Прямые и плоскости в пространстве

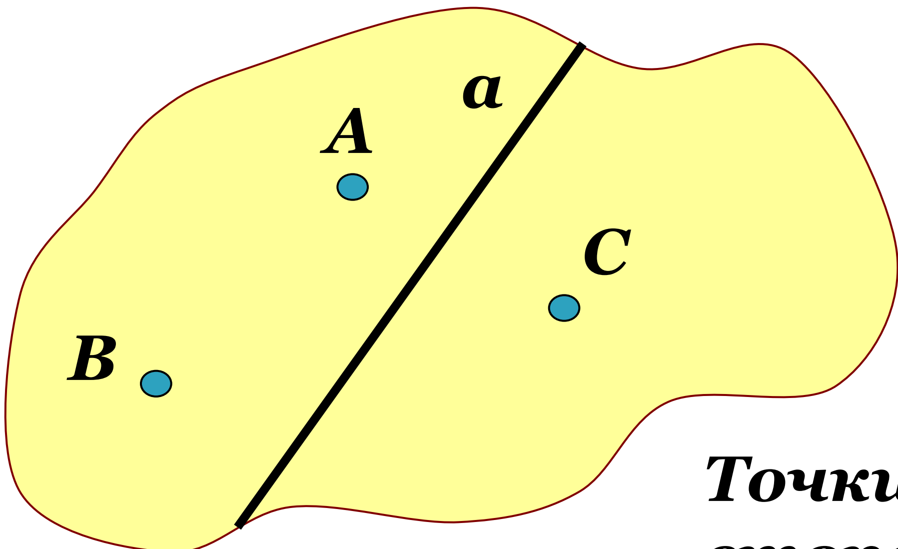
Часть 2_2

Презентацию подготовила учитель математики
МБОУ СОШ №4 г.Покачи ХМАО-Югра
Литвинченко Л.В.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

<u>Угол между прямыми.</u>

Любая прямая а, лежащая в плоскости, разделяет плоскость на две части, называемые полуплоскостями.



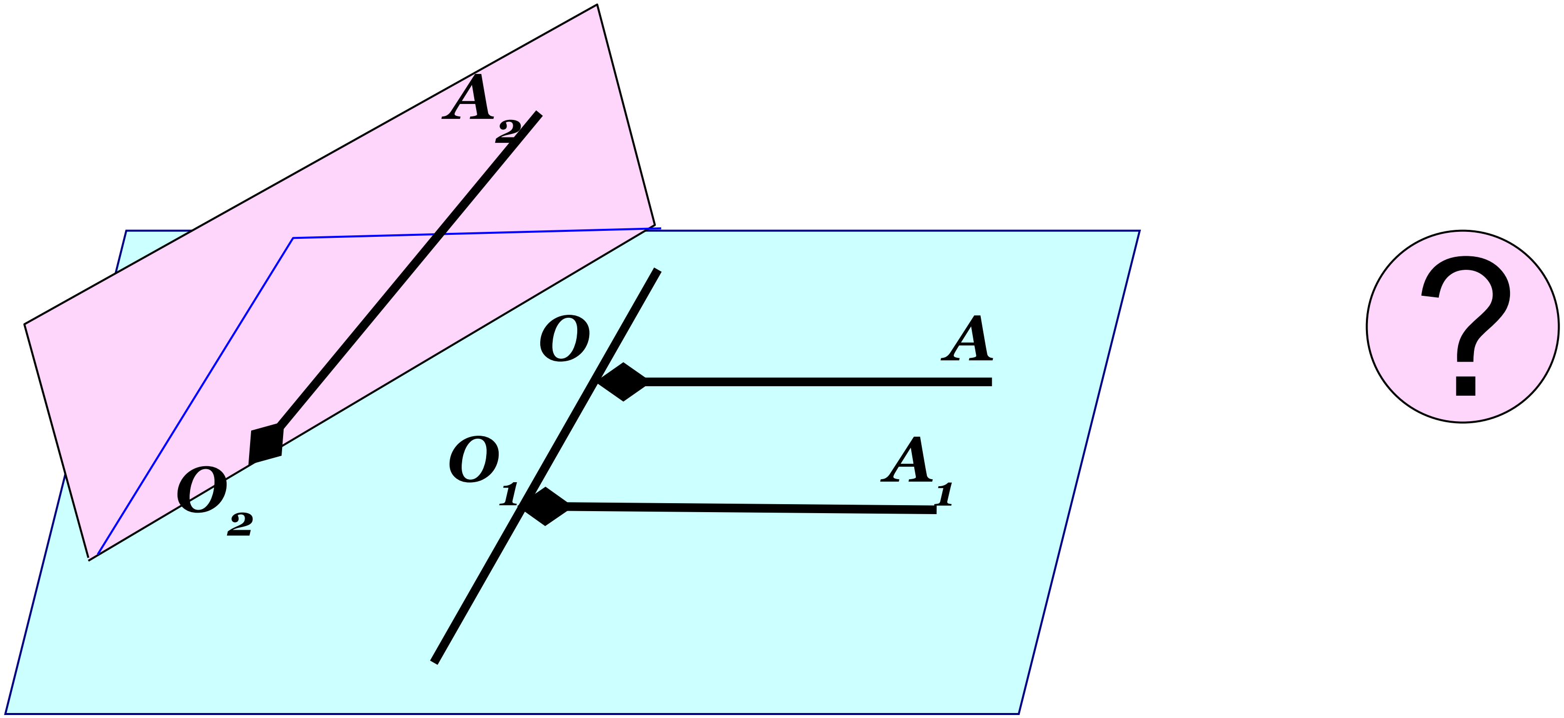
а – граница полуплоскостей.

Точки А и В лежат по одну сторону от прямой а.

Точки А и С лежат по разные стороны от прямой а.

?

Углы с сонаправленными сторонами.



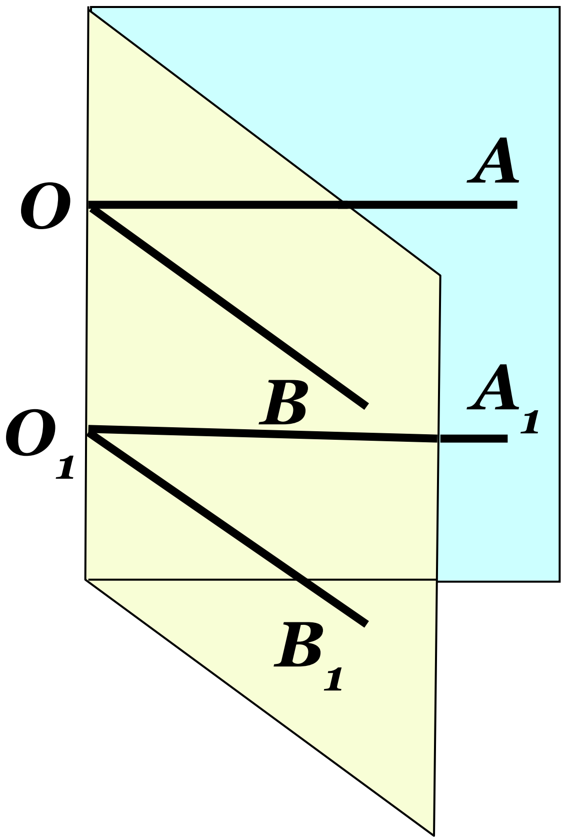
Лучи OA и O_1A_1 не лежат на одной прямой, параллельны, лежат в одной полуплоскости с границей OO_1 → сонаправленные

Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

Дано: угол O и угол O_1 с сонаправленными сторонами.

