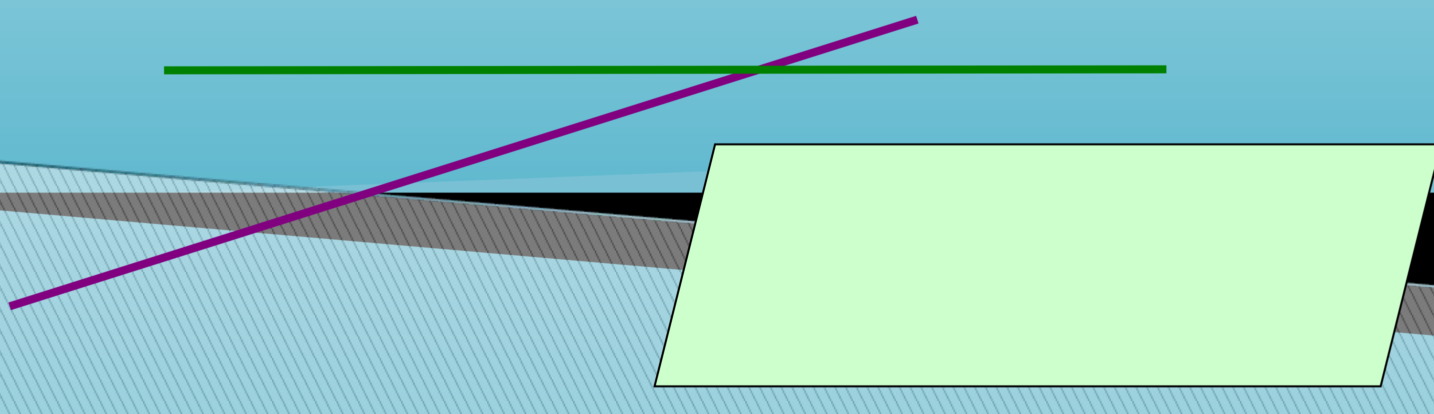
Прямые и плоскости в пространстве

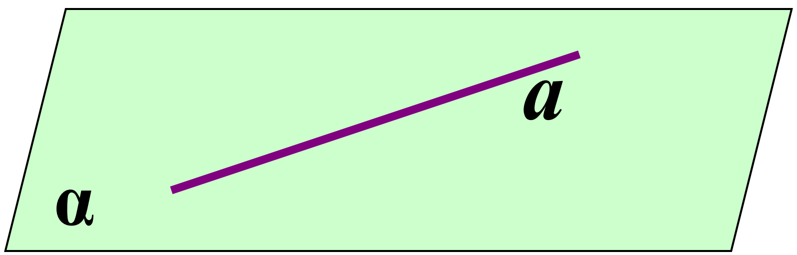
Часть 2_1

Презентацию подготовила учитель математики
МБОУ СОШ №4 г.Покачи ХМАО-Югра
Литвинченко Л.В.

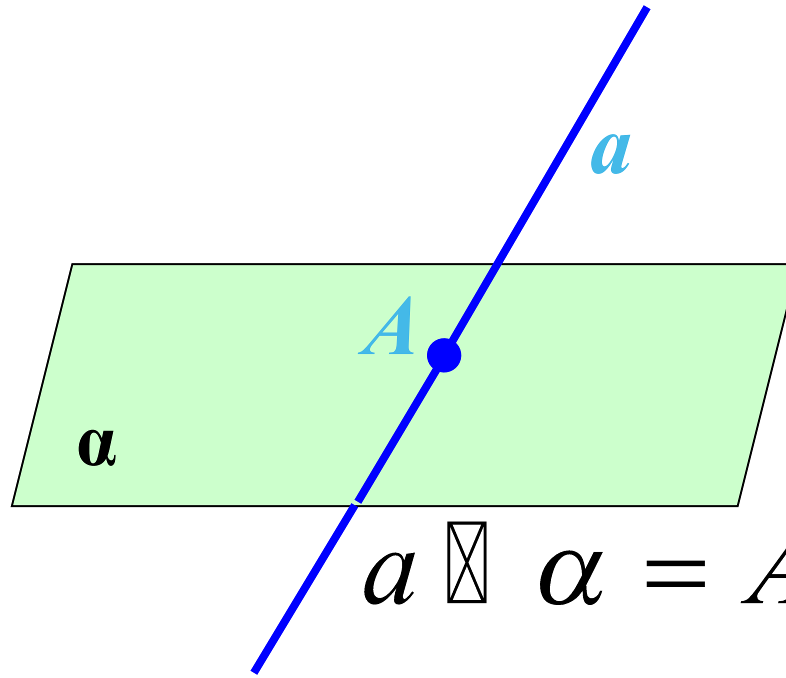
Взаимное расположение прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости.



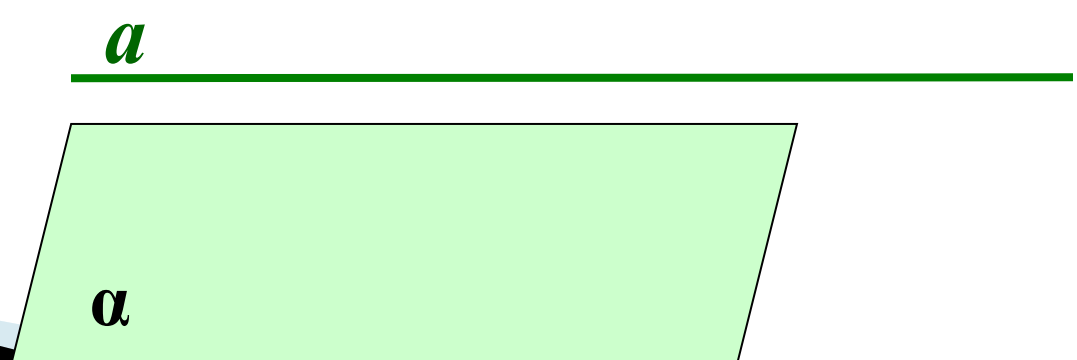
Взаимное расположение прямой и плоскости.



