

Вневписанная окружность

**Автор:
Ражева Анастасия ,
Ученица 10 «А» класс
, ГБОУ лицей-интернат «ЦОД»
Руководитель: Каткова Г.Г..**

*Геометрия является самым могущественным
средством для изощрения наших умственных
способностей и дает нам возможность правильно
мыслить и рассуждать.*

Г. Галилей

Содержание

- История треугольника и невписанной окружности.
- Задачи , приводящие к понятию невписанной окружности
- Невписанная окружность ,ее свойства и ее связь с основными элементами треугольника
- Применение невписанной окружности и ее свойств к решению задач
- Заключение

История треугольника

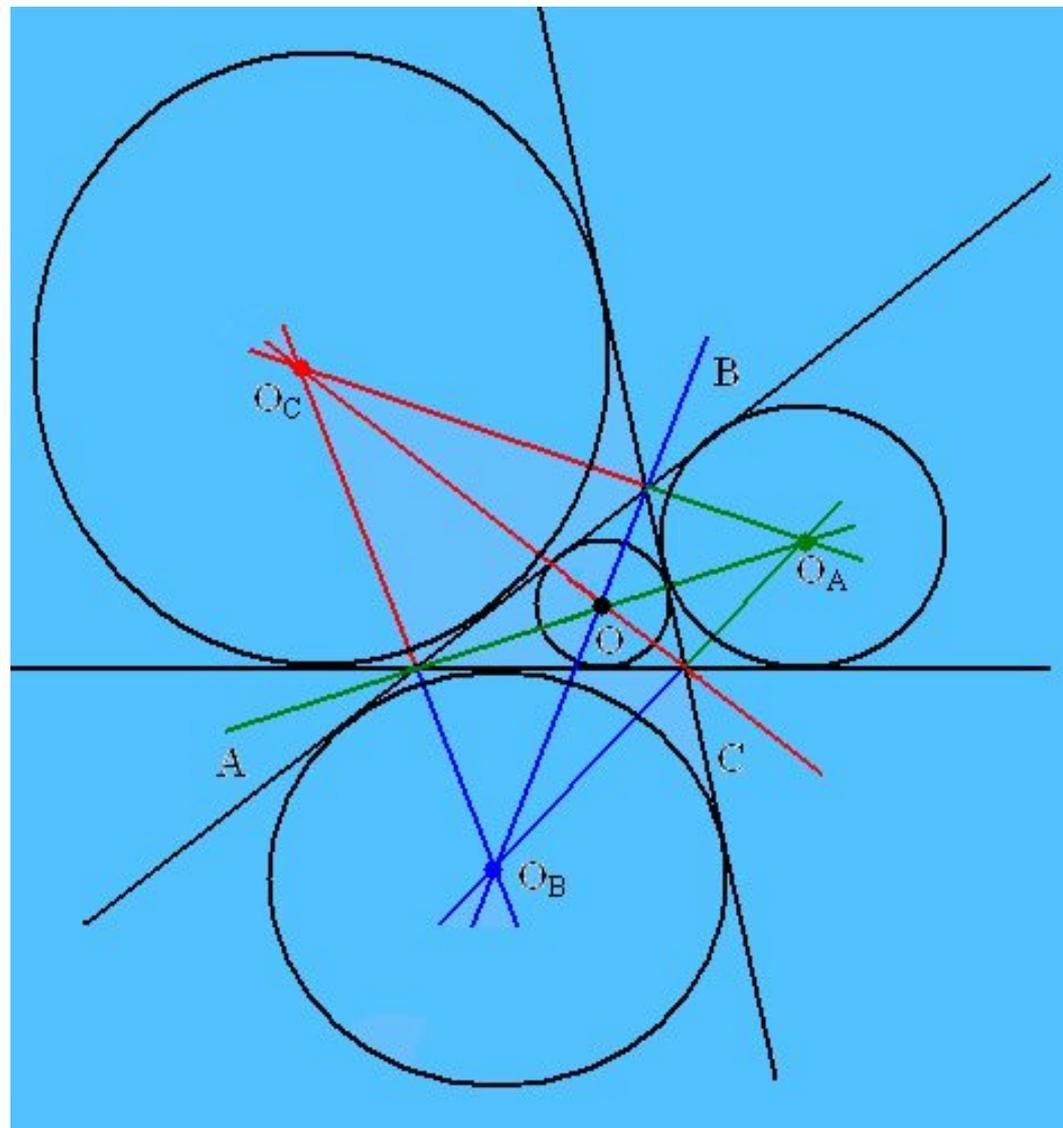
Простейший из многоугольников — треугольник — играет в геометрии особую роль. За несколько тысячелетий геометры столь подробно изучили треугольник, что иногда говорят о «геометрии треугольника» как о самостоятельном разделе элементарной геометрии.