Доказать: $\angle O = \angle O_1$



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Доказательство:

Отметим точки A, B, A_1 и B_1, такие что $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$.

1. Рассмотрим OAA_1O_1:

$$\left.\begin{array}{l} OA \parallel O_1A_1 \\ OA = O_1A_1 \end{array}\right| \Longrightarrow OAA_1O_1 \text{ – параллелограмм}$$

(по признаку).

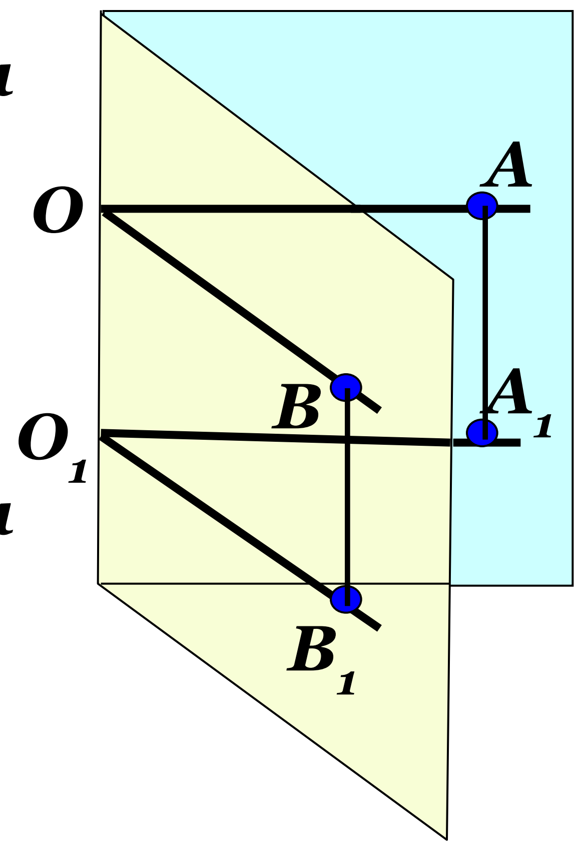
Значит, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.

2. Рассмотрим OBB_1O_1:

$$\left.\begin{array}{l} OB \parallel O_1B_1 \\ OB = O_1B_1 \end{array}\right| \Longrightarrow OBB_1O_1 \text{ – параллелограмм}$$

(по признаку).

Значит, $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$.



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Вывод:

$AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$, $\Longrightarrow AA_1 \parallel BB_1$

$AA_1 = OO_1$ и $BB_1 = OO_1$, $\Longrightarrow AA_1 = BB_1$

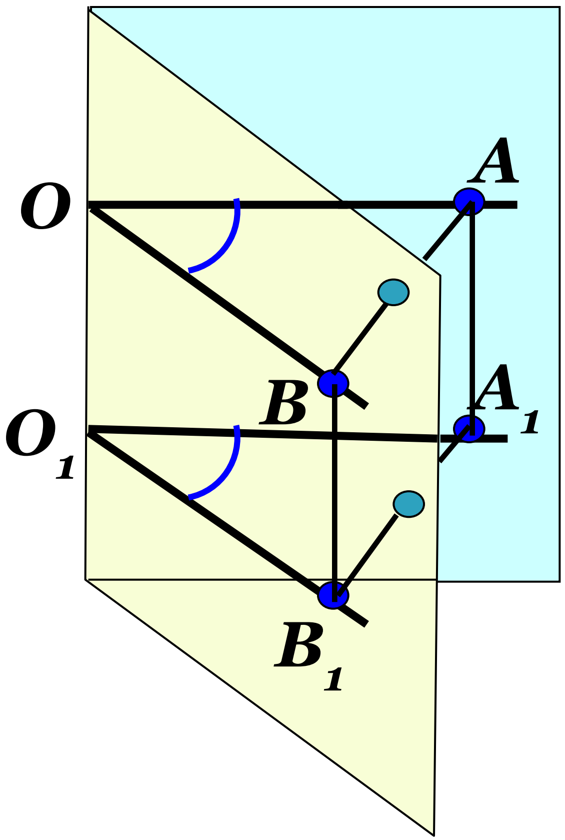
Следовательно, четырехугольник AA_1B_1B – параллелограмм (по признаку).

$$\boxed{AB = A_1B_1}$$

3. Рассмотрим ΔABO и $\Delta A_1B_1O_1$.

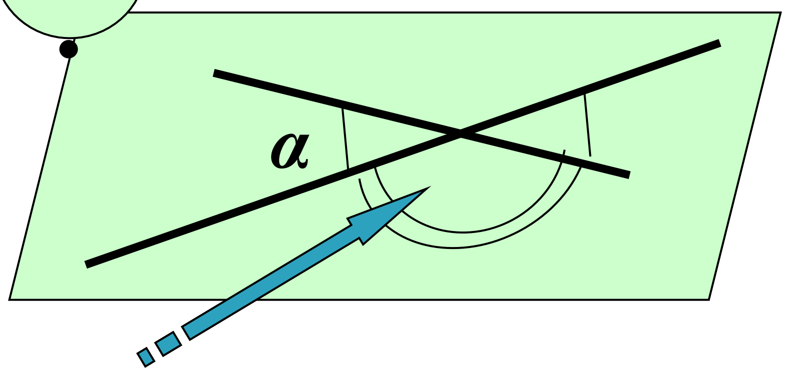
$\Delta ABO = \Delta A_1B_1O_1$ (по трем сторонам)

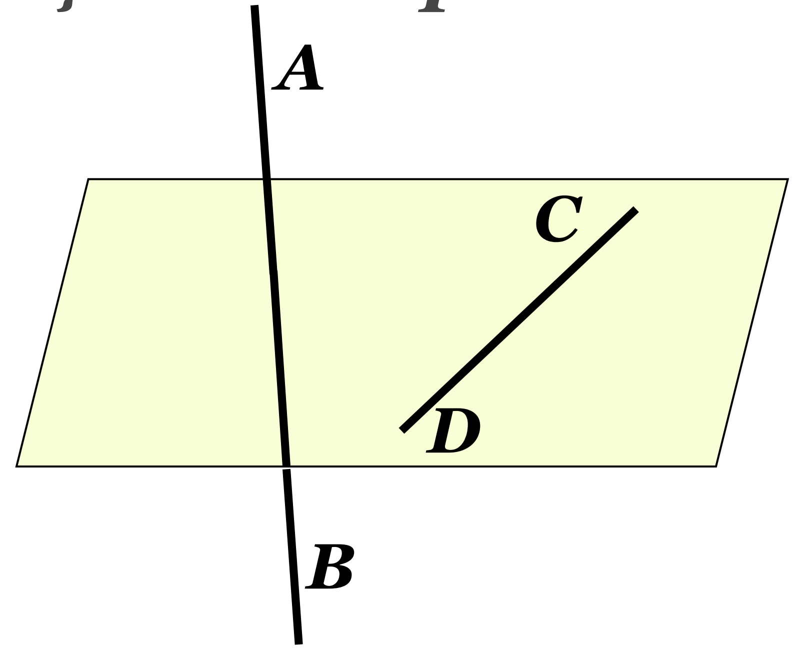
Вывод: $\angle O = \angle O_1$



Угол между скрещивающимися прямыми.

