Основоположник теории потока однородных событий

Александр Яковлевич Хи́нчин (1894—1959)
профессор МГУ с 1927 года.
Создатель теории потока однородных событий,
Совместно с А.Н. Колмогоровым – создатель теории случайных процессов и теории массового обслуживания.

Свойство марковости

В марковской сети вероятность события зависит только от текущего состояния сети, т.е.

$P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \ldots, X_0=i_0)=P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n)$

где

$\{X_n\}$ – пространство состояний цепи

i – номер шага

Тогда вероятность попасть из состояние *i* в состояние *j* за *m* шагов равно:

$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n-1} = j \mid X_n = i]$ (1)

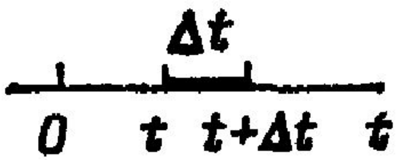
Выражение (1) можно переписать в виде рекуррентной формулы:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{ki}$$

т.е. для того, чтобы попасть в состояние E_j, необходимо сначала за *m*-1 шагов попасть в множество состояние E_k, а затем уже из них перейти в состояние E_j.

процесс

Рассмотрим два состояния Марковской цепи s_i и s_i. Переход из состояния в состояние происходит под воздействием пуассоновского потока с интенсивностью λ_{ij}. Пуассоновский поток обладает свойством отсутствием последействия, поэтому нам не надо будет заботиться о том, как система попала в состояние



Рассмотрим элементарный участок на оси времени Δt, примыкающий в точке времени t. Вероятность того, что система, находящаяся в состоянии s_i, перейдет в состояние s_i будет равна $\boldsymbol{\lambda_{ij} P_i}$.

процесс

Рассмотрим систему из n состояний $s_1 \ldots s_n$. Пусть имеется имеются интенсивности переходов между каждыми двумя состояниями λ_{ij} ($i \neq j$), если две вершина не связаны, то интенсивность переходов между ними равна нулю. Обозначим $p_i(t)$ вероятность того, система в момент t находится в состоянии s_i ($i=1 \ldots n$). Пусть $p_i(t+\Delta t)$ вероятность того, что система будет в состоянии s_i в момент $t+\Delta t$. Обозначим эту вероятность A:$A=\{S(t+\Delta t)=s_i\}$.

Событие A состоит из суммы двух возможных событий ($A=B+C$):

B – система уже была в состоянии s_i и за время Δt не вышла из него.

C – система была в одном из состоянии, из которых возможен переход в состояние s_i и за время Δt она перешла в состояние s_i.

Выясним вероятность события B

процесс

Выясним вероятность события *B*

Вероятность того, что за время Δt в системе не произойдет ни одного события $1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t$ ($i\neq j$), тогда

$$P(B) = pi(t)\left[1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t\right]$$

Выясним вероятность события *C*:

$P(C) = \sum_{j=1}^{n} p_i(t)\lambda_{ij}(t)\Delta t$ ($i\neq j$).

Выясним вероятность события *A* (*A=B+C*)

$P(A)=P(B)+P(C)=pi(t+\Delta t)=p_i(t)\left[1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t\right]+\sum_{j=1}^{n} p_i(t)\lambda_{ij}(t)\Delta t$

$p_i(t+\Delta t)-p_i(t) =\sum_{j=1}^{n} p_i(t)\lambda_{ij}(t)\Delta t-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t$

$\frac{d\,p_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n} p_i(t)\lambda_{ij}(t)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)$ - уравнения Колмогорова

процесс

Уравнения Колмогорова

$\frac{d\,p_i(t)}{dt}$=$\sum_{j=1}^{n} p_i(t)\lambda_{ij}(t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t)$ - уравнения Колмогорова

Одно из уравнения данной система дифуров дополняется условием нормировки, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$$

Данное условие должно соблюдаться в каждый момент времени.

Для решения задачи Коши (нахождение частных решений дифуры) необходимы начальные условия, т.е. начальное распределение вероятностей в мент времени t=0 $p_i(0)$. Решение системы дифуров дает функции от времени для каждой вероятности $p_i(t)$.

