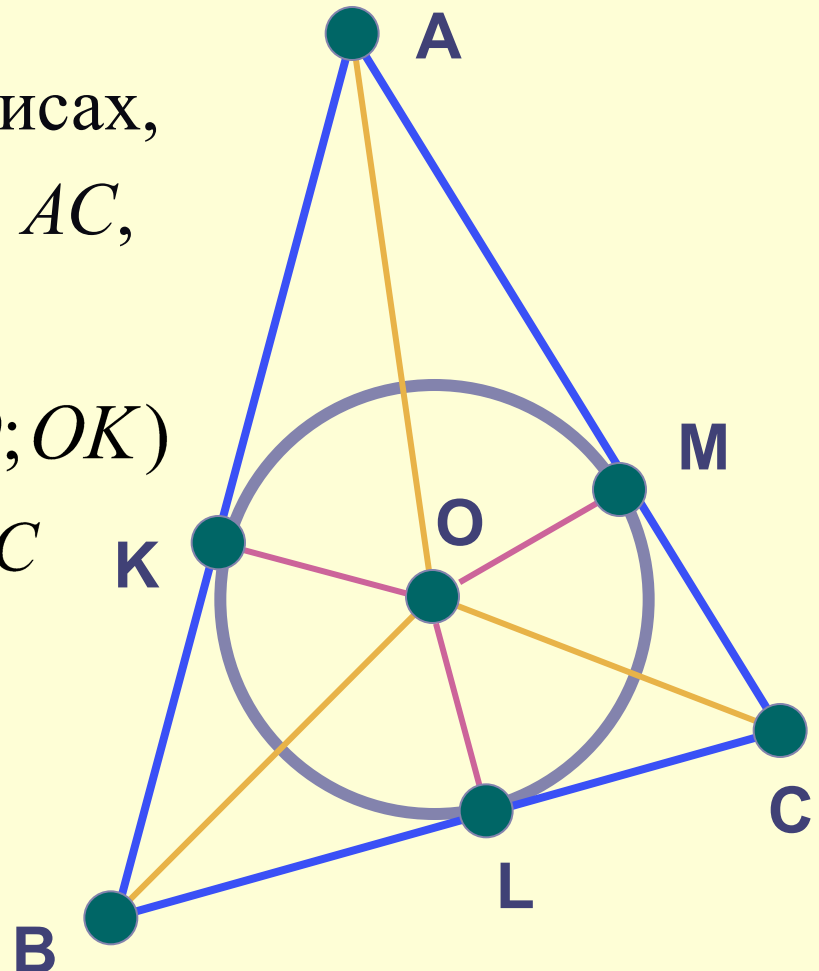
Т.к. точка O лежит на биссектрисах,
то она равноудалена от AB, BC, AC ,

т.е. $OK = OL = OM$

Значит точки $K, L, M \in \text{окр}(O; OK)$

Т.к. $OK \perp AB, OM \perp AC, OL \perp BC$
то AB, AC, CB – касательные.

Значит окр. $(O; OR)$ вписанная.





Важный вывод 1

Центр вписанной в
треугольник окружности
лежит в точке пересечения
его биссектрис и
равноудален от его сторон.





Важный вывод 2

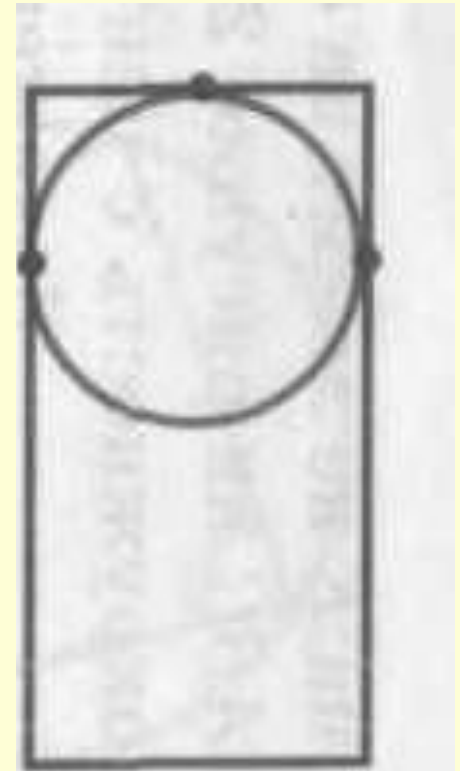
Радиус окружности
вписанной в треугольник
равен расстоянию от центра
окружности до сторон
треугольника.





