

Правильные многогранники

Тетраэдр

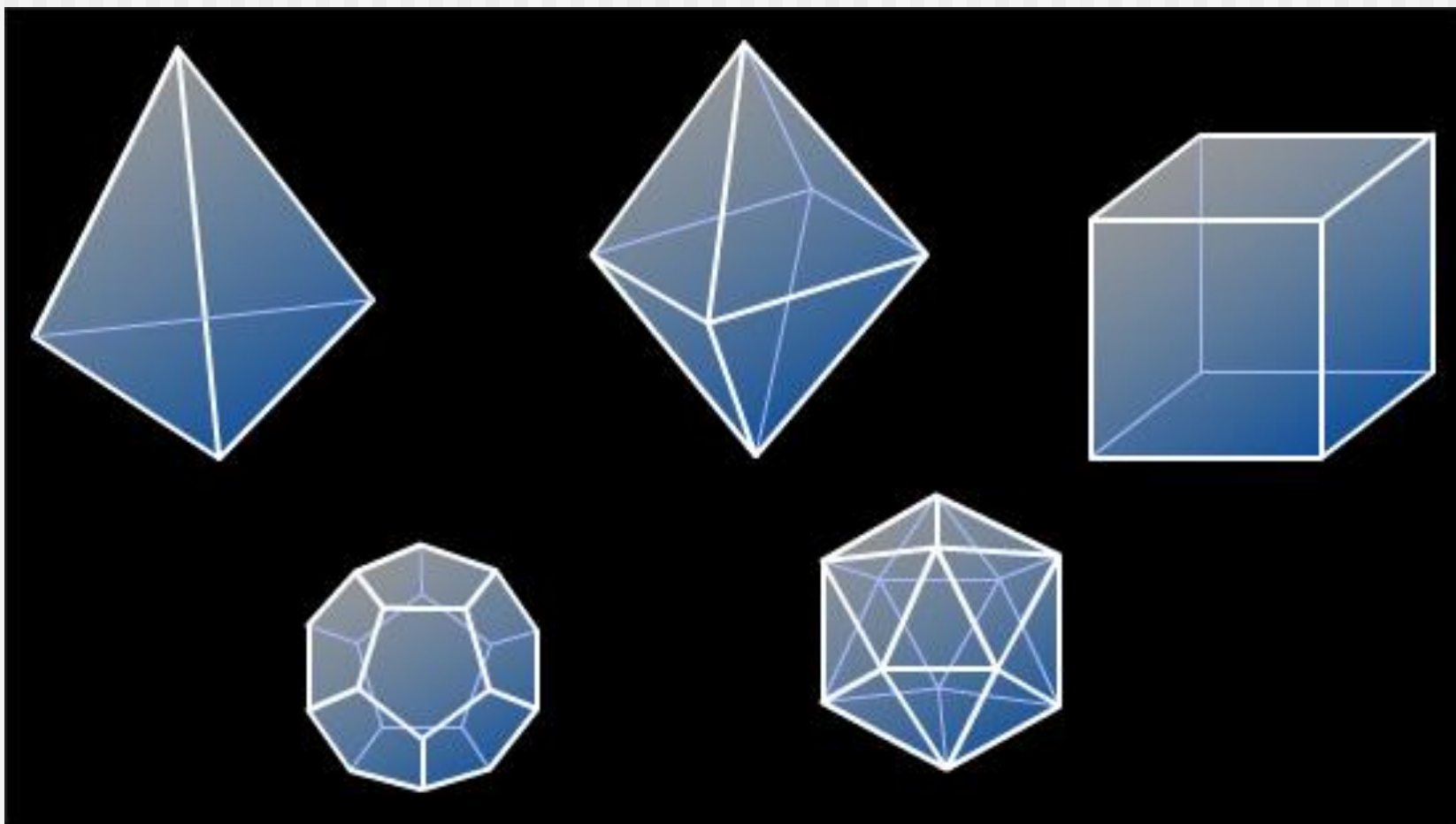
Октаэдр

Икосаэдр

Куб

Додекаэдр

Виды правильных многогранников



Еще в древней Греции были известны пять удивительных многогранников.

Их изучали ученые, ювелиры, священники, архитекторы. Этим многогранникам даже приписывали магические свойства. Древнегреческий ученый и философ Платон (IV–V в до н. э.) считал, что эти тела олицетворяют сущность природы. В своем диалоге «Тимей» Платон говорит, что атом огня имеет вид тетраэдра, земли – гексаэдра (куба), воздуха – октаэдра, воды – икосаэдра. В этом соответствии не нашлось места только додекаэдру и Платон предположил существование еще одной, пятой сущности – эфира, атомы которого как раз и имеют форму додекаэдра. Ученики Платона продолжили его дело в изучении перечисленных тел. Поэтому эти многогранники называют ***платоновыми телами***.