процесс в сбалансированном режиме

При t→∞, если Марковская система эргономична, все вероятности $p_i(t)$ на зависят от времени и стремятся к стационарной вероятности p_i. Тогда в уравнениях Колмогорова $\frac{p_i(t)}{dt}$=0, и система уравнений принимает вид:

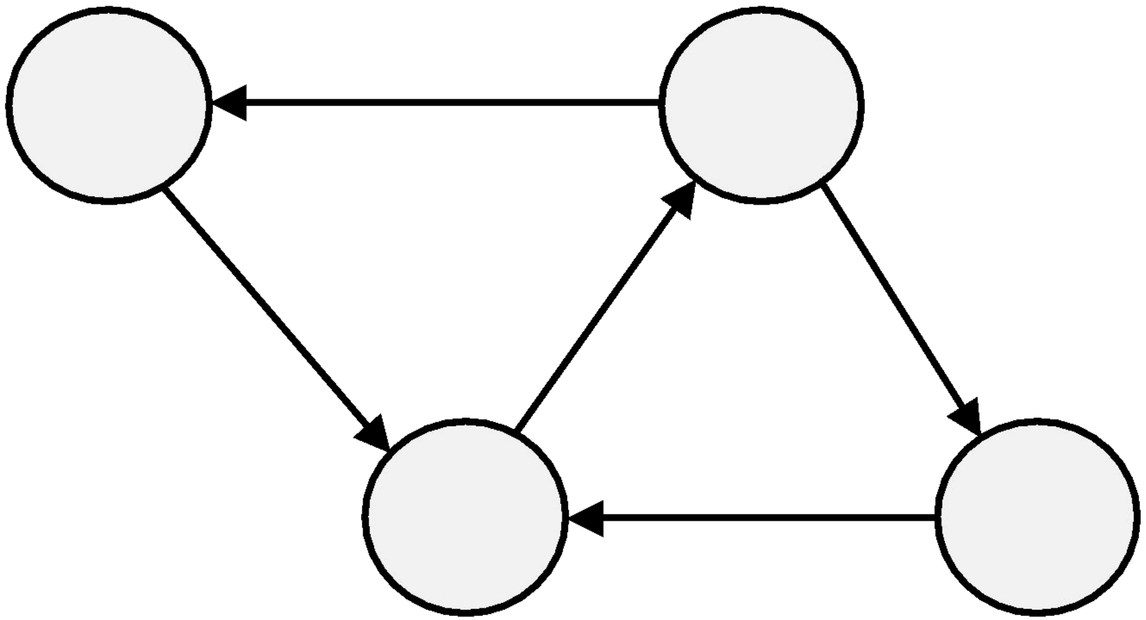
Уравнения Колмогорова

$$\sum_{j=1}^{n} p_i(t)\lambda_{ij}(t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$$

Решив данную систему линейных алгебраических уравнений, мы находим стационарные вероятности.

Пример расчета стационарных вероятностей для непрерывного Марковского процесса



Уравнения Колмогорова:

$P_1' = P_3 \lambda_{31} - P_1 \lambda_{12}$

$P_2' = P_1 \lambda_{12} + P_4 \lambda_{42} - P_2 \lambda_{23}$

$P_3' = P_2 \lambda_{23} - P_3 (\lambda_{31} + \lambda_{34})$

$P_4' = P_3 \lambda_{34} - P_4 \lambda_{42}$

$P_1' = 2P_3 - P_1$

$P_2' = P_1 + 2P_4 - 0{,}5P_2$

$P_3' = 0{,}5P_2 - 6P_3$

$P_4' = 4P_3 - 2P_4$

вероятностей для непрерывноного Марковского процесса

Уравнения Колмогорова для стационарного режима:

$P_1' = 2P_3 - P_1 = 0$

$P_2' = P_1 + 2P_4 - 0{,}5P_2 = 0$

$P_3' = 0{,}5P_2 - 6P_3 = 0$

$P_4' = 4P_3 - 2P_4 = 0$

Уравнения Колмогорова

	P_1	P_2	P_3	P_4
1	-1	0	2	0
2	1	-0,5	0	2
3	0	0,5	-6	0
4	0	0	4	-2

Пример расчета стационарных вероятностей для непрерывного Марковского процесса

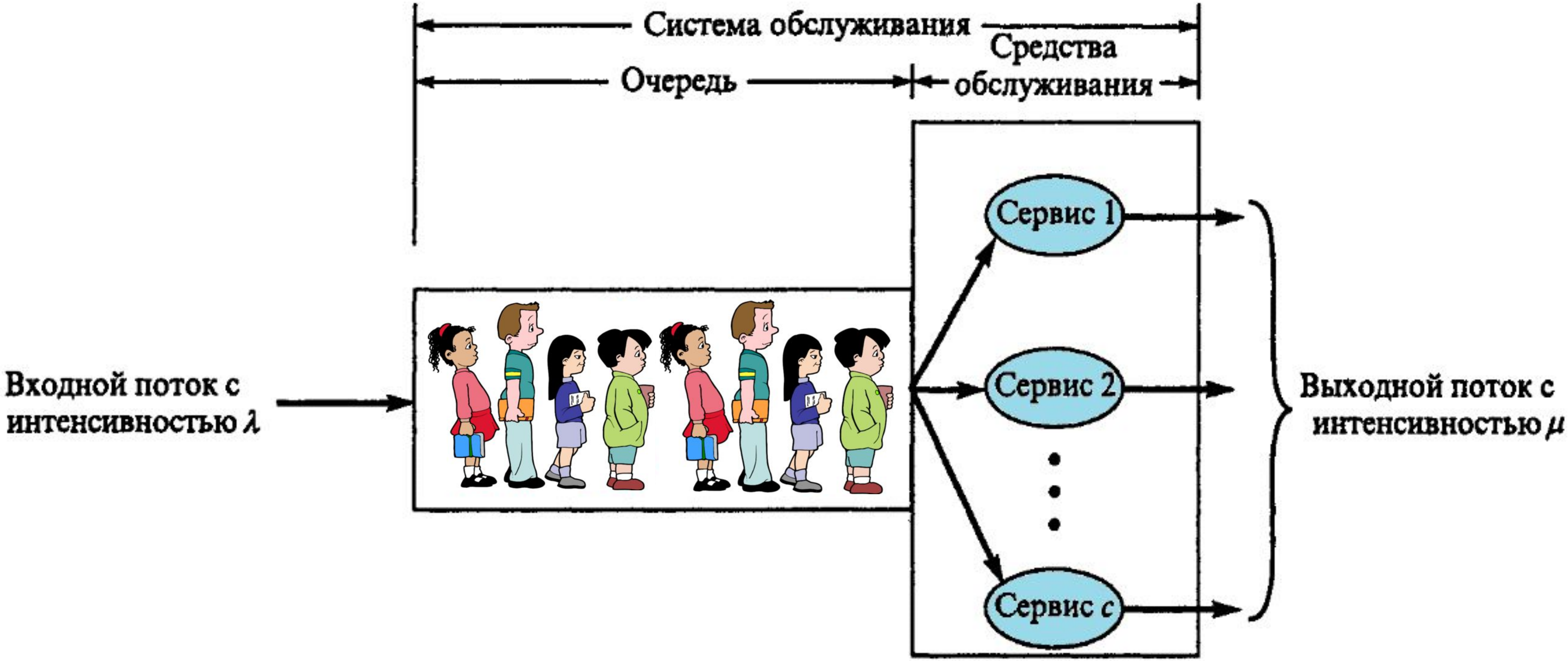
Заменим одну строку матрицы на условие нормировки, добавим столбец свободных членов, все элементы которого равны 0 кроме ячейки напротив строки с условием нормировки. Решим систему уравнений и получаем стационарные вероятности.