Не во всякий четырехугольник
можно вписать окружность.

Если же в четырехугольник
можно вписать окружность, то
его стороны обладают
следующим свойством:





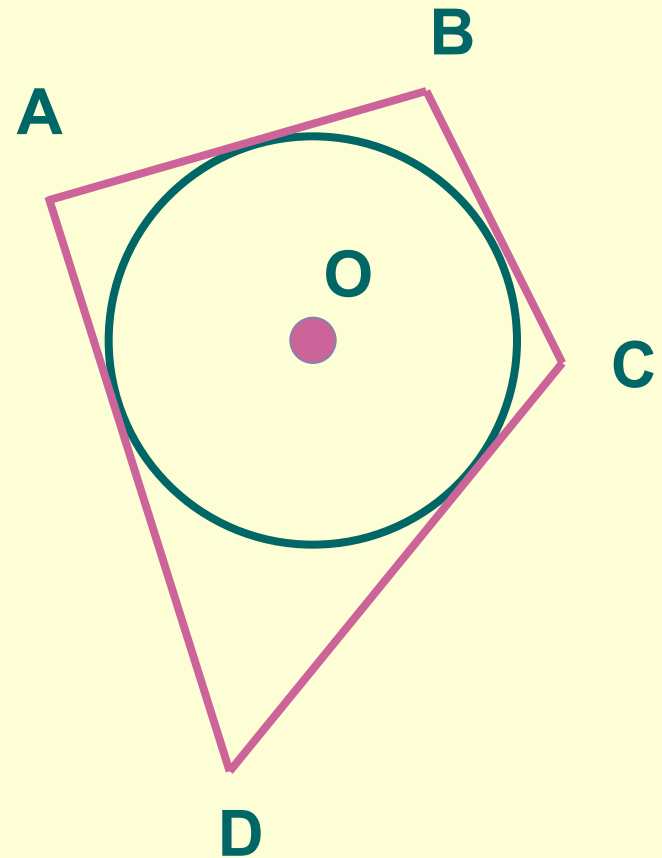
СВОЙСТВО

В любом описанном
четырёхугольнике
суммы противоположных
сторон равны.



ABCD
описанный
четыреугольник.

$$AB+CD=BC+AD$$

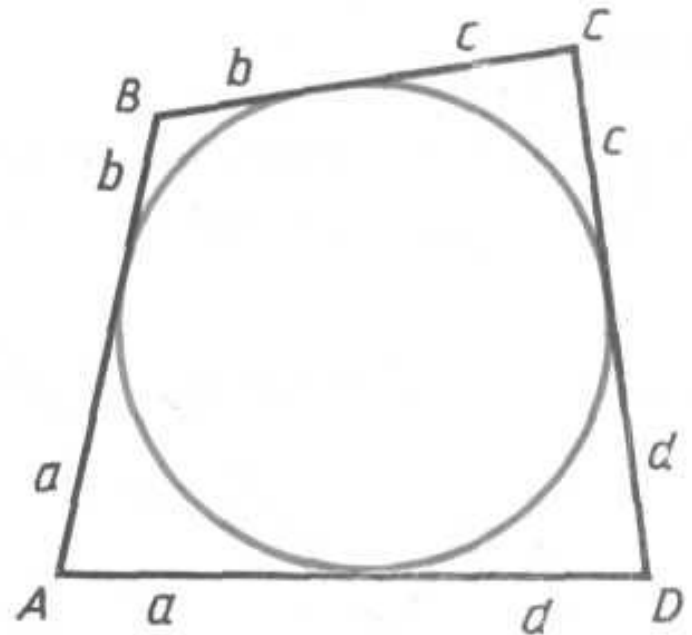


Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$.

Доказательство.

Используя свойство отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки, получаем:

$AB + CD = a + b + \underline{c} + \underline{d}$, $BC + AD = \underline{a + b + c + d}$. Следовательно, $AB + \underline{CD} = BC + \underline{AD}$, что и требовалось доказать



Верно и обратное утверждение



Если суммы противоположных сторон
выпуклого четырехугольника равны,
то в него можно вписать окружность.