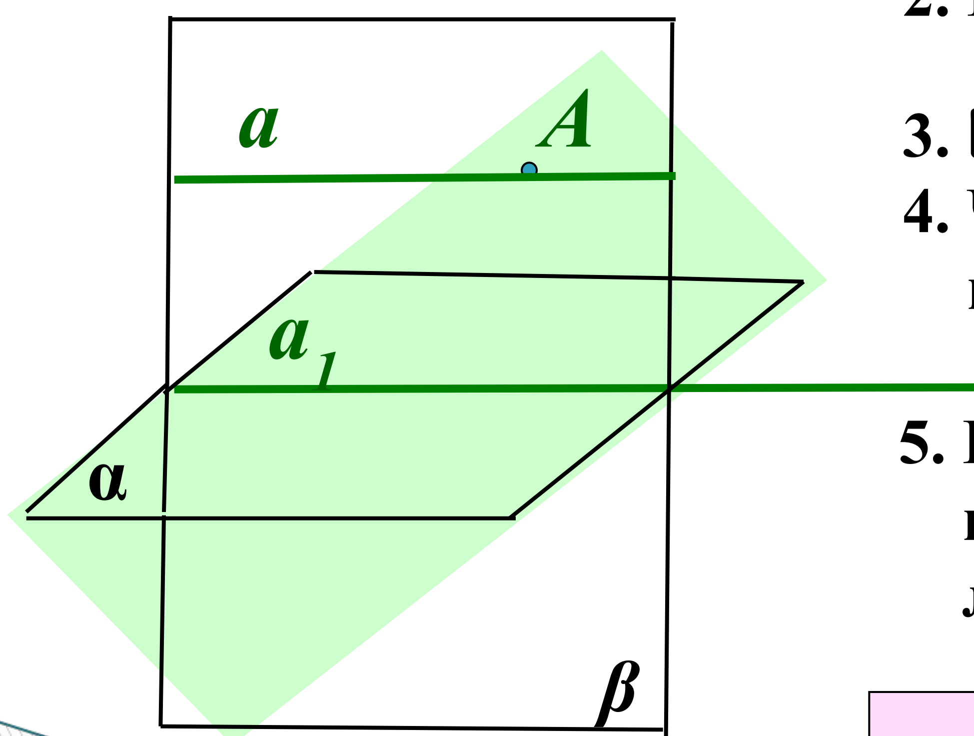
$$a \subset \alpha$$



$$a \cap \alpha = A$$



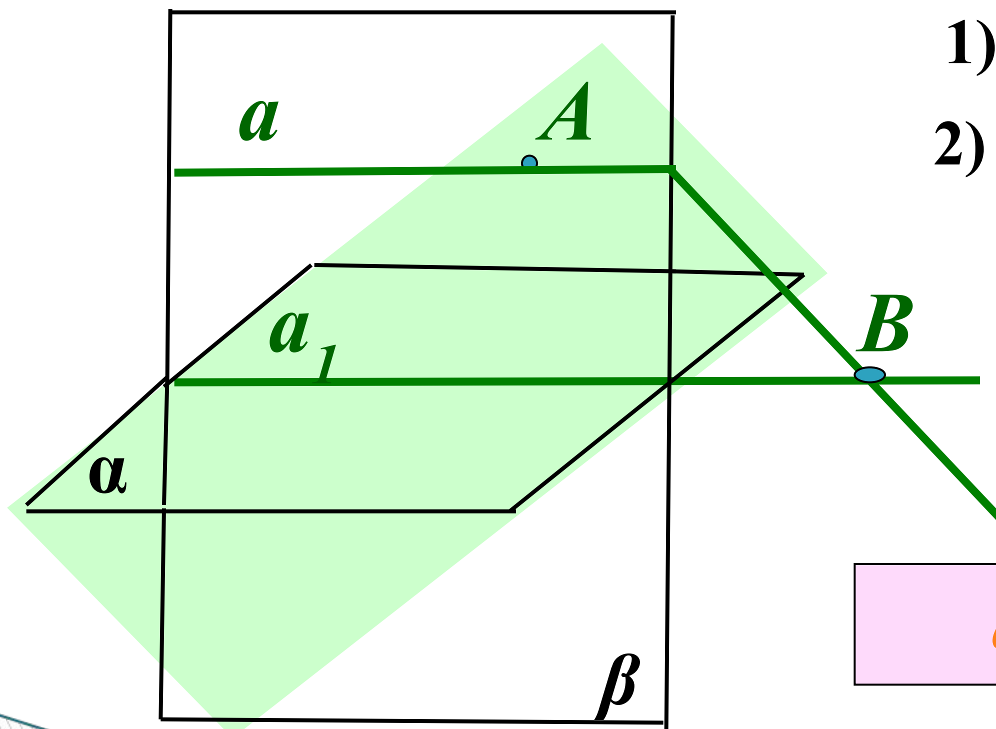
Построение прямой, не пересекающей плоскость.



1. Проведем плоскость α.
2. В данной плоскости проведем прямую a_1.
3. Возьмем вне плоскости т.А
4. Через точку А и прямую a_1 проведем плоскость β
5. В плоскости β через точку А проведем прямую *a* параллельную прямой a_1.

a – искомая прямая.

Построение прямой, не пересекающей плоскость.



Доказательство:

1) Пусть $a \cap \alpha = B$.

2) $\beta \cap \alpha = a_1$
$B \in \beta$
$B \in \alpha$

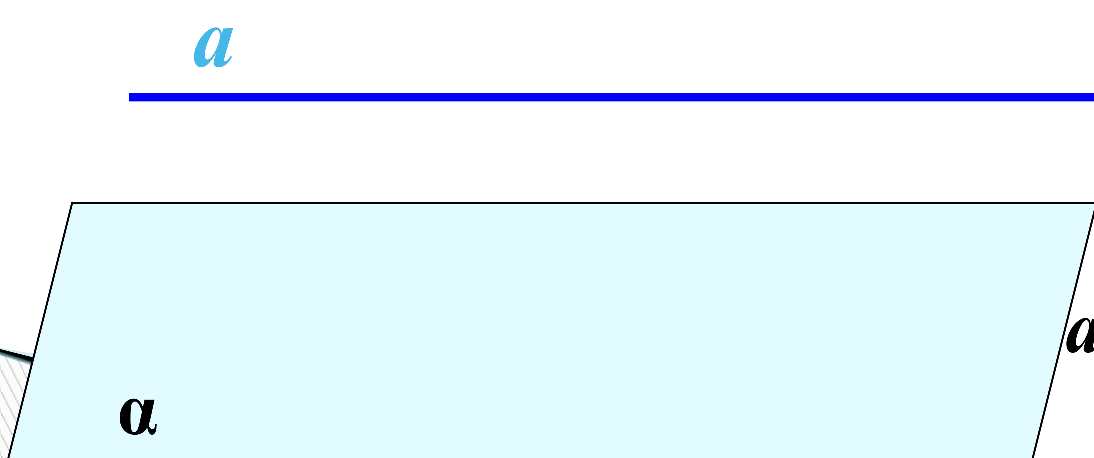
$B \in a_1$, т.е.
$a \cap a_1 = B$, что противоречит построению
$(a \parallel a_1)$

a и α не пересекаются.

ч.т.д.