Первые упоминания о треугольнике и его свойствах можно найти в египетских папирусах, которым более 4000 лет. Через 2000 лет в Древней Греции изучение свойств треугольника достигает высокого уровня — достаточно вспомнить теорему Пифагора и формулу Герона.

Центральное место в геометрии треугольника занимают свойства так называемых замечательных точек и линий.

**Задача: вписать в
данный треугольник
окружность –имеет
единственное решение.
Изменим условие:
построить окружность,
касающуюся трех
различных прямых
AB, BC, AC- и
однозначность решения
пропадет.**

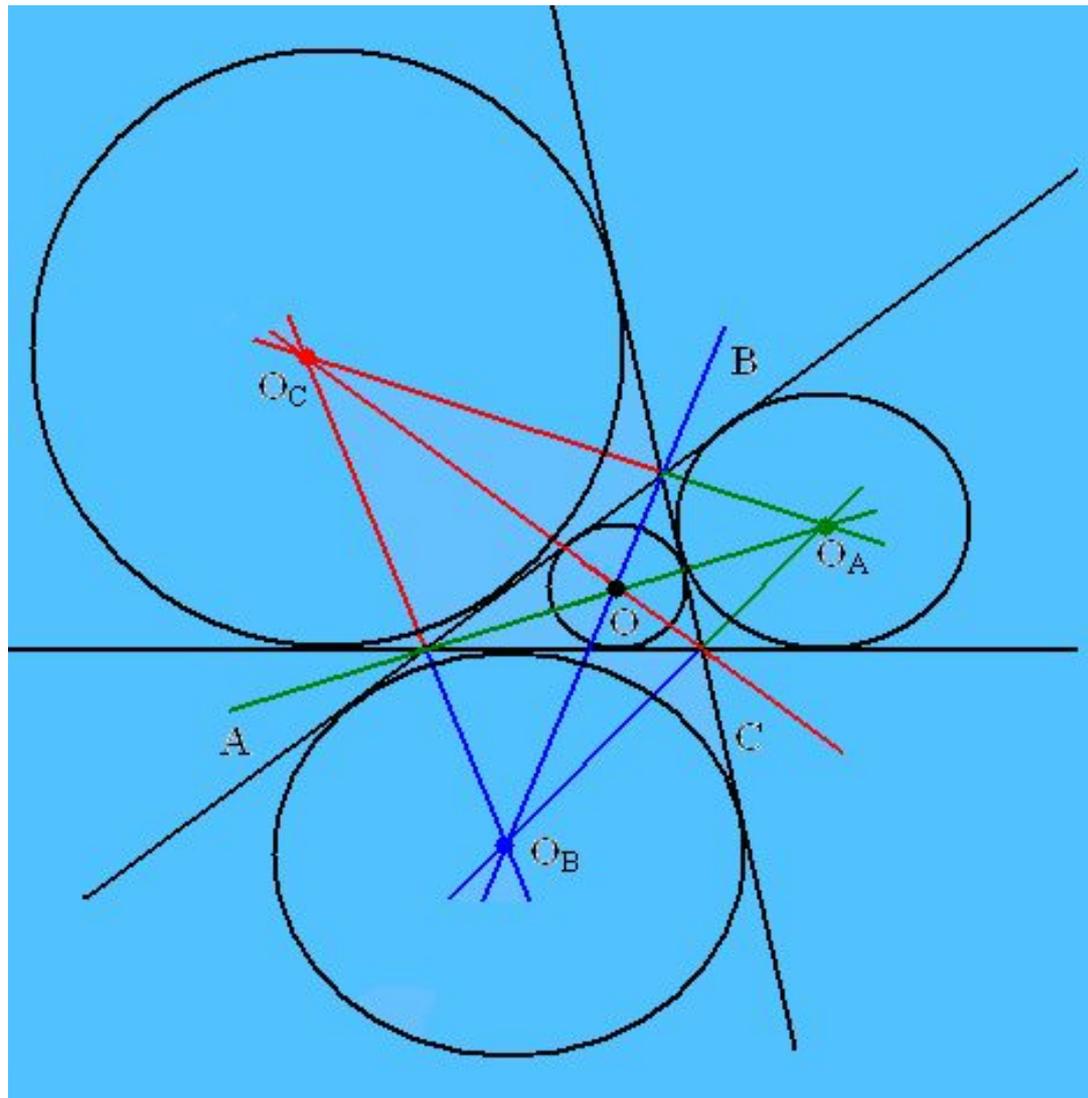
Вневписанная окружность



Вневписанная окружность

В итоге получаем четыре окружности с центрами O , O_a , O_b , O_c , касающиеся трех данных несовпадающих прямых.

При этом одна из них будет вписанной в треугольник окружностью, а три других — вневписанными окружностями.



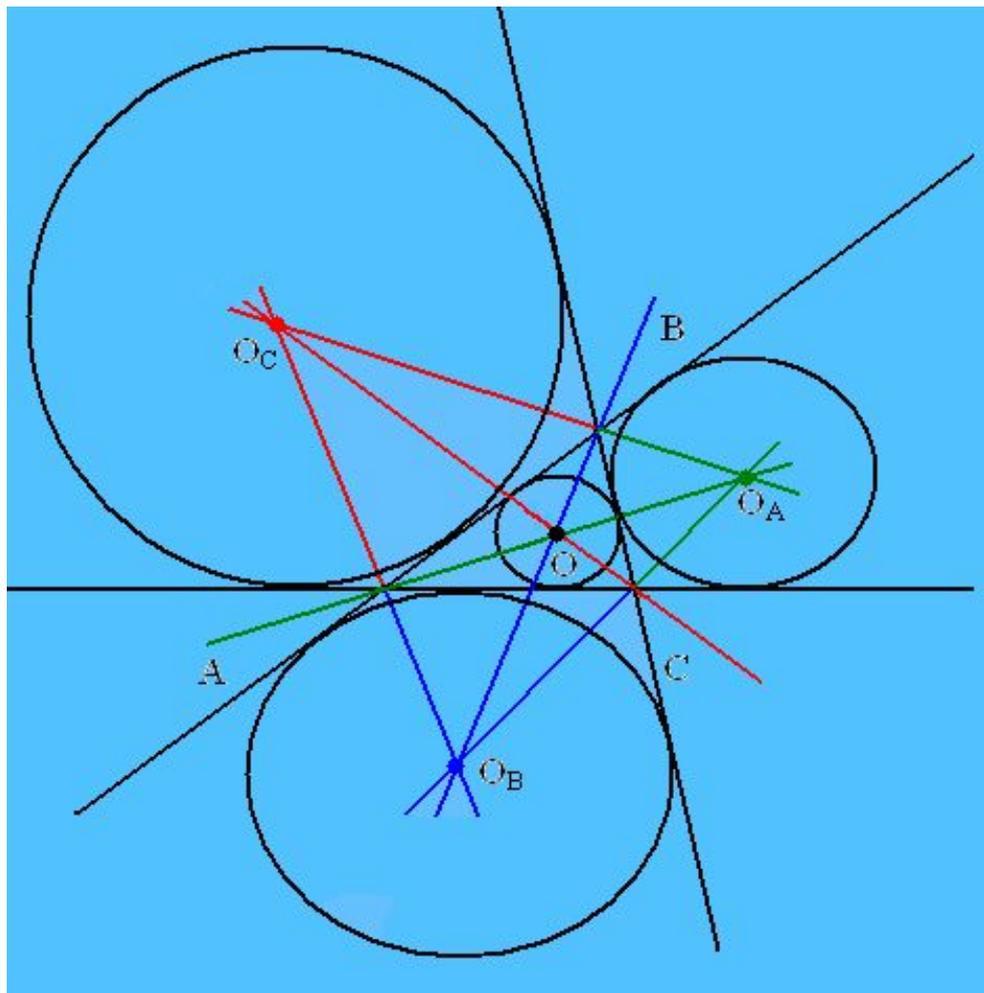
Вневписанная окружность

Определение.

Вневписанной окружностью
треугольника

называется окружность,
касающаяся одной из его сторон
и продолжений двух других.