	P_1	P_2	P_3	P_4
1	-1	0	2	0
2	1	-0,5	0	2
3	0	0,5	-6	0
4	1	1	1	1

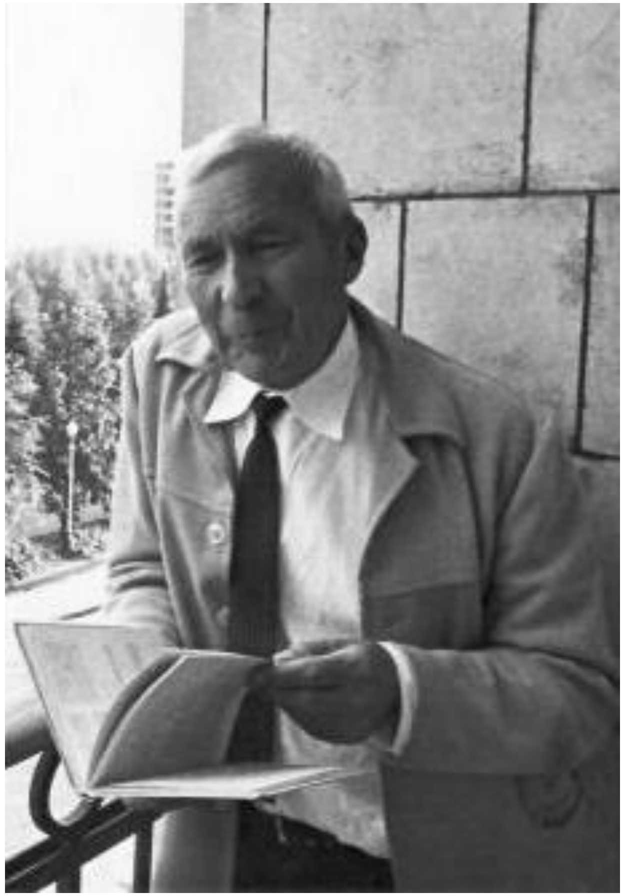
0
0
0
1

Ответ
P_1=0,118
P_2=0,706
P_3=0,059
P_4=0,118

Системы массового обслуживания (СМО)



обслуживания



Андре́й Никола́евич Колмого́ров (1903—1987)
Профессор МГУ с 1931 года.
Один из крупнейших математиков XX века.
Один из основоположников современной теории вероятностей.
Создатель теории случайных процессов и теории массового обслуживания.

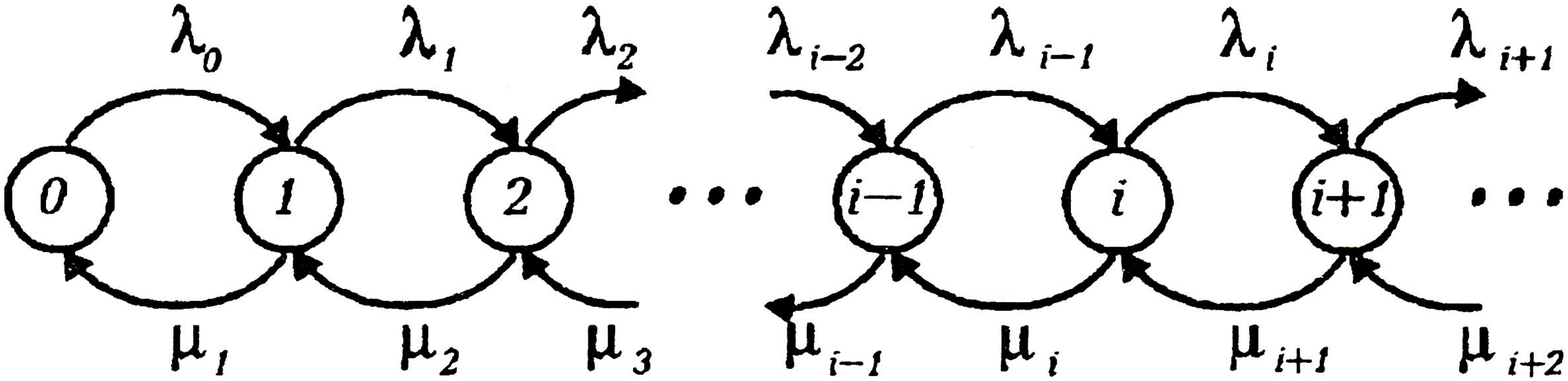
обслиживания

Ангер Краруп Эрланг (1878—1929)
Датский математик и инженер, один из основателей ТМО.
1909 год – опубликована работа «Теория вероятностей и телефонные разговоры» (The Theory of Probabilities and Telephone Conversations.) , получившая признание во всем мире.