1

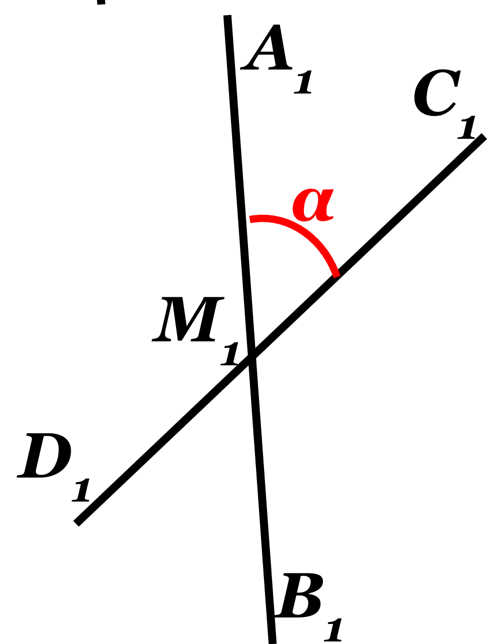




$180^o - \alpha$ $\quad 0^o < \alpha \le 90^o$

2

Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1, при этом $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$.



3.

Практическое задание.

- Выбрать любую точку M_2.
- Построить $A_2B_2 \| AB$ и $C_2D_2 \| CD$.
- Ответить на вопросы:

1. Почему $A_2B_2 \| A_1B_1$ и $C_2D_2 \| C_1D_1$?

2. Являются ли углы $A_1M_1D_1$ и $A_2M_2D_2$ углами с соответственно параллельными сторонами?

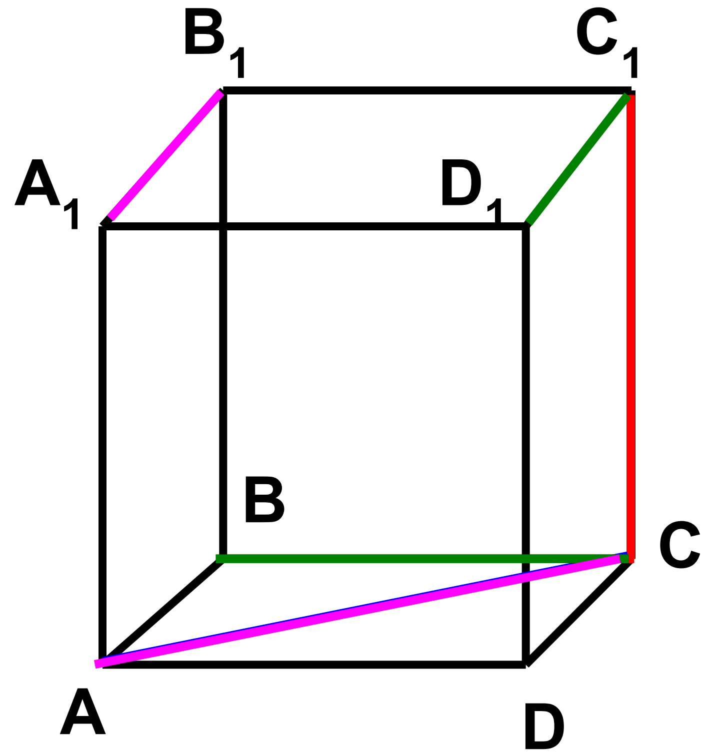
?

Вывод: 1. $\angle A_1M_1D_1 = \angle A_2M_2D_2$

2. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Найдите угол между прямыми:

1. ***BC и CC1*** — ***90^o***
2. ***AC и BC*** — ***45^o***
3. ***D_1C_1 и BC*** — ***90^o***
4. ***A_1B_1 и AC*** — ***45^o***



Задача

Дано: OB || CD,

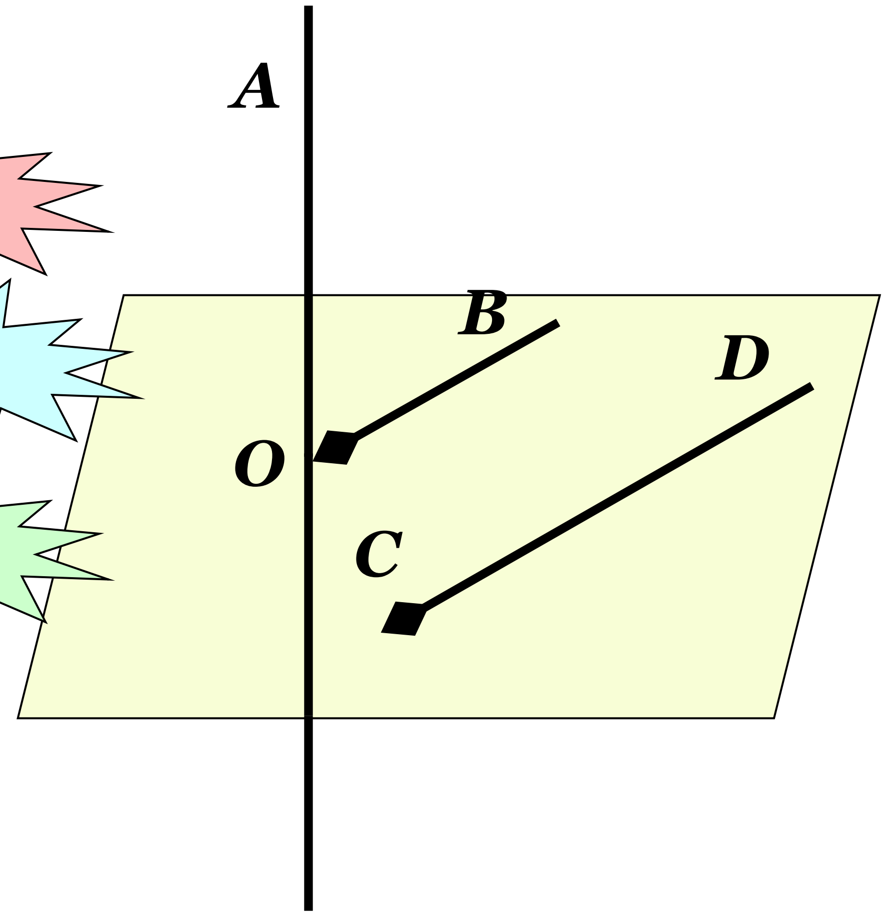
OA и CD – скрещивающиеся.