Понятие правильного многогранника

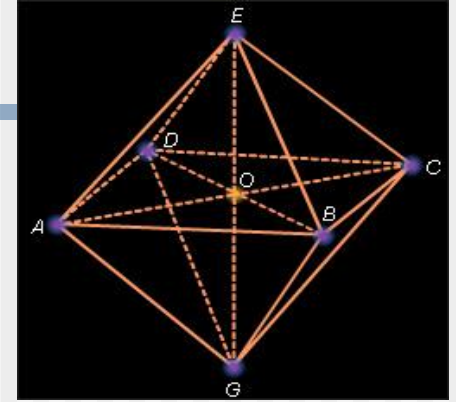
- Многогранник называется правильным, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники, из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер и все двугранные углы равны.
- Существуют пять типов правильных многогранников: тетраэдр (треугольная пирамида), гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Можно доказать, что других правильных многогранников не существует.

Гексаэдр (*куб*, hexa – шесть). Гексаэдр – правильный многогранник, все грани которого – квадраты, и из каждой вершины выходит три ребра.

Тетраэдр (tetra – четыре, hedra – грань). Правильный тетраэдр – правильный четырехгранник, то есть тетраэдр с равными ребрами, представляет собой правильный многогранник, все грани которого – правильные треугольники и из каждой вершины которого выходит ровно три ребра.

Октаэдр (okto – восемь). Это правильный многогранник, все грани которого – правильные треугольники и к каждой вершине прилегают четыре грани. Покажем, что этот многогранник имеет восемь граней, указав способ его построения.

Рассмотрим квадрат $ABCD$ и построим на нем, как на основании, по обе стороны от его плоскости четырехугольные пирамиды, боковые ребра которых равны сторонам квадрата. Полученный многогранник и будет октаэдром



Существует правильный многогранник, у которого все грани – правильные треугольники, и из каждой вершины выходит 5 ребер. Этот многогранник имеет 20 граней, 30 ребер, 12 вершин и называется **икосаэдром** (icosi – двадцать).

Существует правильный многогранник, у которого все грани правильные пятиугольники и из каждой вершины выходит 3 ребра. Этот многогранник имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин и называется **додекаэдром** (dodeka – двенадцать).

Теорема

Существует не более пяти различных видов правильных многогранников.

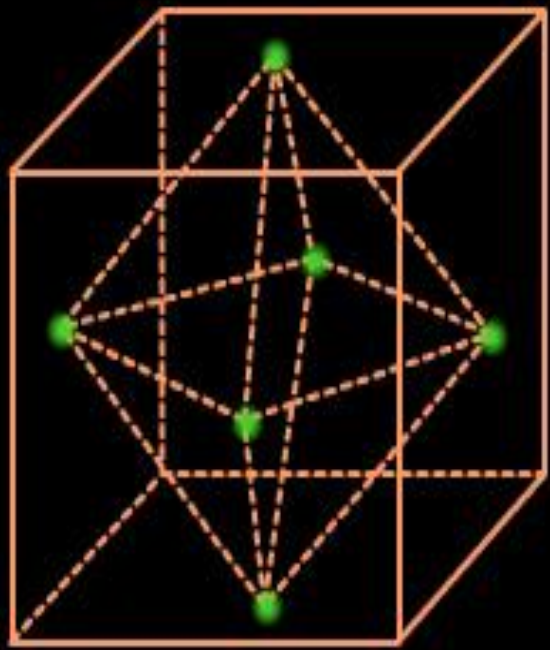
Доказательство

Из определения правильного многогранника следует, что его гранями могут быть лишь треугольники, четырехугольники и пятиугольники. Действительно, докажем например, что грани не могут быть правильными шестиугольниками. По определению правильного многогранника, в каждой его вершине должны сходиться не менее трех граней. Однако, в правильном шестиугольнике углы равны 120° . Получается, что сумма трех плоских углов выпуклого многогранного угла равна 360° , а это невозможно, так как эта сумма всегда меньше 360° . Тем более грани правильного многогранника не могут оказаться многоугольниками с большим числом сторон.