В его честь названа единица измерения трафика в телекоммуникационных системах – эрланг. 1 эрланг (1 Эрл) эквивалентен разговору двух абонентов в течение 1 часа.

Формулой Эрланга пользуются до сих пор.

снова СМО



Процесс гибели и размножения представляет собой процесс порождения заявок и их обработку (гибель) в моделируемой системе.
Этот процесс может быть описан Марковской системой, где каждое состояние связано с только с двумя соседними состояниями (за исключением нулевого и *n*-го состояний, где *n* – число состояний в Марковской системе; *n* может быть равным ∞).

λ_i - интенсивность рождения заявок;
μ_i - интенсивность гибели (обслуживания) заявок.

основа СМО

Система уравнений Колмогорова для стационарного состояния системы рождения и гибели

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0 \\ \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 - (\lambda_1 + \mu_1) P_1 = 0 \\ \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1} - (\lambda_i + \mu_i) P_i = 0 \\ \dots \\ \lambda P_{n-1} - \mu P_n = 0 \end{cases}$$

Решение системы уравнений:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_{10} \lambda_{21} \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}\right)^{-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)^{-1}$$

$$P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_{i-1}, i = 1,2, \dots, n \text{ или } P_i = \frac{\lambda_0 \lambda_{i-2} \lambda_{i-1}}{\mu_0 \mu_{i-1} \mu_i} P_0 = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

обслуживания (СМО)

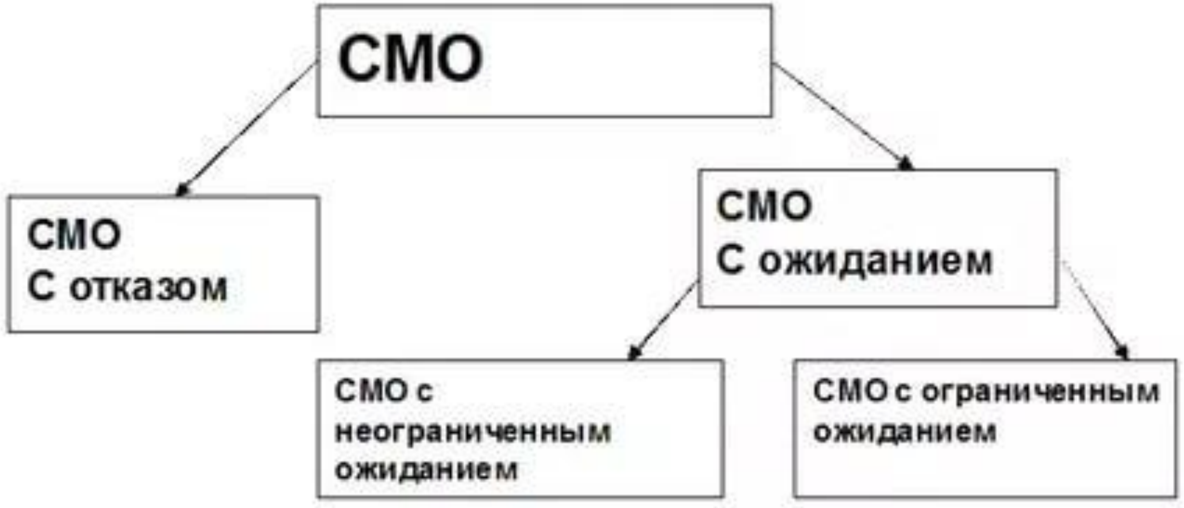
Системы массового обслуживания (**СМО**) или теория массового обслуживания (**ТМО**) – это частный случай непрерывной Марковской системы. ТМО рассматривает наиболее часто встречающийся на практике случай – процессы гибели и размножения.

СМО – это системы из трёх типов элементов:

- Источник заявок (ИЗ) - порождает поток заявок.
- Обслуживающее устройство (ОУ) – обслуживает заявки.
- Очередь ожидания (Оч.). В очередь попадают заявки, в случае занятости ОУ облуживанием предыдущей заявки.