Найти угол между OA и CD, если:

а) $\angle AOB = 40^0$ **40°**

б) $\angle AOB = 135^0$ **45°**

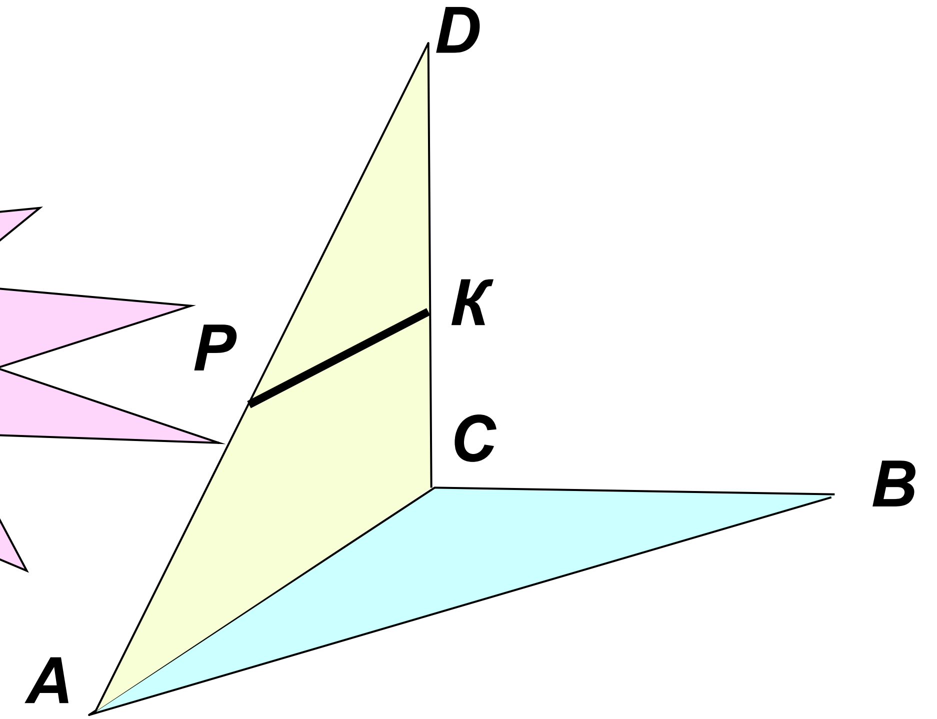
в) $\angle AOB = 90^0$ **90°**



Дополнительная задача.

Треугольники ABC и ACD лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия ΔADC с основанием AC. Определить взаимное расположение прямых PK и AB, найти угол между ними, если $\angle C = 80^0,\ \angle B = 40^0$

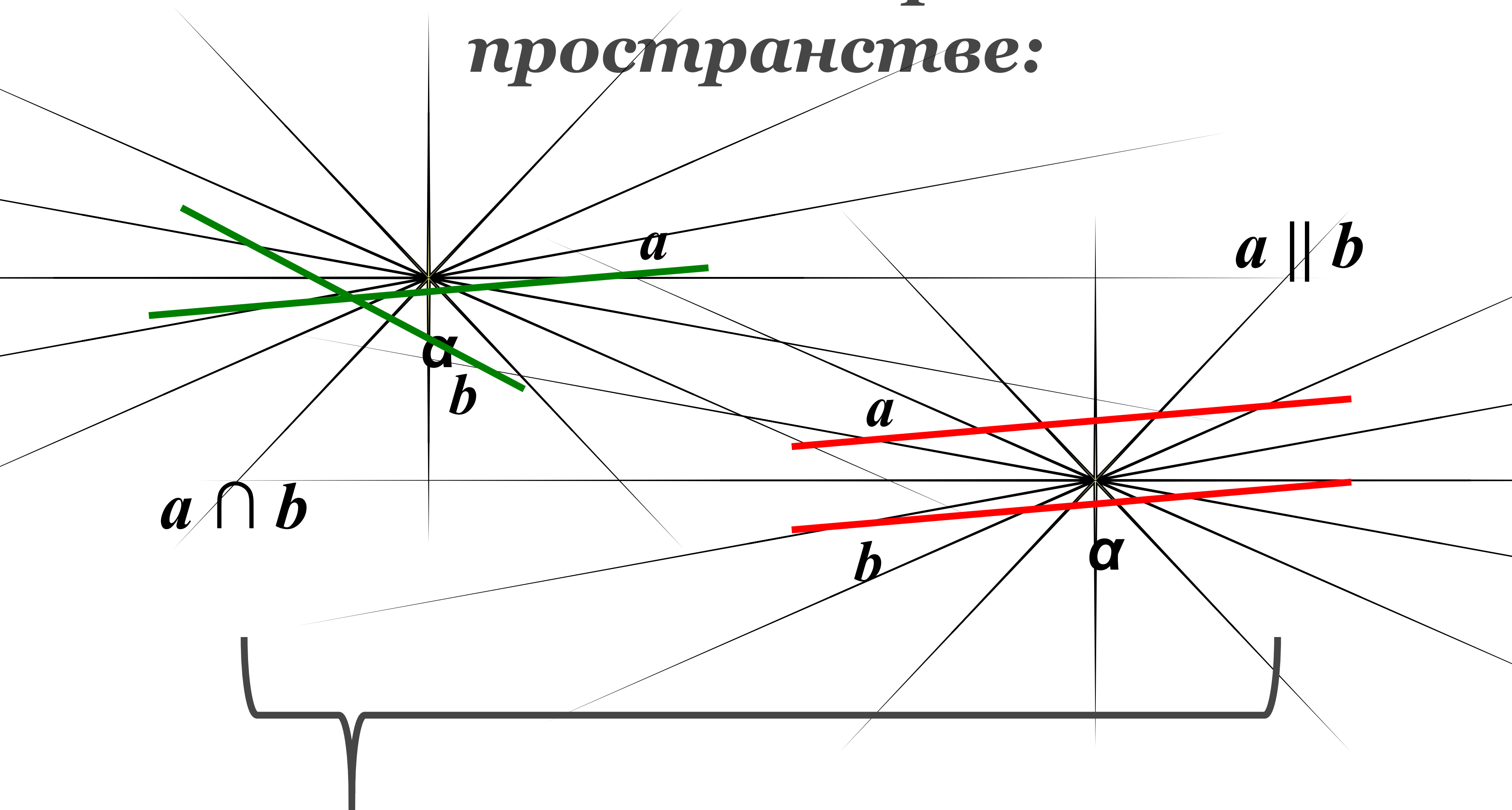
<u>Ответ:</u>
1) AB и PK скрещивающиеся
,
2) 60^o



Взаимное расположение прямых в пространстве.