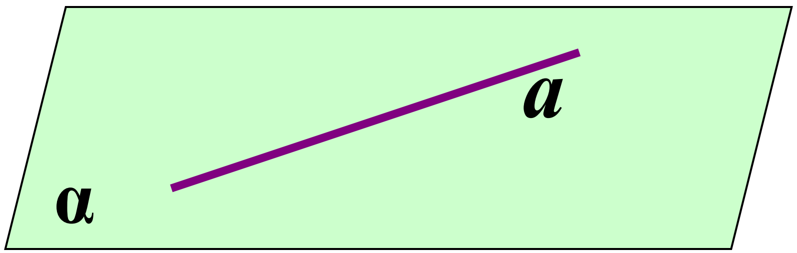
Определение параллельности прямой и плоскости.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

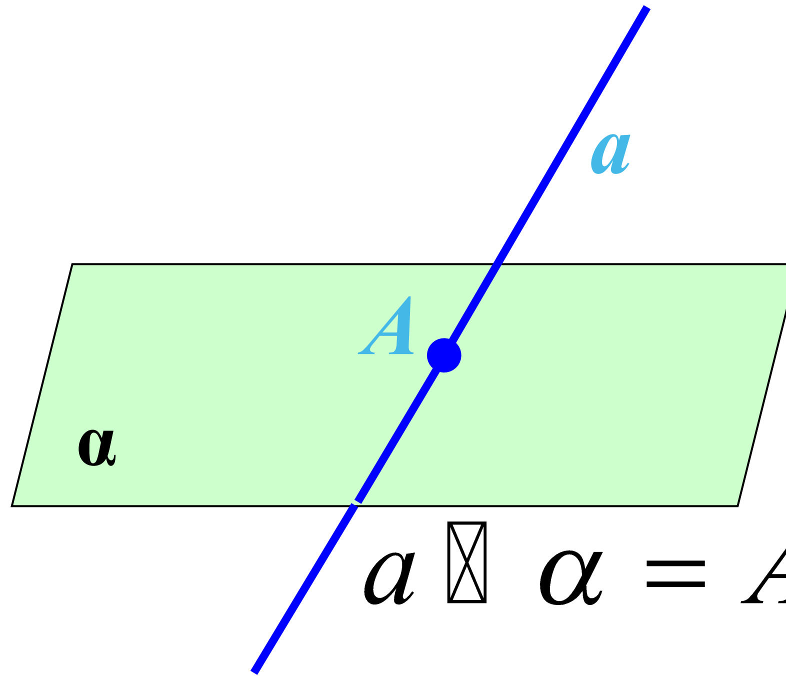


$a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$

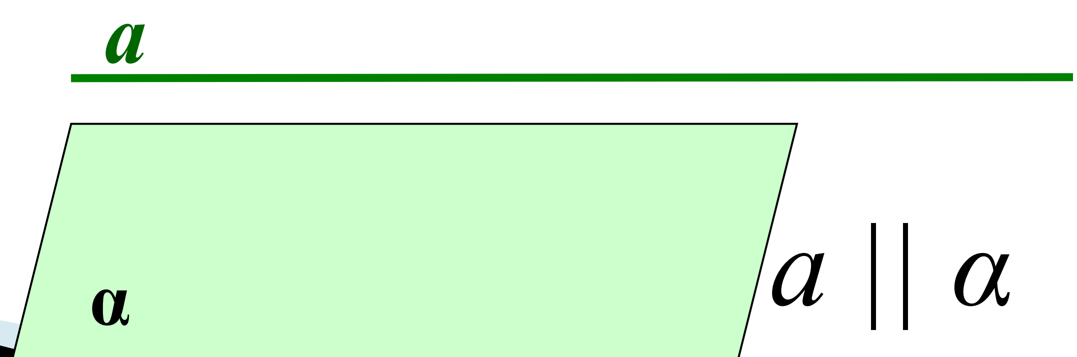
Взаимное расположение прямой и плоскости.



$$a \subset \alpha$$



$$a \cap \alpha = A$$

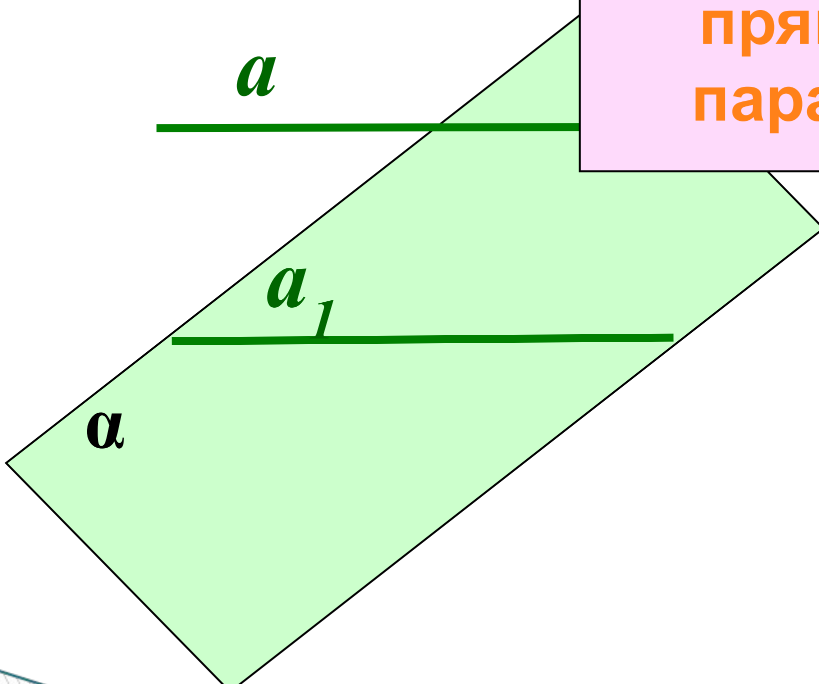


$$a \parallel \alpha$$

Построение параллельных прямой и плоскости.

Признак параллельности прямой и плоскости.

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

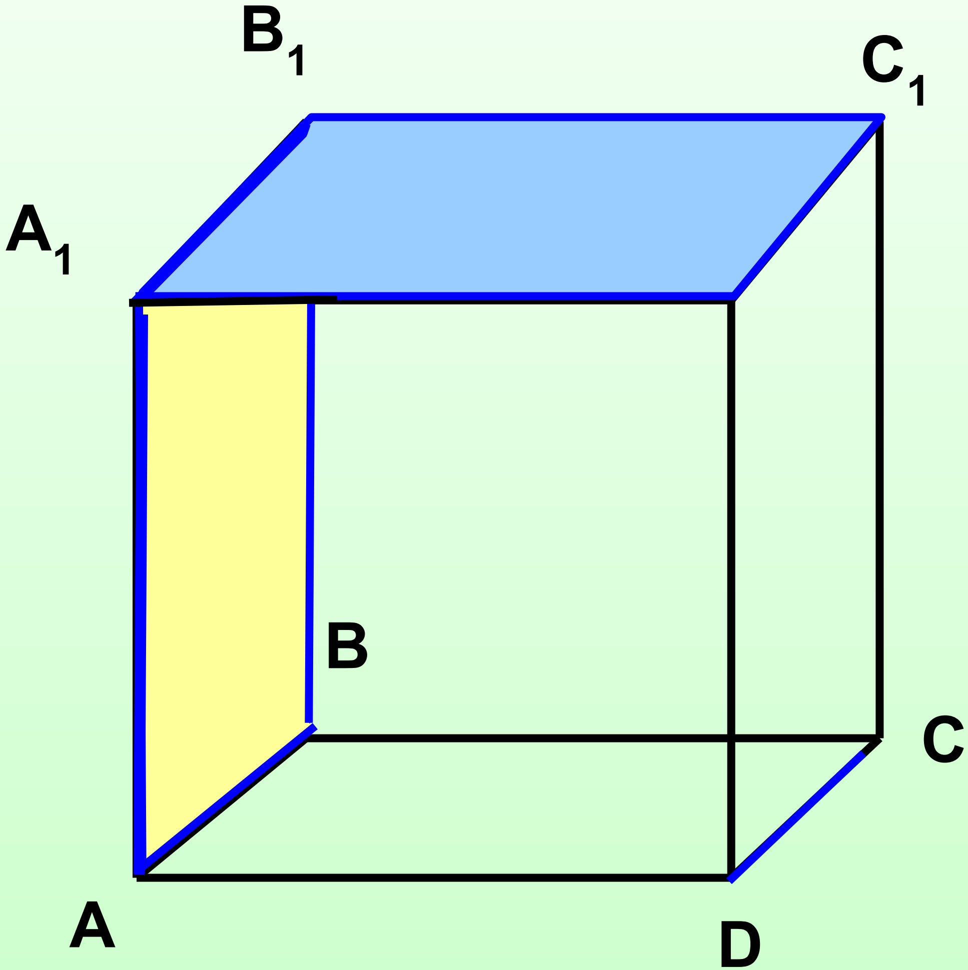


$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ a \parallel a_1 \\ a_1 \subset \alpha \end{array}\right| \quad a \parallel \alpha$$

На модели куба укажите плоскости, параллельные прямой DC, прямой DD_1. Как установить параллельность прямой и плоскости?