Это признак описанного
четырехугольника.





Свойство описанного многоугольника

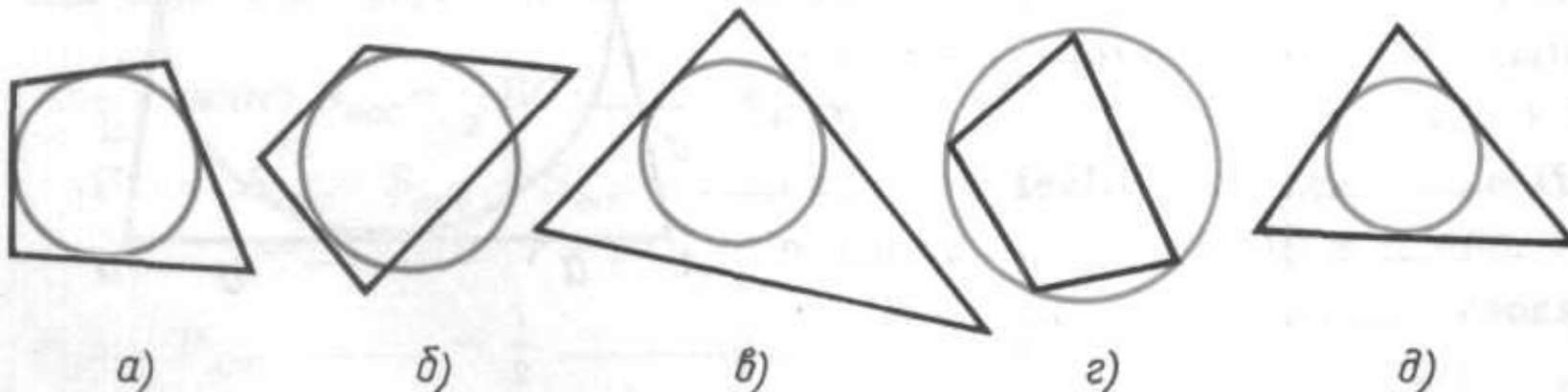
Площадь описанного
многоугольника равна половине
произведения его периметра на
радиус вписанной окружности.

$$S_{ABCD...K} = \frac{1}{2} P_{ABCD...K} \cdot r$$



ЗАДАЧА 1

На каких рисунках a — d изображены многоугольник и вписанная в него окружность?



Решение.

Окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны многоугольника касаются окружности. Все стороны многоугольника касаются окружности на рисунках а и д, следовательно, многоугольник и вписанная в него окружность изображены на рисунках а и д.

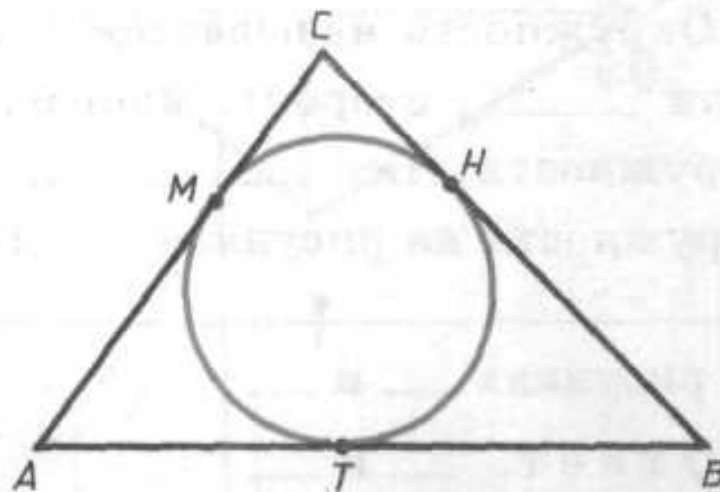
Задача 2



Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках H , M и T . Найдите периметр треугольника ABC , если $AM = 5$ м, $CH = 3$ м, $BT = 6$ м.

Решение.