Скрещивающиеся прямые.

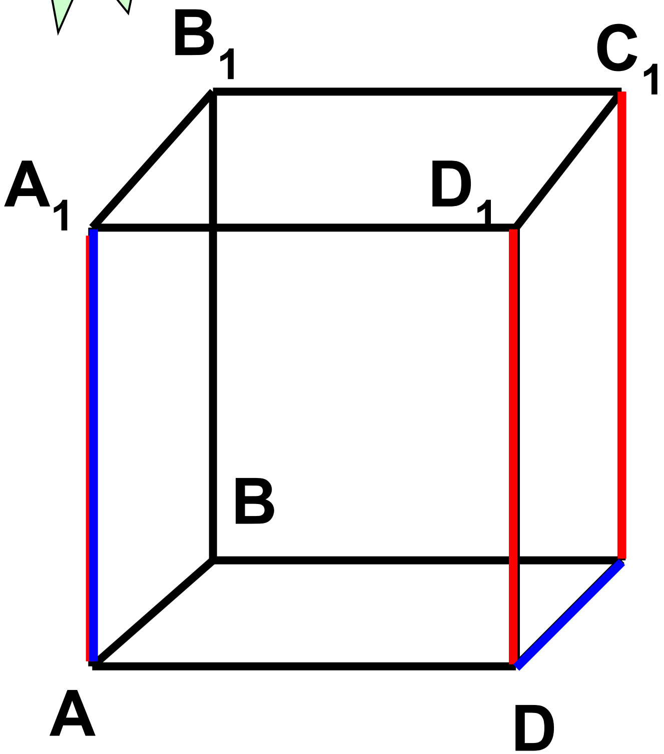
Расположение прямых в пространстве:



Лежат в одной плоскости!

???

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$



$AA_1 \parallel DD_1$, как противоположные стороны квадрата, лежат в одной плоскости и не

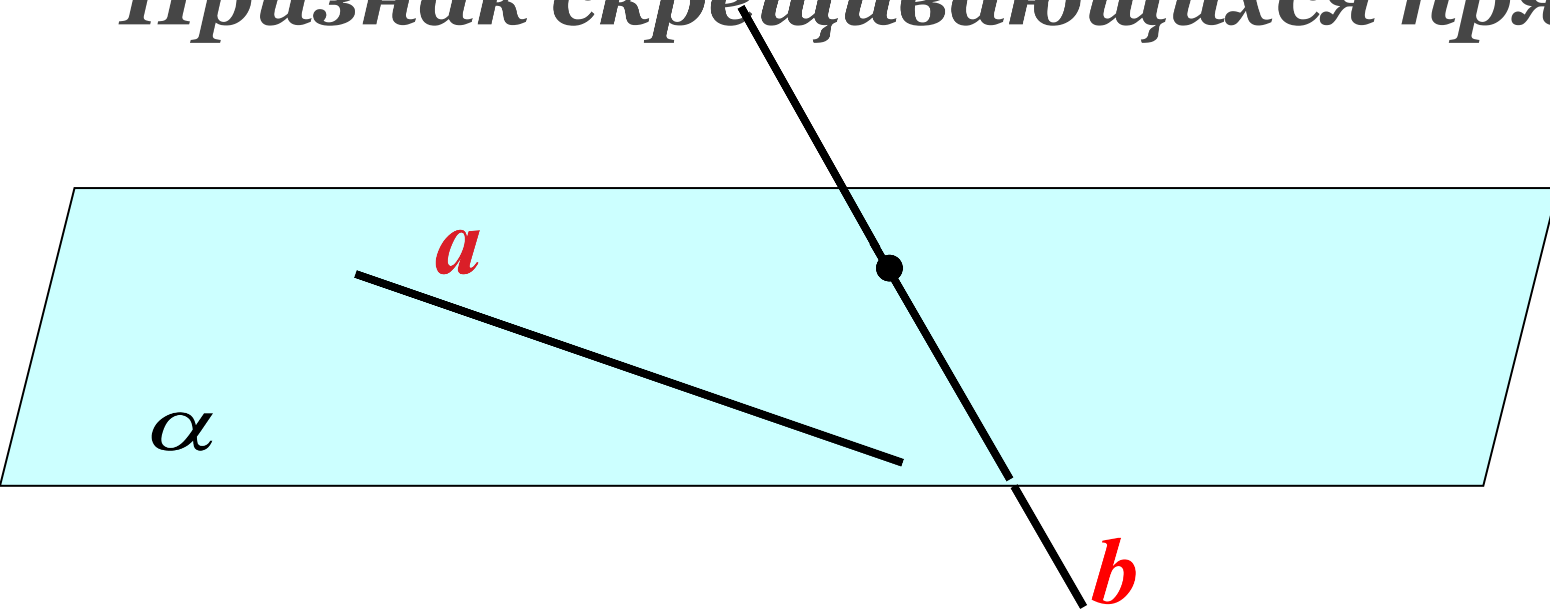
$AA_1 \parallel DD_1$; $DD_1 \parallel CC_1 \to AA_1 \parallel CC_1$

по теореме о трех параллельных прямых.

2. Являются ли AA_1 и DC параллельными? Они пересекаются?