$DC \parallel (AA_1B_1)$

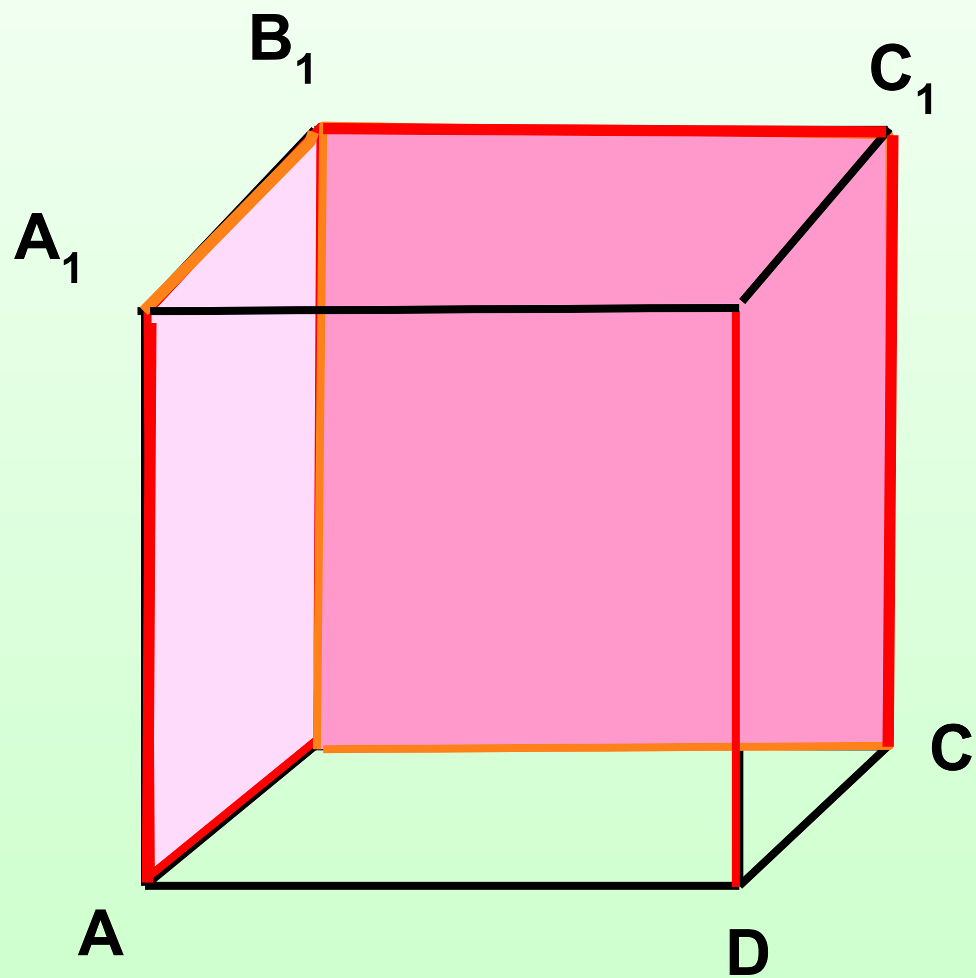
$DC \parallel (A_1B_1C_1)$



На модели куба укажите плоскости, параллельные прямой DC, прямой DD_1. Как установить параллельность прямой и плоскости?

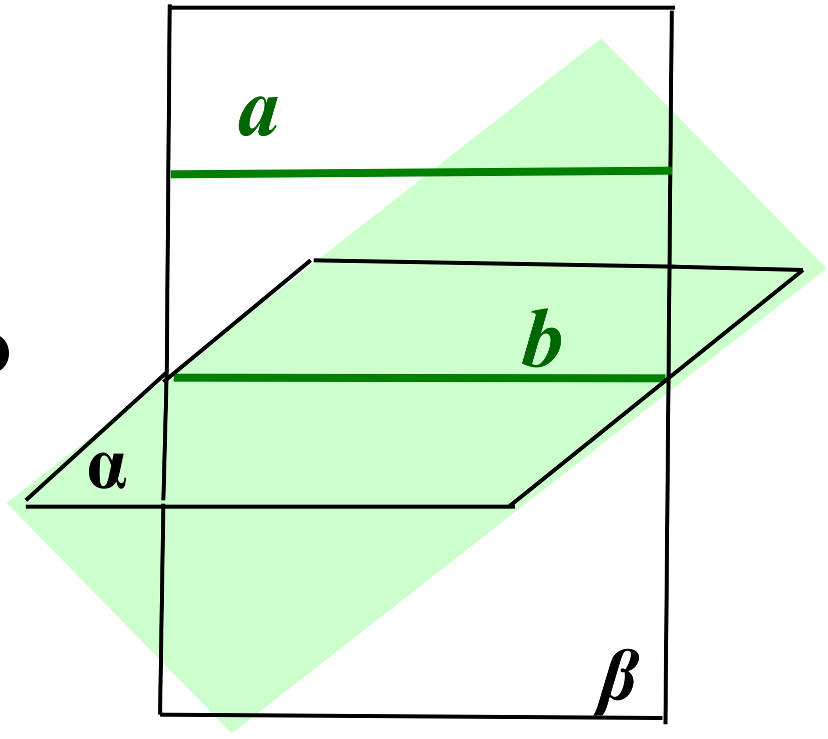
$DD_1 \parallel (AA_1B_1)$

$DD_1 \parallel (B_1C_1C)$



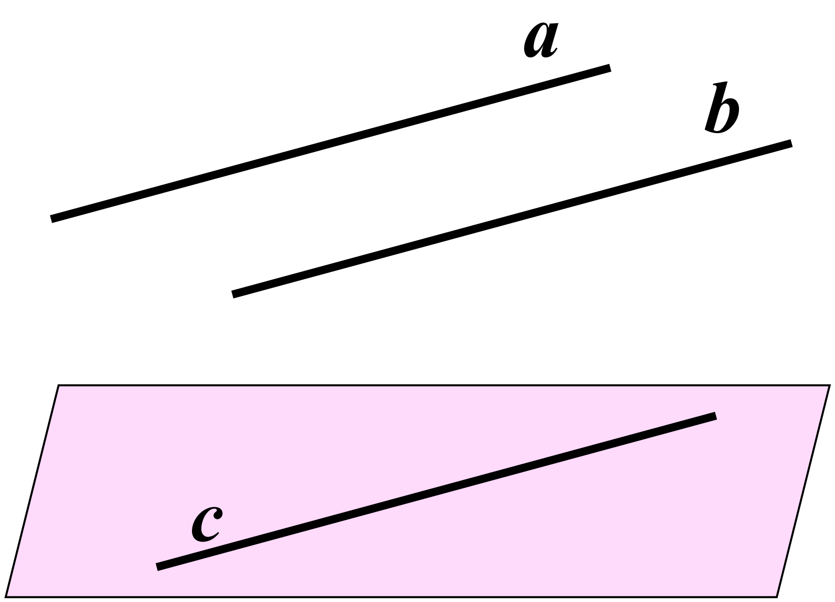
Утверждение 1.