Для каждого треугольника
существует три вневписанных
окружности, которые
расположены вне треугольника,
почему они и получили название
вневписанных.

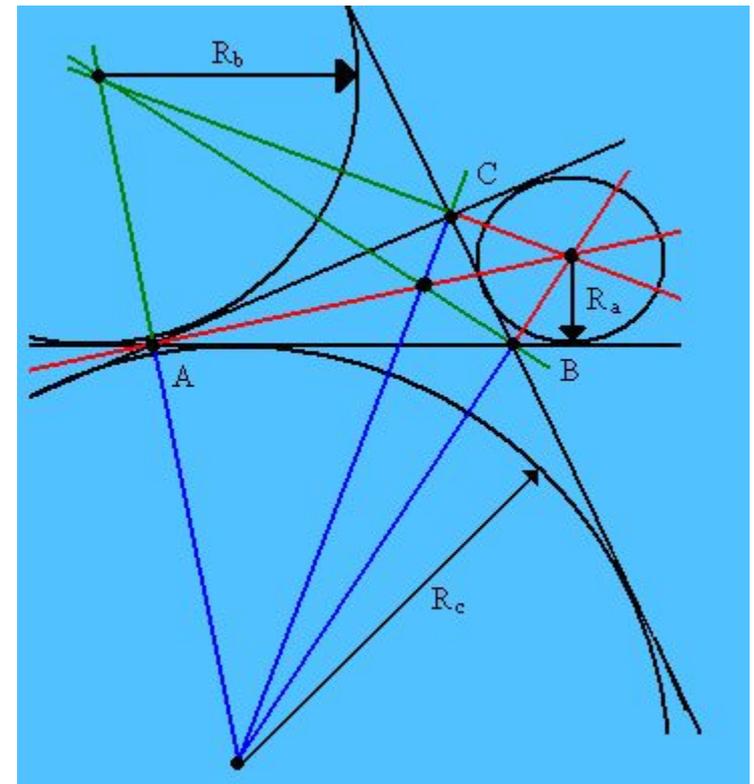


Центрами вневписанных окружностей являются точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника.

Центр вневписанной окружности лежит на пересечении биссектрисы одного внутреннего угла и биссектрис внешних углов при двух других вершинах. Шесть биссектрис треугольника — три внутренние и три внешние — пересекаются по три в четырех точках — центрах вписанной и трех вневписанных окружностей.

Радиусом вневписанной окружности является отрезок перпендикуляра, проведенного из центра окружности к какой-либо стороне треугольника или ее продолжению.

