

# Линейная алгебра

**Лекцию читает**

**доцент**

**кафедры математики и информатики**

**Романова**

**Юлия Станиславовна**

# Структура дисциплины

**-линейная алгебра;**

**-векторный анализ;**

**-аналитическая геометрия;**

# Список литературы

- Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. М:Айрис-пресс,2009.
- Кремер Н. Ш.и др. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум М. : Юрайт, 2012.
- Шипачев В. С. Высшая математика : учебное пособие для бакалавров. М. : Юрайт, 2012.
- Данко П. Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1,2 –М.:Оникс:2008.
- Романова Ю.С. Линейная алгебра: УМК, 2013

# Системы линейных уравнений

**Системой  $n$  линейных уравнений** называются  $n$  уравнений, содержащих искомые переменные в первой степени

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Переменные, коэффициенты системы, свободные члены, решение СЛУ, совместность, определенная и неопределенная СЛУ

**Матрицей** системы двух линейных уравнений называется таблица чисел, составленная из коэффициентов системы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Элементы  $M$ , порядок, квадратная  $M$ , главная и побочная диагонали, определитель  $M$  2-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D,$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

**Формулы Крамера** для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

# Теорема Крамера

1. Если определитель СЛУ **отличен от нуля**

$D \neq 0$  , то система совместна и имеет **единственное решение**, которое находится по формулам Крамера.

$D=0$ :

2. Если хотя бы один из определителей  $D_1$  или  $D_2$  отличен от нуля, то система уравнений несовместна.

3. Если оба определителя  $D_1 = D_2 = 0$ , то СЛУ имеет бесконечное множество решений.

**Пример.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ 5x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 = -26;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 12 \cdot 5 = -39.$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-26}{-13} = 2,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-39}{-13} = 3.$$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ -2x_1 + 6x_2 = -4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = 0.$$

$$x_1 = 2 + 3x_2, \quad x_2 \in R.$$

**Пример.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-4)(-3) = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 21 = 33$$

**Система несовместна**

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Минор** элемента  $a_{ik}$  матрицы третьего порядка:  $M_{ik}$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## Алгебраическое дополнение элемента $a_{ik}$ :

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

**Пример.**

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$

## Определитель матрицы третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

### Правило треугольника



**Пример.** Вычислить определитель двумя способами: по определению и по правилу треугольника

треугольника 
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1-й способ:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2A_{11} + (-1)A_{12} + 1A_{13} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1(-1) = 3.$$

2-й способ:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2(-1) + (-1)(-3)1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1)1(-1) - 2(-3) \cdot 1 =$$

$$= -4 + 3 + 1 - 2 - 1 + 6 = 3$$

# Матрицы

# Матрицы

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется **матрицей с размерами  $m \times n$**  :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

диагональная

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

единичная

## Операции с матрицами:

-равенство;

-транспонирование;

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

-сложение;

-произведение на число;

-перемножение.

## Пример.

$$A + 3B = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 0 & -3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+3 & -2-9 & 4+6 \\ 1+0 & 0-3 & 2+15 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 7 & 10 \\ 1 & -3 & 17 \end{vmatrix}$$

Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на матрицу  $B$  размера  $n \times p$  называется матрица  $C$  размера  $m \times p$ :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk}.$$

**Пример.** Вычислить произведение матриц  $A$  на  $B$  и  $B$  на  $A$ .

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 & 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & -5 & 2 \\ -9 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -13 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}$$

## Обратная матрица: $A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

**Теорема.** Для того, чтобы матрица  $A$  имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы ее **определитель был не равен нулю:**

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

# Решение системы линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}.$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\underline{AX = B}, \quad A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

$$A^{-1}A = E, \quad EX = X, \quad X = A^{-1}B.$$

**Пример.** Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases} \quad X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{vmatrix}.$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 63 + 40 + 27 - 45 - 28 - 54 = 3.$$

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(27 - 20) = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 15 = 6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(28 - 27) = -1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7 - 10) = 3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 65 - 45 - 14 \\ -91 + 90 - 14 \\ -78 + 45 + 42 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 3.$$

# Самостоятельная работа

1. Алгебраическое дополнение элемента  $a_{23}$

матрицы  $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$  равно...

1) **2**

2) **-2**

3) **6**

4) **14**

# Самостоятельная работа

2. Определитель  $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$  равен .....

- 1) -1                      2) -5                      3) 5                      4) 1

3. Если определитель системы не равен нулю, то система имеет.....

- 1) единственное решение;
- 2) бесконечное число решение;
- 3) не имеет решений;
- 4) два решения.

# Самостоятельная работа

4. Матрица  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  является.....

1) квадратной;

2) единичной;

3) нулевой;

4) диагональной

5. С матрицами  $A = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$  и  $B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

МОЖНО ВЫПОЛНИТЬ ОПЕРАЦИЮ.....

1)  $A + B$

2)  $A - B$

3)  $A \times B$

4)  $B \times A$

## Самостоятельная работа

6. Решение матричного уравнения  $A \cdot X = B$   
имеет вид.....

1)  $X = \frac{B}{A}$

2)  $X = B \cdot A^{-1}$

3)  $X = A^{-1} \cdot B$

4)  $X = A \cdot B^{-1}$