- **Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.**



Утверждение 2.

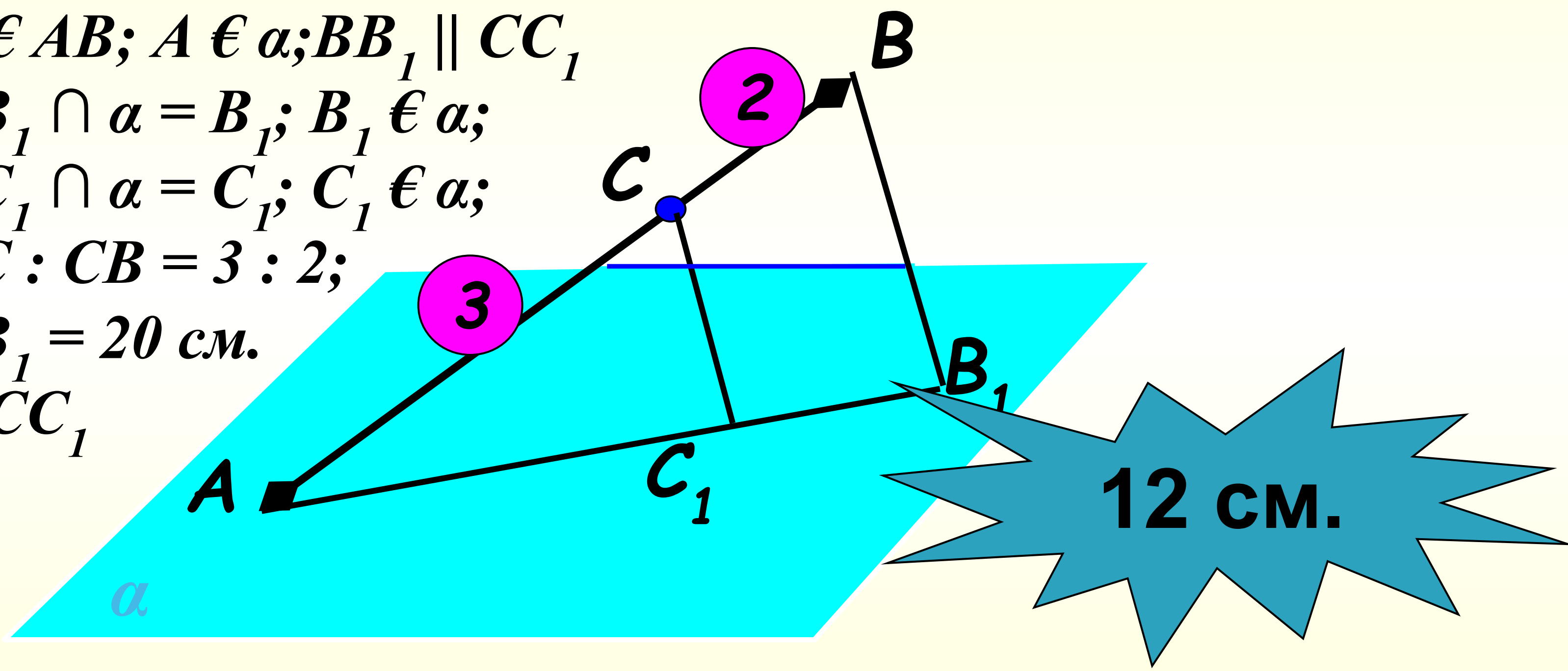
- Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна этой плоскости, либо лежит в этой плоскости.



Задача №18 (б)

Дано: $C \in AB$; $A \in \alpha$; $BB_1 \parallel CC_1$
$BB_1 \cap \alpha = B_1$; $B_1 \in \alpha$;
$CC_1 \cap \alpha = C_1$; $C_1 \in \alpha$;
$AC : CB = 3 : 2$;
$BB_1 = 20$ см.

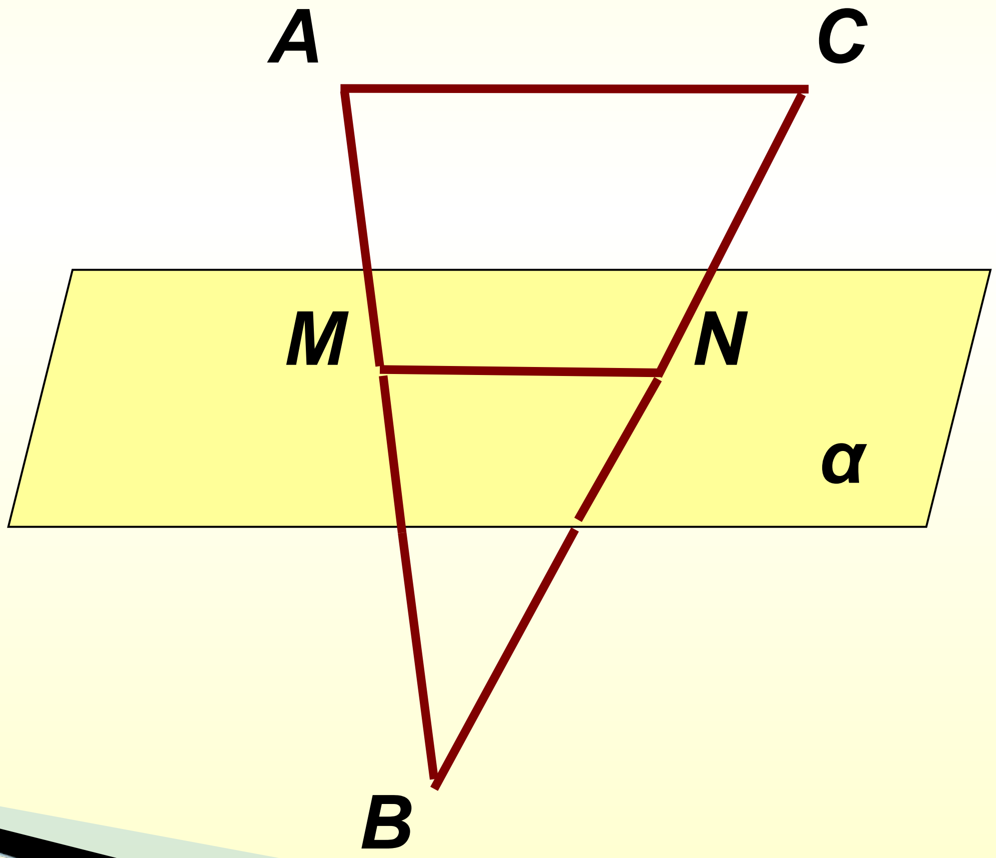
Найти: CC_1



1. Доказать, что точки A, B_1, C_1 лежат на одной прямой.
2. Найти CC_1 используя подобие треугольников.