Выясним, сколько граней может сходиться в вершине правильного многогранника. Если все его грани – правильные треугольники, то к каждой вершине могут прилегать не более пяти треугольников, так как иначе сумма плоских углов при этой вершине будет не менее 360° , что, как мы убедились, невозможно. Итак, если все грани правильного многогранника – правильные треугольники, то к каждой вершине прилегают три, четыре или пять треугольников. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что в каждой вершине правильного многогранника, грани которого – правильные четырехугольники и пятиугольники, сходятся ровно три ребра.

Двойственные многогранники

Отметим интересный факт, связанный с гексаэдром (кубом) и октаэдром. Куб имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин, а октаэдр – 8 граней, 12 ребер и 6 вершин. То есть число граней одного многогранника равно числу вершин другого и наоборот. Как говорят, куб и гексаэдр являются двойственными друг к другу. Это также проявляется в том, что если взять куб и построить многогранник с вершинами в центрах его граней, то, как несложно убедиться, получится октаэдр. Верно и обратное – центры граней октаэдра служат вершинами куба. В этом-то и состоит двойственность октаэдра и куба. Если взять центры граней правильного тетраэдра, то мы вновь получим правильный тетраэдр. Таким образом, тетраэдр двойственен самому себе.



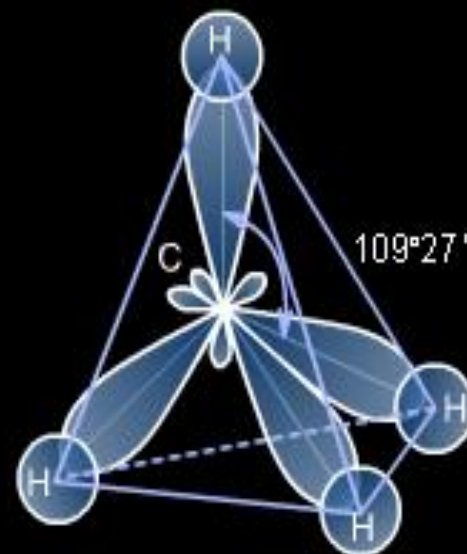
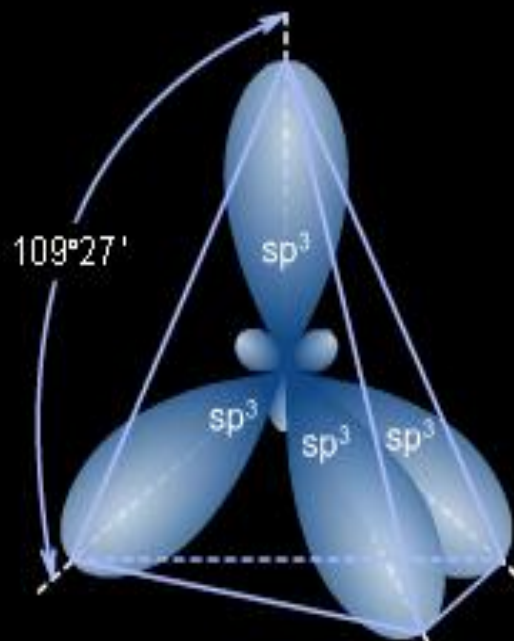
Возьмем икосаэдр и рассмотрим многогранник с вершинами в центрах его граней. Очевидно, что центры пяти граней икосаэдра, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости и служат вершинами правильного пятиугольника. Итак, каждой вершине икосаэдра соответствует грань нового многогранника, грани которого – правильные пятиугольники, а все двугранные углы равны. Из всего вышесказанного следует, что полученный многогранник является правильным и имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин. Такой многогранник и называется додекаэдром.



Итак, в трехмерном пространстве существует только пять видов правильных многогранников. Мы определили их вид и установили, что все многогранники имеют двойственные к ним. Куб двойственен к октаэдру и наоборот. Икосаэдр – к додекаэдру и наоборот. Тетраэдр двойственен сам себе.

Правильные многогранники в химии

$\arccos(-1/3)=109^{\circ}27'$ знакомая величина из курса химии: это угол между связями C–H в молекуле метана, который удается очень точно измерить в эксперименте, а поскольку ни один атом водорода в молекуле CH_4 , очевидно, ничем не выделен, то разумно предположить, что эта молекула имеет форму правильного тетраэдра. Этот факт подтверждается фотографиями молекулы метана, полученными при помощи электронного микроскопа.



Тест по теме правильные многогранники

- Сколько граней у гексаэдра?
- Верно ли определение: многогранник называется правильным, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники, все двугранные углы которых равны.
- Является ли правильным многогранник с вершинами в серединах ребер правильного тетраэдра?