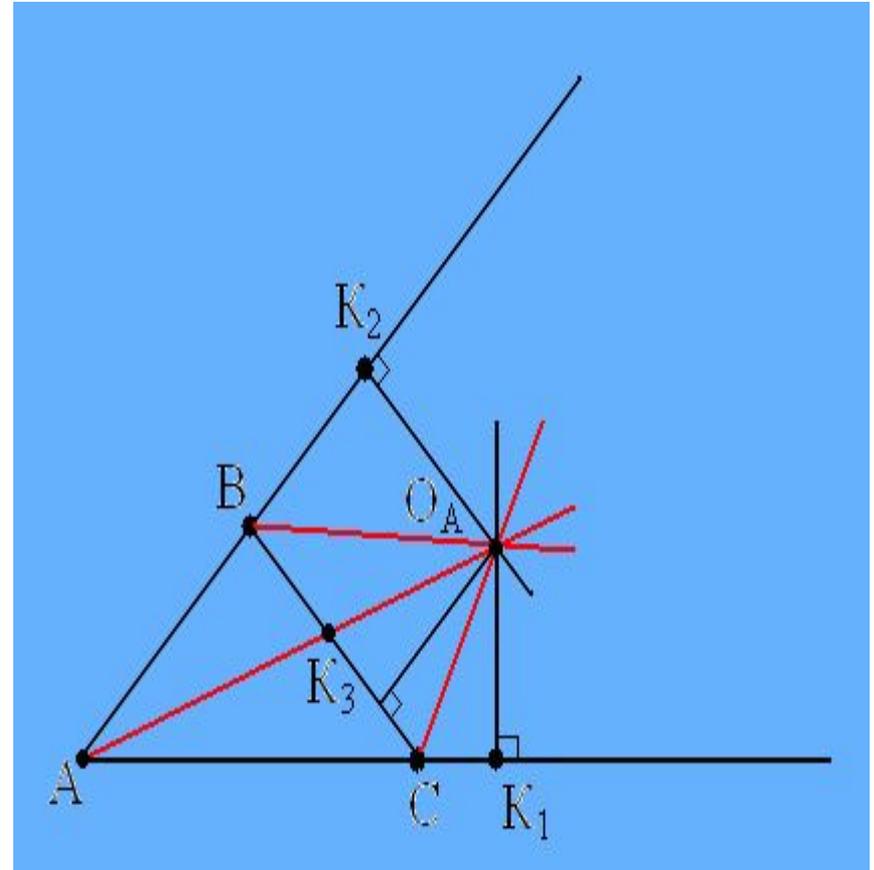
Вневписанная окружность



Свойства вневписанной окружности и ее связь с основными элементами треугольника

Теорема.

Пусть K_1 - точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AC треугольника ABC . Тогда длина отрезка AK_1 равна полупериметру треугольника ABC .



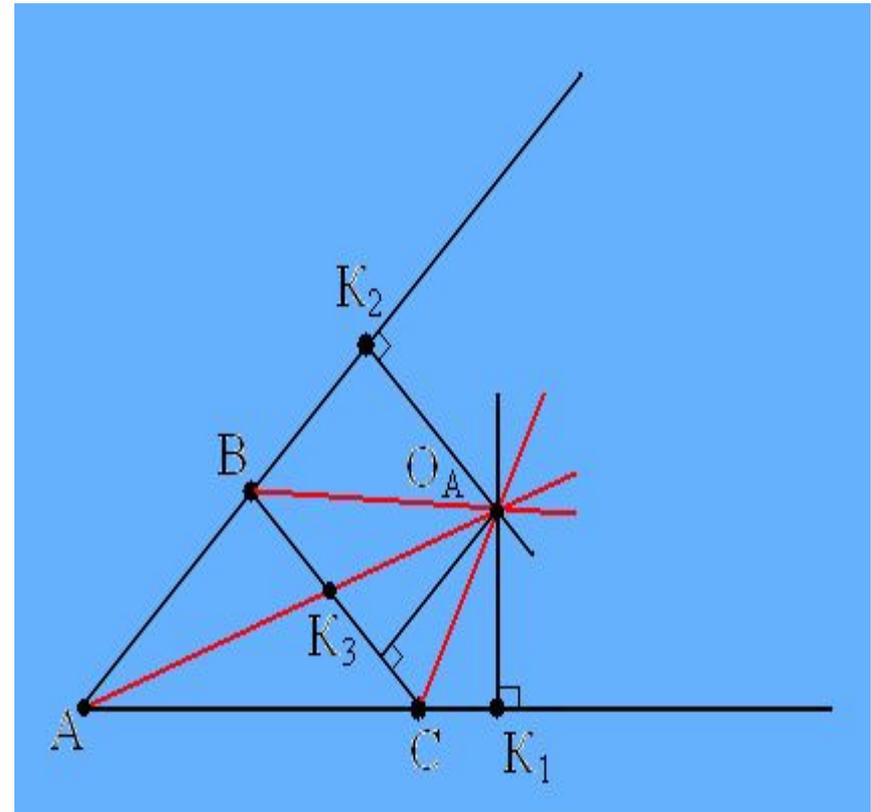
Свойства вневписанной окружности и ее связь с основными элементами треугольника

Доказательство:

1) Пусть точки K_2 и K_3 — точки касания вневписанной окружности с прямыми AB и BC соответственно.

2) $CK_1 = CK_3$, $BK_2 = BK_3$,
 $AK_1 = AK_2$ (по свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки).

3) $P = AC + CB + AB =$
 $= AC + CK_3 + BK_3 + AB =$
 $= AC + CK_1 + BK_2 + AB =$
 $= AK_1 + AK_2 = 2AK_1$
Значит, $AK_1 = P : 2$



Основные обозначения

a, b, c — длины сторон BC, CA и AB ;

α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C ;

p — полупериметр;

R — радиус описанной окружности;

r — радиус вписанной окружности;

Соотношения между радиусами вписанной, описанной и невписанной окружностей

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

$$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2$$

$$r_a r_b r_c = pS \quad r = \frac{1}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}$$

Формулы , выражающие связь с основными элементами треугольника

$$r_a = \frac{S}{p - a}$$

$$r_c = \frac{S}{p - c}$$

$$r_b = \frac{S}{p - b}$$

Решение задач

Задача 1. Две непересекающиеся окружности с радиусами R_1 и R_2 касаются стороны прямого угла с вершиной A . Общая внутренняя касательная с окружностями пересекает стороны угла в точках B и C . Найти площадь треугольника ABC .