№ 26

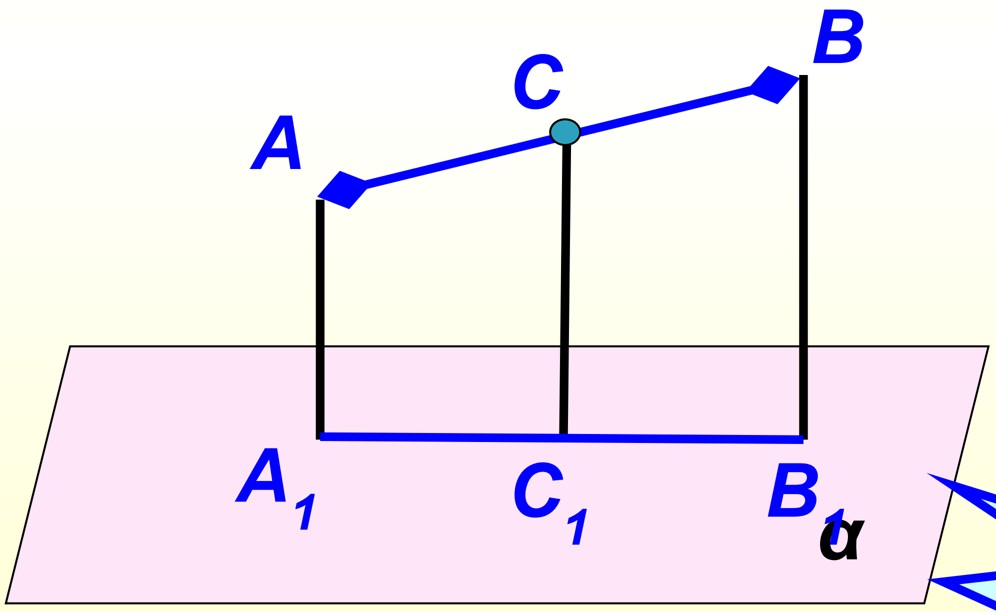
Дано: AC || α, AB ∩ α = M;
CB ∩ α = N.
Доказать: ∆ABC подобен ∆MNB.



Задача.

- Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через середину отрезка C и концы отрезка A и B проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 и C_1.

  Вычислить длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 5$, $BB_1 = 7$.

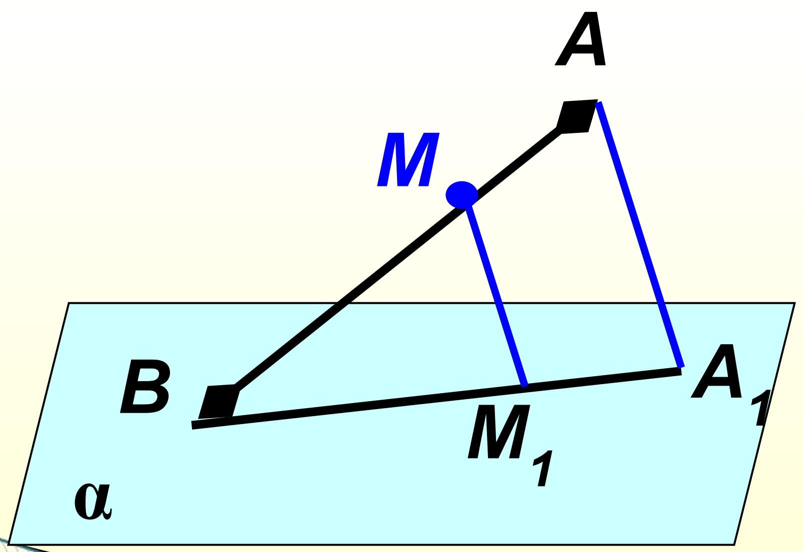


Ответ:6

Задача.

- Точка M лежит на отрезке AB. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке B. Через A и B проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках A_1 и M_1.

а) Докажите, что A_1, M_1 и B лежат на одной прямой.

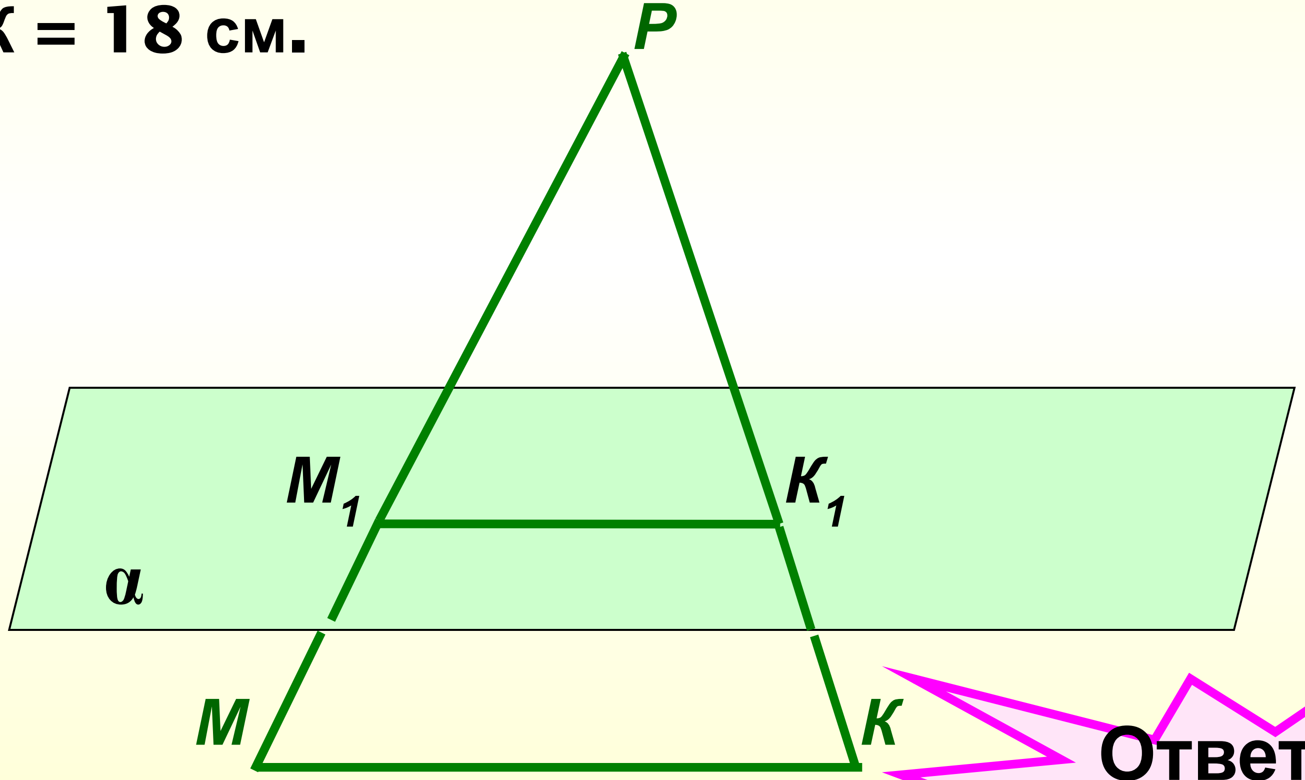


б) Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 : MM_1 = 3 : 2$, $AM = 6$.