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

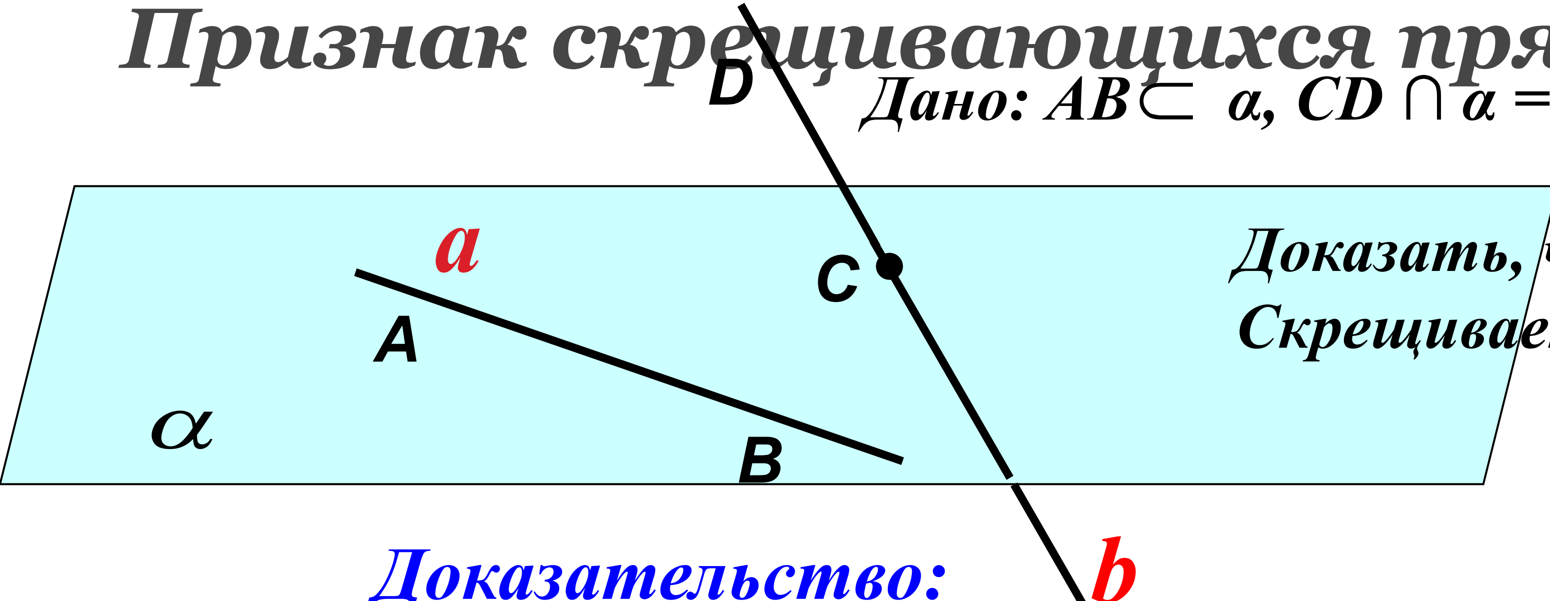
Признак скрещивающихся прямых.



- Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые **скрещивающиеся**.

Признак скрещивающихся прямых.

Дано: $AB \subset \alpha$, $CD \cap \alpha = C$, $C \notin AB$.



Доказать, что AB Скрещивается с CD

Доказательство:

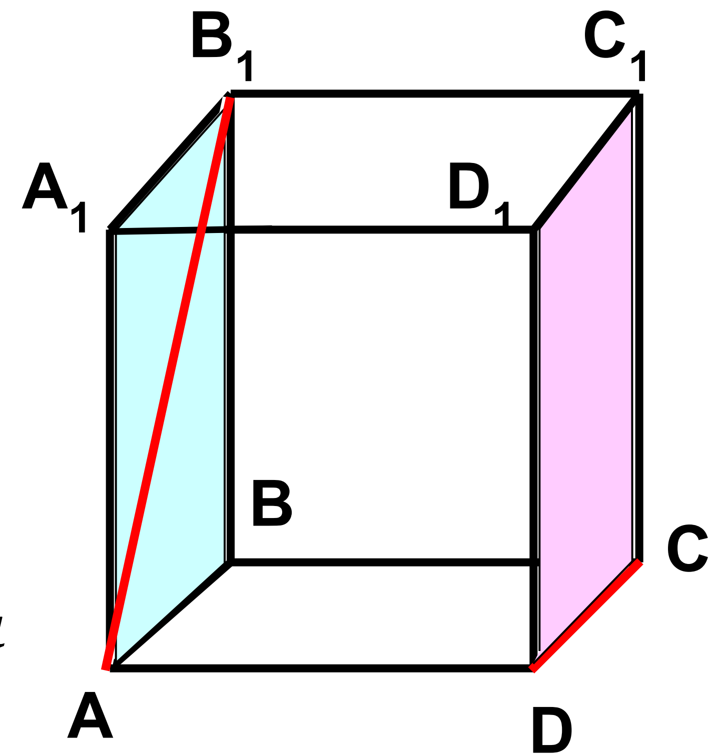
Допустим, что CD и AB лежат в одной плоскости. Пусть это будет плоскость β.

$$\left.\begin{array}{l} C \in \alpha \;\; и \;\; C \in \beta \\ AB \subset \alpha \;\; и \;\; AB \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \text{ совпадает с } \beta$$

Плоскости совпадают, чего быть не может, т.к. прямая CD пересекает α. Плоскости, которой принадлежат AB и CD не существует и следовательно по определению скрещивающихся прямых AB скрещивается с CD. **Ч.т.д.**

Закрепление изученной теоремы:

1. Определить взаимное расположение прямых AB_1 и DC.
2. Указать взаимное расположение прямой DC и плоскости AA_1B_1B
3. Является ли прямая AB_1 параллельной плоскости DD_1C_1C?



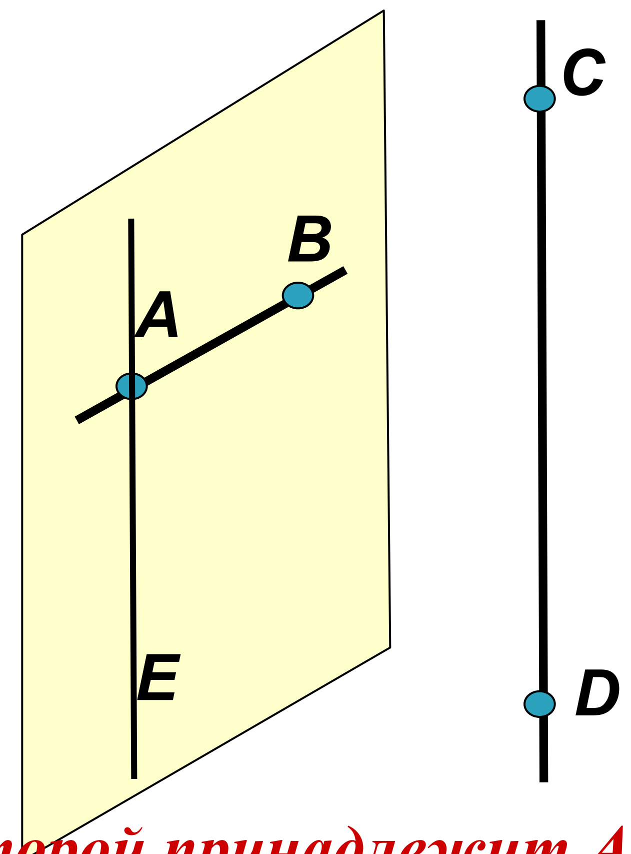
Теорема:

- **Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой плоскости, и притом только одна.**

Дано: AB скрещивается с CD.

Построить α: $AB \subset \alpha$, $CD \parallel \alpha$.