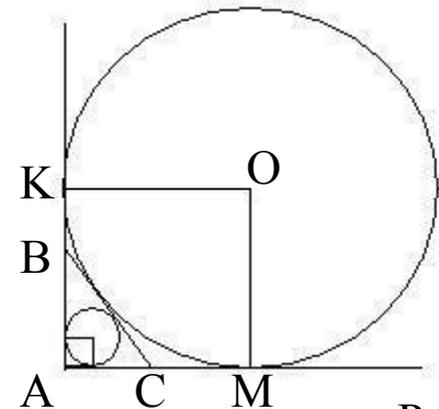


Рис. 1

Решение: так как обе окружности касаются сторон угла, то одна из них будет вписанной в треугольник ABC , а другая внеписанной. Пусть $R_1 \ll R_2$, где R_1 и R_2 – соответственно радиусы вписанной и внеписанной окружностей (рис. 1). Если O – центр внеписанной окружности, а точки K и M – её точки касания со сторонами угла A , легко доказать, что $AKOM$ – квадрат со стороной R_2 . По теореме $2_{AK} = \frac{AC + AB + BC}{2} = p$. Но так как $AK = R_2$, то $p = R_2$. А $R_1 = \frac{S}{p}$. Отсюда следует, $S = R_1 \times p$, $S = R_1 \times R_2$.

Ответ: $S = R_1 \times R_2$.

Решение задач

Задача 2. К двум непересекающимся окружностям проведены две общие внешние касательные и общая внутренняя касательная. Докажите, что отрезок внутренней касательной, заключенный между внешними касательными, равен отрезку внешней касательной, заключенному между точками касания.

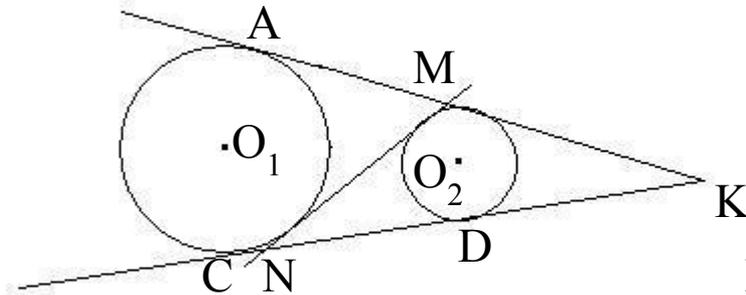


Рис. 2

Решение: Пусть даны две окружности. Точки касания окружностей с первой внешней касательной – А и В, со второй – С и D(рис. 2).

Внутренняя касательная пересекает внешние в точках М и N. Продолжим прямые АВ и CD. До их пересечение в точке К. Тогда окружность с центром O_2 является вписанной в треугольник MNK, а окружность с центром O_1 – невписанной. Обозначим сторону MN треугольника MNK – а и его периметр – р. Тогда (по т.2) $AK=p$ и $BK=p-a$. Значит, $AB=a$, то есть $AB=MN$. Аналогично $CD=MN$.

Решение задач

Задача 3. В равнобедренном треугольнике с основанием 12 вписана окружность, к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметра малых треугольников равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.