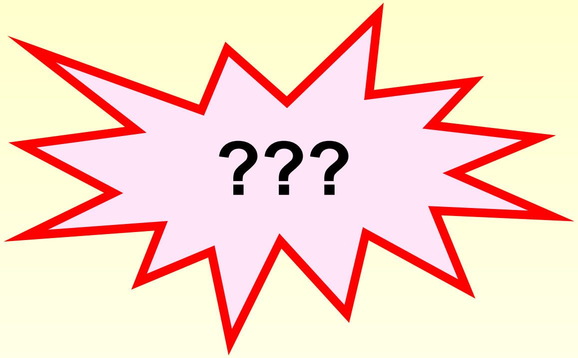
Ответ:12

Задача.

- Дан треугольник МКР. Плоскость, параллельная прямой МК, пересекает МР в точке $М_1$, РК – в точке $К_1$. Найдите $М_1К_1$, если МР : $М_1$Р = 12 : 5, МК = 18 см.

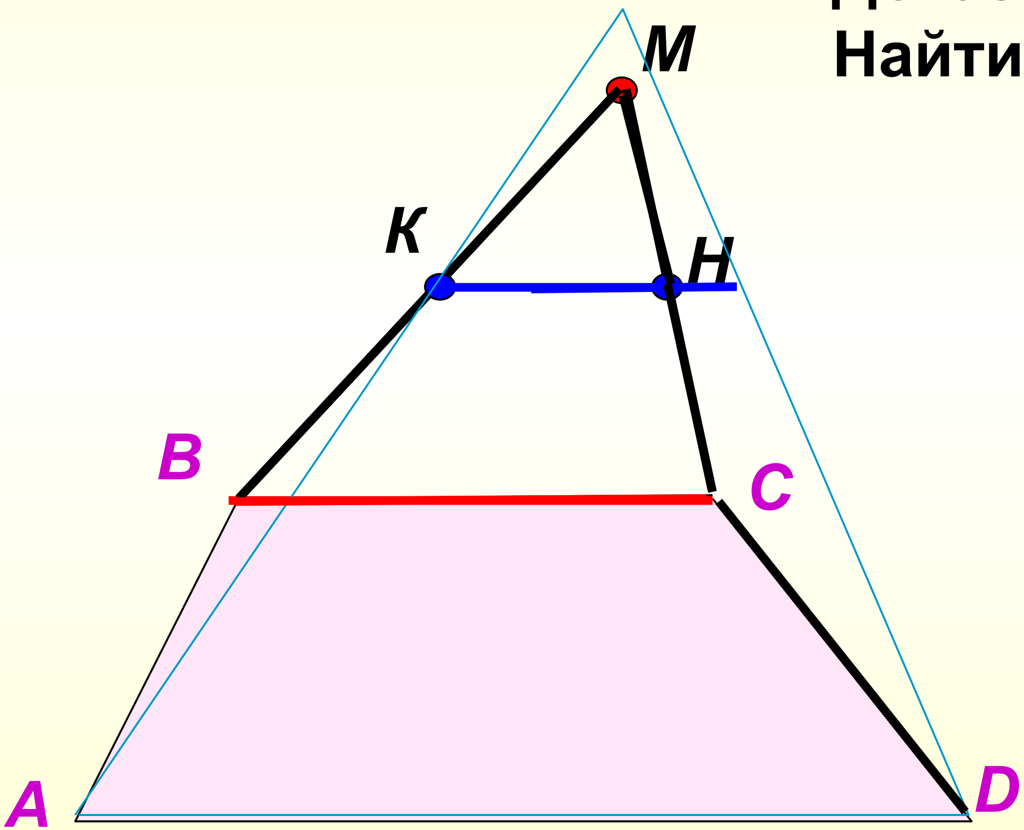


Ответ:7,5 см



Дано: ABCD – трапеция, BC = 12 см, M $\notin$ (ABC), BK = KM.

Доказать: (ADK) ∩ MC = H
Найти: KH.



Дано: а – прямая, с - прямая
а € *α*, а € *β*

25.

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой *a* (см. рис. 9). Пусть и $c \notin \alpha$, $c \notin \beta$.

Тогда так как $a \subset \alpha$, а $c \not\subset \alpha$ и $c \parallel a$, то по теореме п. 6 $a \parallel \alpha$. Аналогично, так как $a \subset \beta$, $c \not\subset \beta$ и $c \parallel a$, то по теореме п. 6 $a \parallel \beta$.

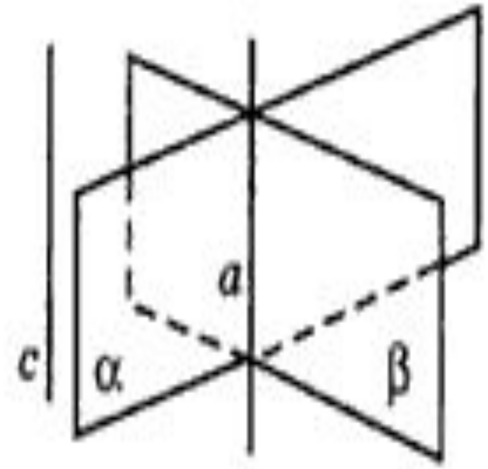


Рис. 9

27.

Д а н о: $C \in AB$, $AB : BC = 4 : 3$, $CD = 12$ см, $CD \parallel \alpha$, $B \in \alpha$.

Д о к а з а т ь: $AD \cap \alpha = E$.

Н а й т и: $BE = ?$

1. Докажем, что AD пересекает α (см. рис. 10, а).

Предположим что это не так. Тогда AD либо 1) лежит в α, либо 2) параллельна α.

1) Если $AD \subset \alpha \Rightarrow C \in \alpha$, но $C \in CD \parallel \alpha$, т. е. по определению CD не имеет общих точек с α, следовательно, 1) неверно.

2) Рассмотрим плоскость ABD, она пересекает α по некоторой прямой a, содержащей точку B (аксиома А3) и по следствию 1 теоремы п. 6 $CD \parallel a$ (так как $CD \subset ABD$ и $CD \parallel \alpha$).