Отрезки касательных к _____
ОКРУЖНОСТИ, проведенные из



одной **ТОЧКИ**, равны. Поэтому $AT = \underline{AM} = 5$ м, $CM = \underline{CH} =$
 $= \underline{3}$ м, $BH = \underline{BT} = \underline{6}$ м. Следовательно, $P_{ABC} = AM + MC +$
 $+ CH + \underline{HB+BT+AT} = 2 \cdot (AM + \underline{MC+CH}) =$
 $= \underline{2} \cdot (5 + \underline{3+6}) = \underline{28}$ (м).

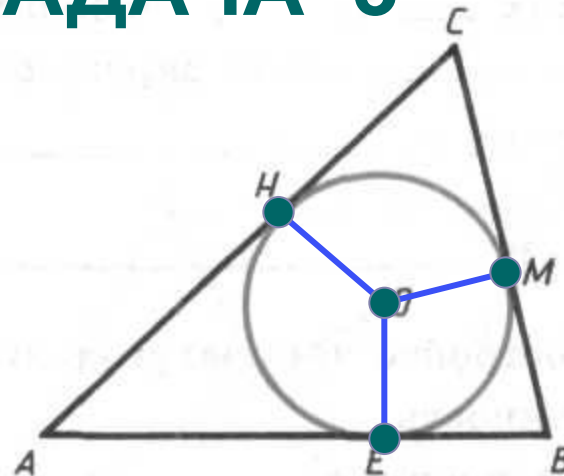
ЗАДАЧА 3



Найдите площадь треугольника ABC , если его периметр равен 60 см, а радиус r вписанной окружности равен 4 см.

Решение.

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H , M и E касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку КАСАНИЯ,



перпендикулярен к касательной, то $OH \perp AC$, следовательно, отрезок OH — ВЫСОТА треугольника AOC . Аналогично отрезок OM — высота ТРЕУГОЛЬНИКА BOC , отрезок OE —

ВЫСОТА треугольника AOB . Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OE$.

Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OM$ и $S_{AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot OH$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} (AB \cdot OE + BC \cdot OM + AC \cdot OH) = \\ &= \frac{1}{2} (AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r) = \frac{1}{2} (AB + BC + AC)r = \\ &= \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r = \frac{1}{2} \frac{60 \cdot r}{4} = 120 \text{ (см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

№ 690



Дано:

$\triangle ABC$ – равнобедренный

AC-основание

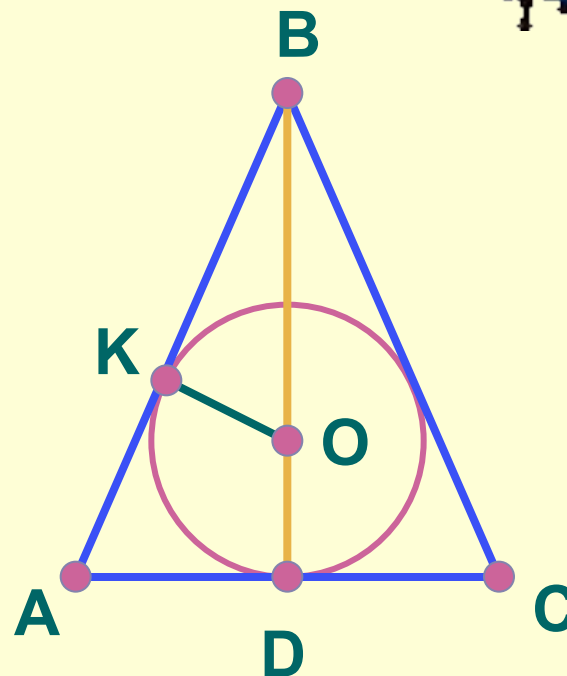
окр($O; R$) – вписанная

$AB = 60$,

BD – высота,

$BO : OD = 12 : 5$,

Найти AC



№ 691



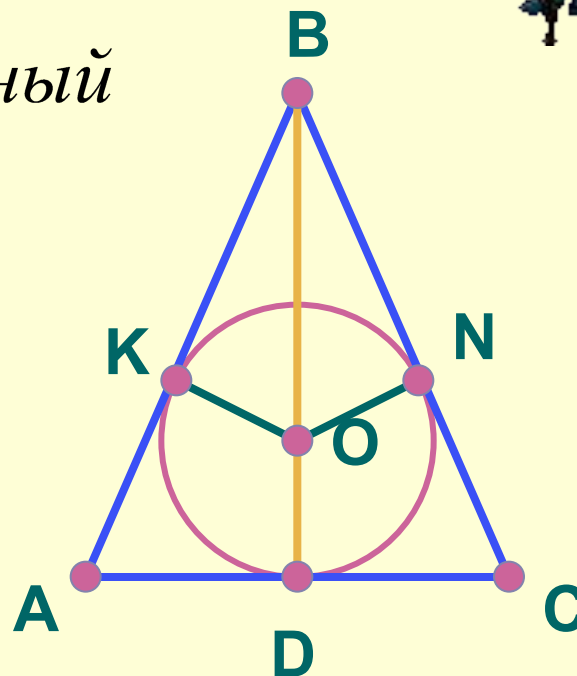
Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный
AC-основание

окр(O ; R) – вписанная

Точки K , N , D – точки
касания.

$BK : KA = 4 : 3$

Найти P_{ABC}



№ 693 (а)

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный

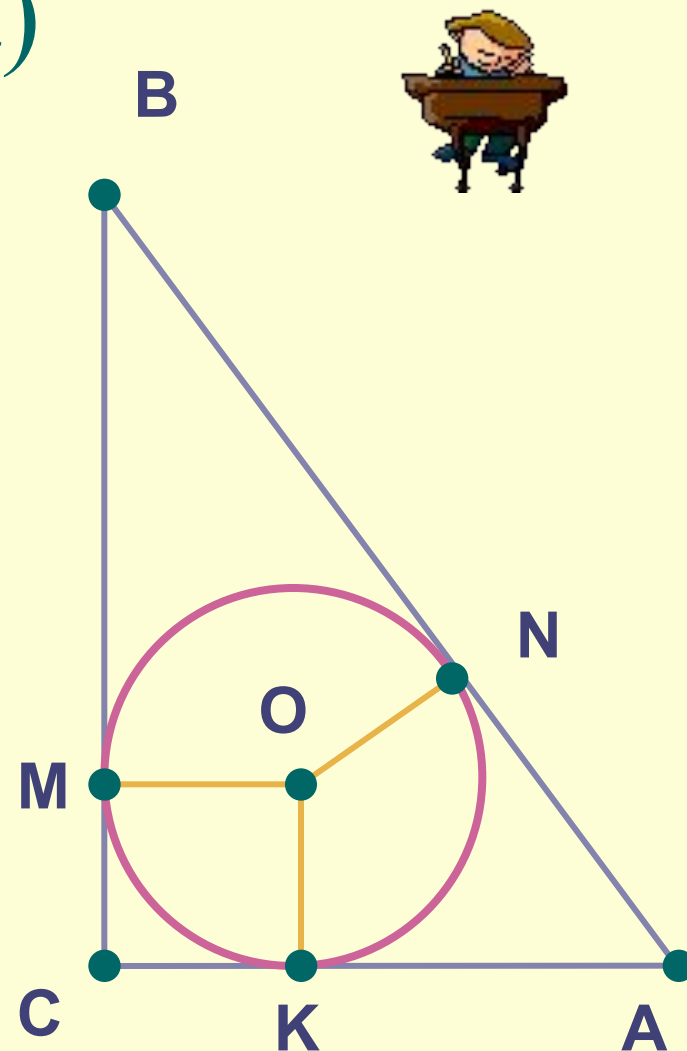
$$\angle C = 90^\circ$$


окр($O; 4$) – вписанная

$$AB = 26$$

M, N, K – точки касания

Найти P_{ABC}





№ 698

Кратко!



Подведем итог :



- Какая окружность называется вписанной в многоугольник?
- Какой многоугольник называется описанным возле окружности?
- В любой ли треугольник можно вписать окружность?
- Сколько окружностей можно вписать в треугольник?
- Где лежит центр вписанной окружности?

Подведем итог :



- Чему равен радиус окружности, вписанной в треугольник?
- В любой ли четырехугольник можно вписать окружность?
- Сформулируйте свойство описанного четырехугольника
- Сформулируйте признак описанного четырехугольника

Домашние задание

- П.74. читать,



- Теория из тетрадки, формулировки знать наизусть.



- № 689, 692, 693 (б), 695