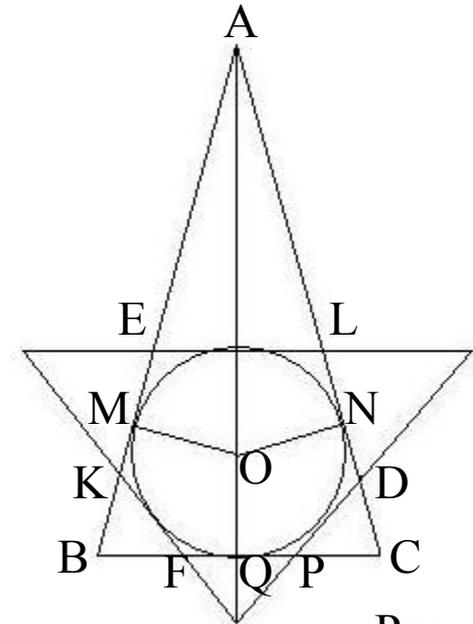


Рис. 3

Решение: Окружность с центром O – внеписанная окружность треугольников EAL , BKF и PDC . По теореме 2: $AM = \frac{1}{2}P_{\triangle EAL}$, $BM = \frac{1}{2}P_{\triangle BKF}$, $BQ = \frac{1}{2}P_{\triangle BKF}$, $QC = \frac{1}{2}P_{\triangle PDC}$, $CN = \frac{1}{2}P_{\triangle PDC}$, $AN = \frac{1}{2}P_{\triangle EAL}$. Из этого следует, что $P = P_{\triangle ABC} = P_{\triangle EAL} + P_{\triangle BKF} + P_{\triangle PDC} = 48$. Значит, $AB = \frac{P_{\triangle ABC} - BC}{2} = \frac{48 - 12}{2} = 18$.
Ответ: 18.

Задача из журнала «Квант»

Задача: Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей внеписанной окружностью лежат на одной прямой.

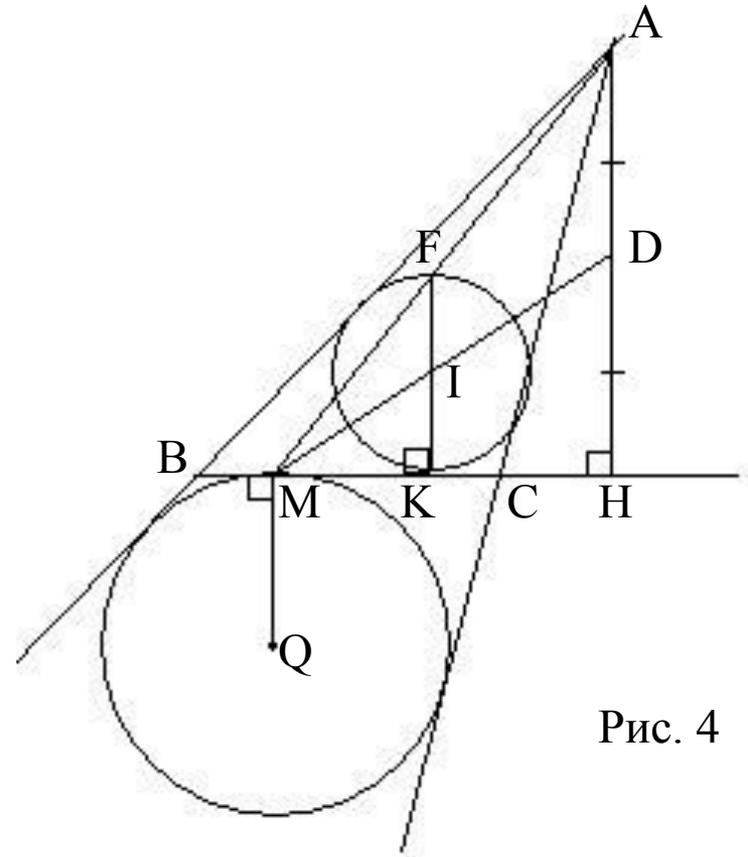


Рис. 4

Задача из журнала «Квант»

Решение: Рассмотрим треугольник ABC , в котором AN – высота, точка D – её середина, точки I и Q – центры вписанной и невписанной (касающейся стороны BC) окружностей соответственно, K и M – точки касания этих окружностей со стороной BC (рис. 4).

Проведем KF – диаметр вписанной окружности, тогда точки A , F и M лежат на одной прямой. Так как $KF \parallel AN$, то медиана MD треугольника AMN проходит через середину отрезка KF , то есть содержит точку I .

Задача из ГИА

20

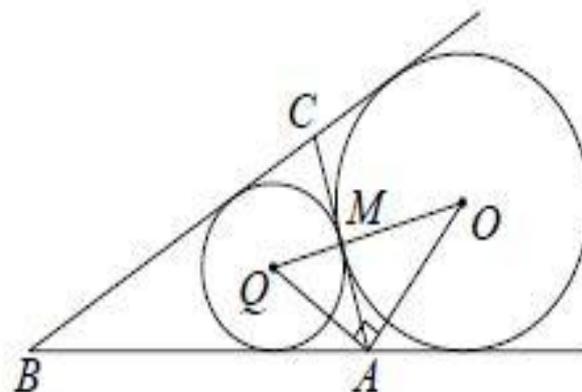
Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Из прямоугольного треугольника OAQ (AQ и AO — биссектрисы смежных углов) находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.