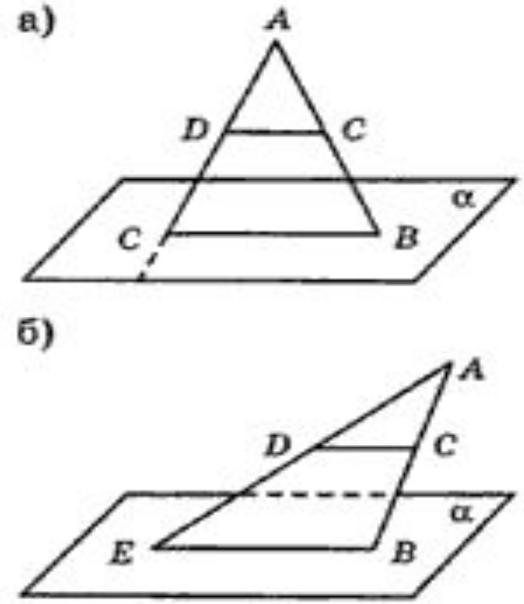


Рис. 10

Если $AD \parallel \alpha$, то $AD \parallel a$ по тому же следствию 1(так как $AD \subset ABD) \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \parallel a \parallel CD$, но AD и CD пересекаются в точке D, следовательно 2) тоже неверно.

Следовательно, AD пересекает α в какой-то точке E, причем $E \in a$ (так как $E \in \alpha$ и ABD, а значит, их общей прямой является a).

2. Найдем BE.

BE лежит на линии пересечения $a \Rightarrow BE \parallel CD \Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ACD \Rightarrow BE : CD = AB : AC$, так как $AB : BC = 4 : 3$, $AC = AB - BC = AB - \frac{3}{4}BC = \frac{1}{4}AB \Rightarrow BE = 4 \cdot CD = 4 \cdot 12 = 48$ (см).

О т в е т: 48 см.

29.

См. рис. 11.

Д а н о: $ACBD$ — трапеция, $BC = 12$ см — основание $M \notin ABC$, K — середина BM.

Д о к а з а т ь: $MC \cap ADK = H$.

Н а й т и: KH.

1. Рассмотрим плоскость MBC, она пересекает ABC по прямой BC, а $AD \parallel BC$ (как основания трапеции) и не лежит в $MBC \Rightarrow AD \parallel MBC$ по следствию 1.

2. Проведем плоскость ADK : $BC \parallel AD$, $AD \subset ADK$, $BC \notin ADK \Rightarrow$ по следствию 1 $BC \parallel ADK$.

3. ADK и MBC имеют общую точку $K \Rightarrow$ по аксиоме А3 пересекаются по прямой a, проходящей через точку K.

Так как $AD \subset ADK$ и по п. 1 $AD \parallel MBC \Rightarrow$ по следствию 1 $AD \parallel a$.

Пусть a пересекает MC в точке H. Тогда получим $HK \parallel AD \parallel BC \Rightarrow HK$ — средняя линия треугольника MBC (так как K — середина MB и $HK \parallel BC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow HK = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.

О т в е т: 6 см.

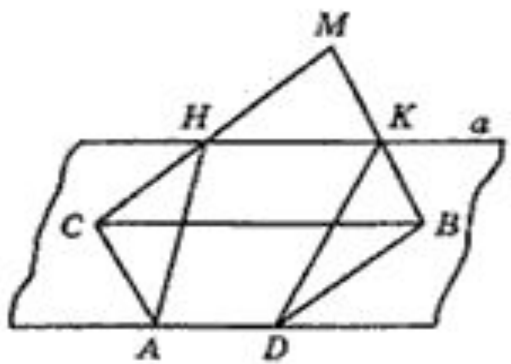


Рис. 11

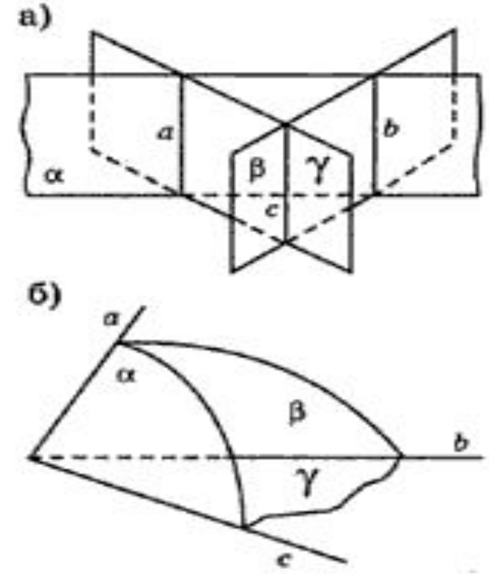


Рис. 12

33.

Пусть даны плоскости α, β и γ. И пусть $\alpha \cap \beta = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $\gamma \cap \alpha = c$.

Прямые a и $b \subset \alpha \Rightarrow$ либо $a \parallel b$, либо $a \cap b$.

Рассмотрим первый случай: $a \parallel b$ (см. рис. 12, а).

1. Так как $a \subset \alpha$, $a \subset \beta \Rightarrow a \not\subset \gamma$ (иначе все три плоскости проходят через a, что противоречит условию).

2. Таким образом, $a \not\subset \gamma$, $b \subset \gamma$ и $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \gamma$ по теореме п. 6.

3. $a \parallel \gamma$, $a \subset \beta$, $\beta\gamma = c \Rightarrow a \parallel c$ по следствию 1.

Отсюда следует, что $a \parallel b \parallel c$.

Рассмотрим второй случай $a \cap b$ (см. рис. 12, б):

1. Пусть $a \cap b = A$. $A \in a \subset \alpha$, $A \in b \subset \beta$ и $A \in b \subset \gamma \Rightarrow A \in \alpha, \beta, \gamma$

2. Пусть $c \cap b = B$. $B \in c \subset \gamma$, $B \in b \subset \beta$ и $B \in b \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha, \beta, \gamma$

если $A \neq B \Rightarrow$ прямая $AB \subset \in \alpha, \beta, \gamma$, т. е. всем трем плоскостям, что противоречит условию $\Rightarrow A = B$.

3. Пусть $c \cap a = C$. $C \in c \subset \gamma$, $C \in c \subset \beta$ и $C \in a \subset \alpha \Rightarrow C \in \alpha, \beta, \gamma \Rightarrow C = B$, иначе CB принадлежит всем трем плоскостям, что неверно по условию.

Отсюда следует, что $A = B = C$, т. е. прямые пересекаются в одной точке.

35.

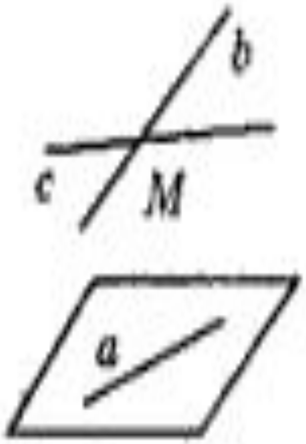


Рис. 14

Обозначим эти прямые b и c (см. рис. 14), следовательно, $c \cap b = M$.

Если $a \not\cap b$, то либо 1) $a \parallel b$, либо 2) $a \mathbin{\dot{-}} b$ и аналогично, если $a \not\cap c$, то либо 1) $a \parallel c$, либо 2) $a \mathbin{\dot{-}} c$.

Если в обоих случаях выполняется первый вариант, т. е. $a \parallel b$ и $a \parallel c \Rightarrow b \parallel c$, но по условию $b \cap c = M$.

Значит выполняется хотя бы один из случаев 2) т. е. либо $a \mathbin{\dot{-}} b$, либо $a \mathbin{\dot{-}} c$.

Начало и продолжение теории: часть1, 2_2, 3

»