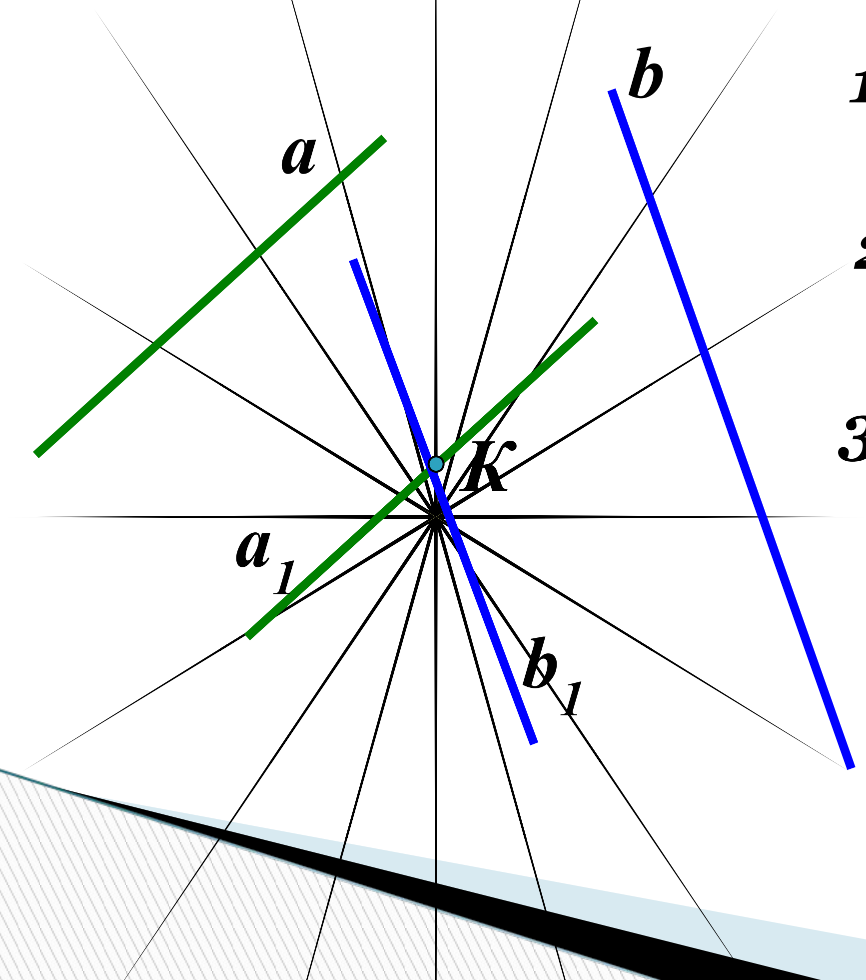
Доказать, что α – единственная.



1. **Через точку A проведем прямую AE, $AE \parallel CD$.**
2. **Прямые AB и AE пересекаются и образуют плоскость α. $AB \subset \alpha$, $CD \parallel \alpha$. α – единственная плоскость.**
3. **Доказательство:**
   α – единственная по следствию из аксиом. Любая другая плоскость, которой принадлежит AB, пересекает AE и, следовательно, прямую CD.

Задача.

- Построить плоскость α, проходящую через точку К и параллельную скрещивающимся прямым *a* и *b*.



Построение:

1. Через точку К провести прямую $a_1 \parallel a$.
2. Через точку К провести прямую $b_1 \parallel b$.
3. Через пересекающиеся прямые проведем плоскость α. α – искомая плоскость.

Задача

Дано: $D \notin (ABC)$,

$AM = MD;\ BN = ND;\ CP = PD$

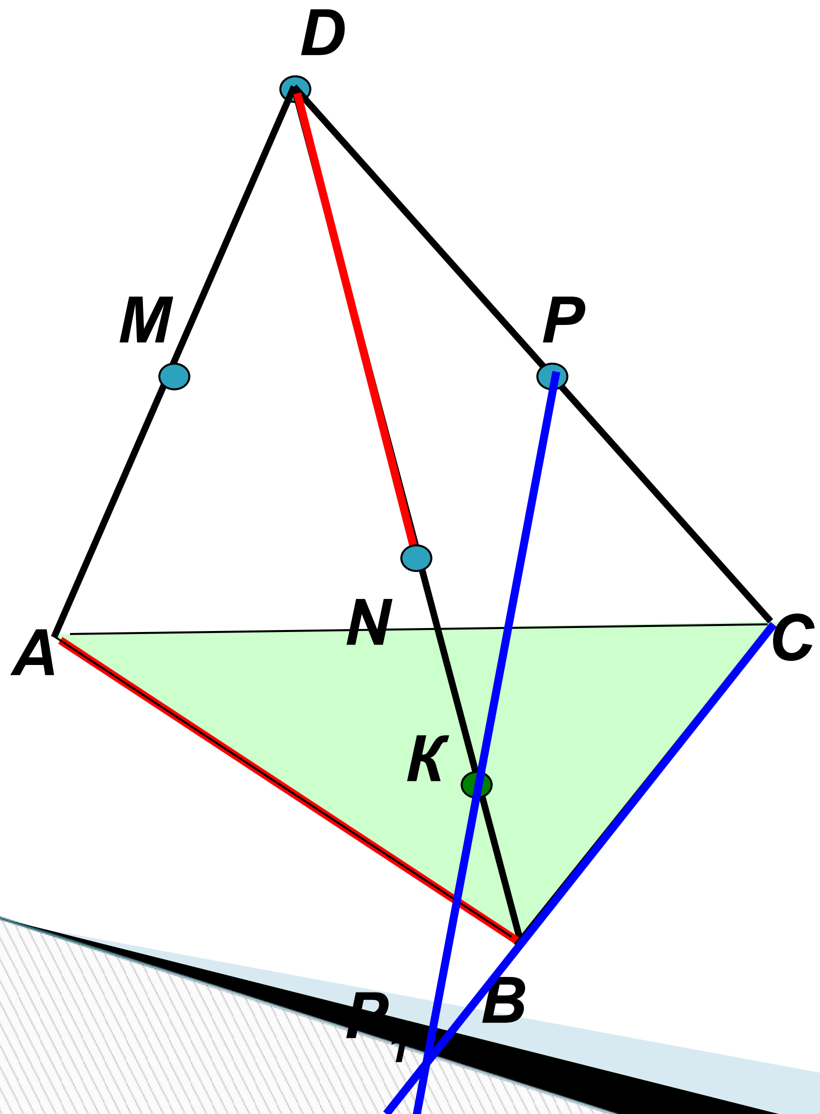
$K \in BN$.