Решение задач

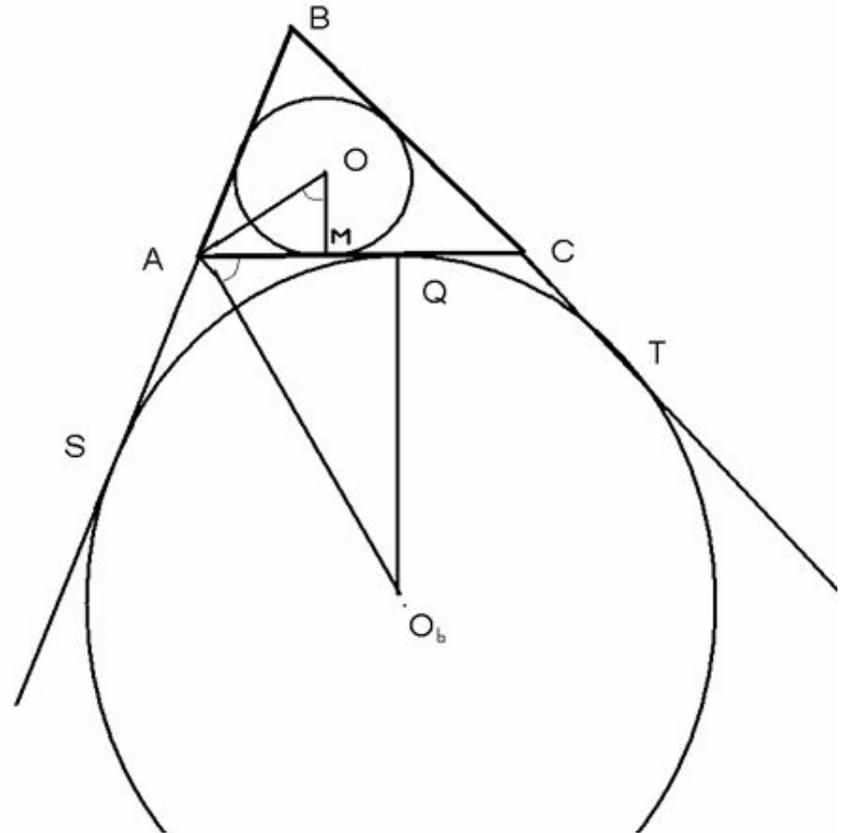
Задача .

Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c . Найти длину отрезков, на которые делятся стороны треугольника точками касания вневписанных окружностей.

Решение.

Пусть $AQ=y$. Тогда $AS=y, QC=CT=b-y, BS=BT$, а поэтому $c+y=a+(b-y)$,

Аналогично можно вычислить и длины других отрезков.



Заключение

Геометрия начинается с треугольника, а треугольник неисчерпаем. Даже с половиной тысячи лет постоянно открываются его новые свойства. К сожалению, в школьной программе вневписанной окружности уделяется незначительное время и внимание, но при более подробном знакомстве можно увидеть в ней скрытую красоту и силу, можно рассматривать её как подспорье в решении геометрических задач.

Литература

<http://rgp.nm.ru/knigi/kulanin5.html>

<http://www.geometr.info/geometriia/treug/radiusy.html>

<http://schools.techno.ru/sch758/aishat/bis.htm>

Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Киселева Л.С., Позняк Э.Г. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы, 9 издание.- М.: Просвещение, 2000.

Биссектрисы вписанной и невписанной окружности треугольника // Квант №7, 1987.

Гнеденко Б.В. Энциклопедический словарь юного математика. - М.: «Педагогика», 1989.

Гохидзе М. Г. Невписанная окружность // Математика в школе №3, 1989.

Гохидзе М. Г. О невписанной окружности и задачах по стереометрии.// Математика в школе №5, 1987.

О свойствах центра невписанной окружности // Квант №2, 2001.

Шарыгин Н. Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач. Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 1991.-С.138-140.