Определить взаимное расположение прямых:

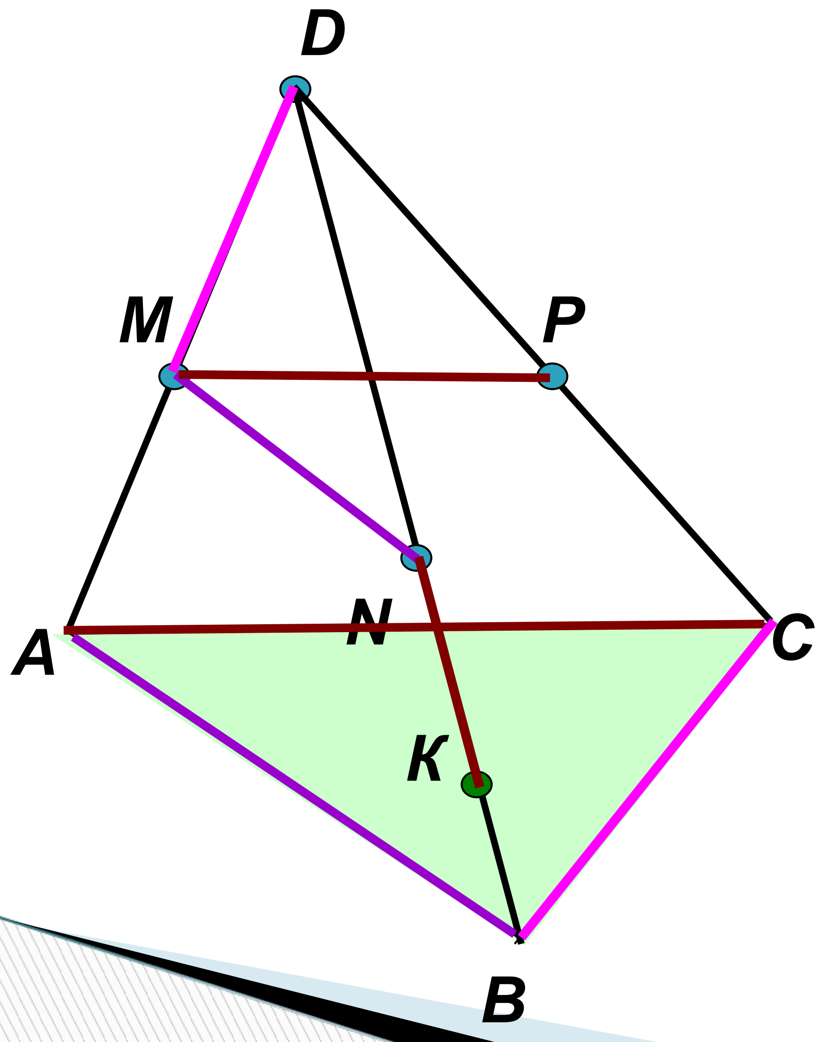
а) ND и AB

б) PK и BC

в) MN и AB



Задача



Дано: $D \notin (ABC)$,

$AM = MD$; $BN = ND$; $CP = PD$

$K \in BN$.

Определить взаимное расположение прямых:

а) ND и AB

б) PK и BC

в) MN и AB

г) MP и AC

д) KN и AC

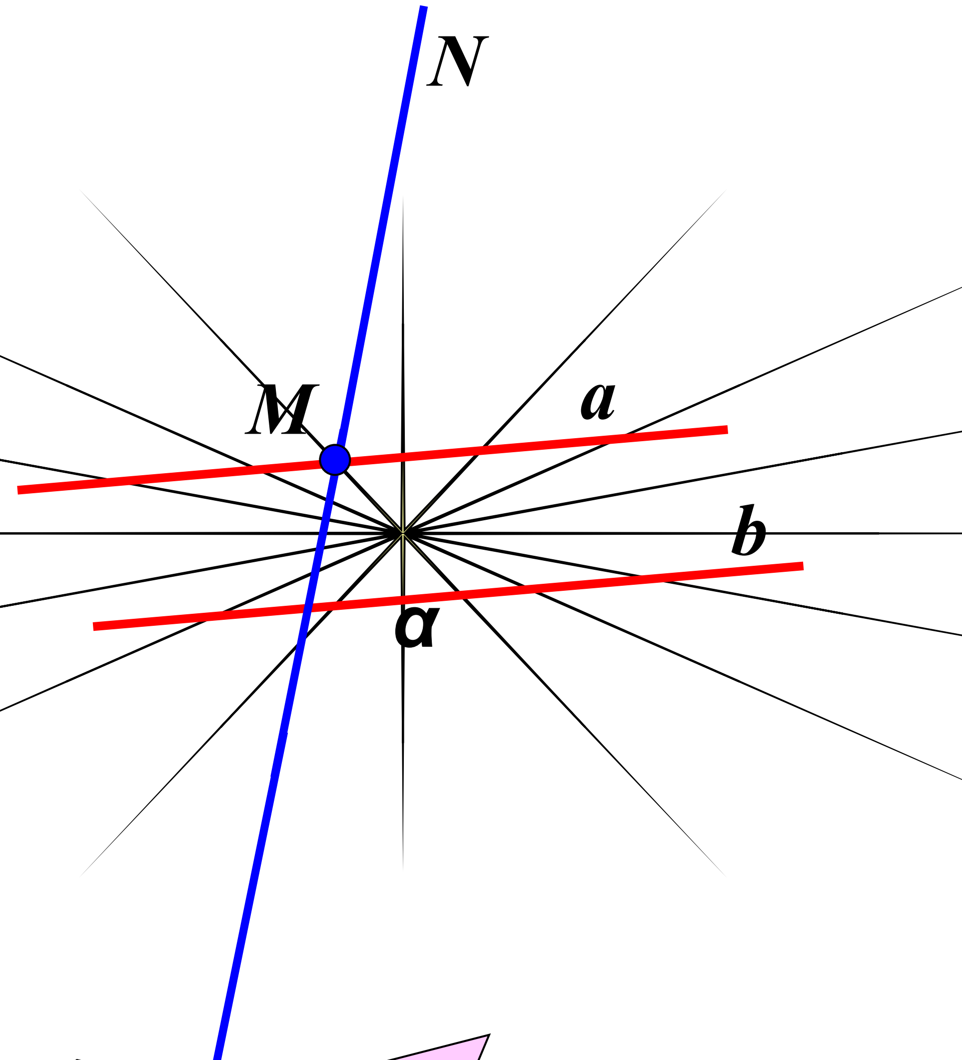
е) MD и BC

Задача

Дано: $a \parallel b$

$MN \cap a = M$

Определить взаимное расположение прямых MN и b.



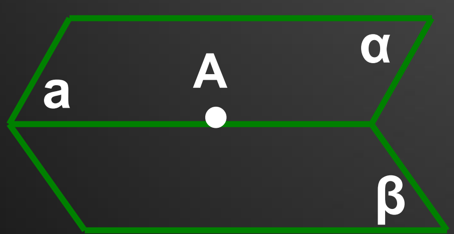
Скрещивающиеся.

Взаимное расположение плоскостей

Плоскости имеют одну общую точку

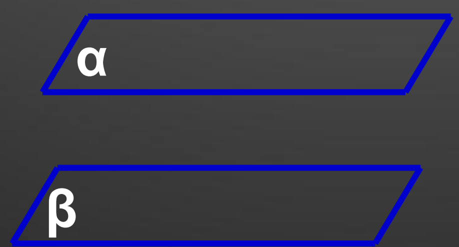
Плоскости не имеют общих точек

Плоскости пересекаются по прямой



$A \in \alpha,\ A \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = a,\ A \in a$

Плоскости параллельны



$\alpha \parallel \beta$

Плоскости совпадают

$\alpha = \beta$

Начало и продолжение теории: часть1, 2_1,3