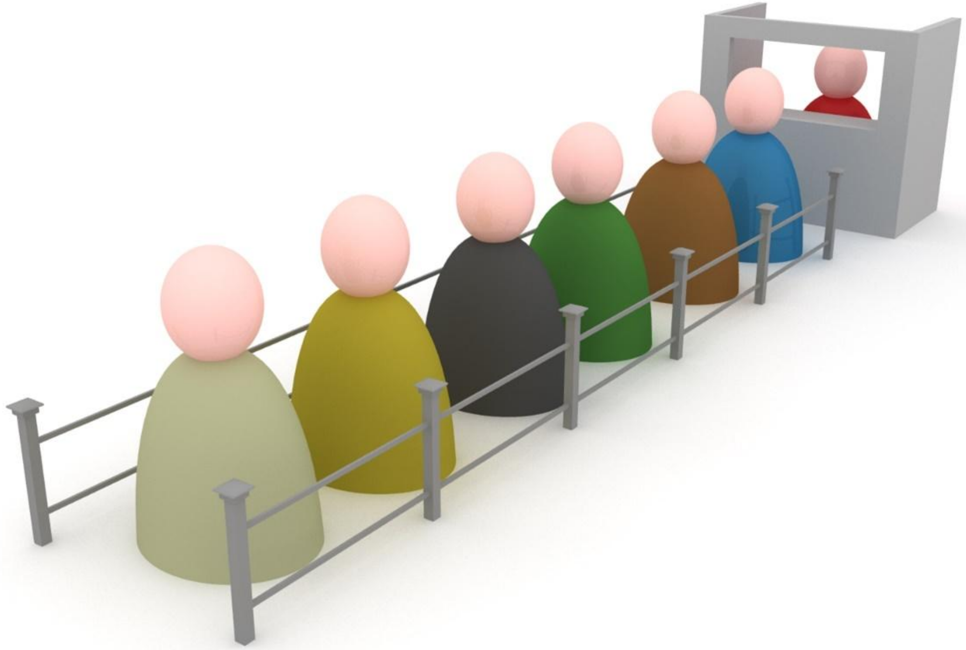
Классификация СМО

По дисциплине



По количеству ОУ

- Одноканальные.
- Многоканальны
  е.



По приоритету

- С одинаковым приоритетом заявок.
- С разным приоритетом заявок.

По времени ожидания

- Без ограничения времени

Классификация СМО

В ТМО существуют стандартные обозначения классов СМО:

A/B/m

Или

A/B/m/K/M, где

A,B – тип потока входящих событий и дисциплины обслуживания.

m – количество ОУ в СМО.

K – количество мест для заявок в очереди

Типы потока заявок:

M – простейший поток.

Er – поток Эрланга порядка *r*.

D – детерминированное.

H_R- гиперпоказательное порядка *R*.

G – распределение произвольного типа

Пример СМО

Пример СМО


THOSE WHO HAVE TIME:
STAND IN LINE HERE
THOSE WHO DON'T HAVE TIME:
STAND IN LINE HERE
COUNTER 1
COUNTER 2

Формула Литтла

$$T_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{сист}}$$

$T_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{оч}}$, где

$\mathrm{T}_{\text{сист}}$ – время пребывания заявки в системе.

$\mathrm{T}_{\text{оч}}$ – время пребывания заявки в очереди.

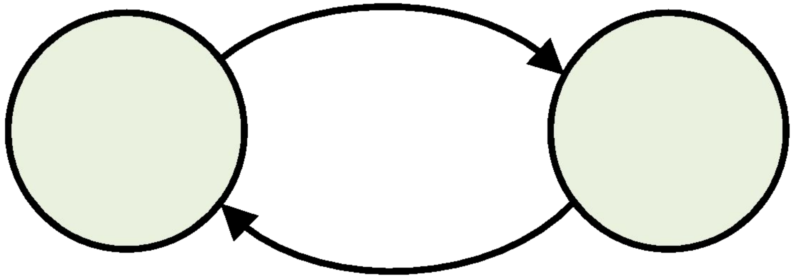
$\mathrm{L}_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе.

$\mathrm{L}_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди.

Формула выведена из принципа, что в стационарном режиме работы СМО среднее число заявок, прибывающих в систему, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность λ.

(M/M/1)

$$\begin{cases} P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\ P_0\lambda - P_1\mu = 0 \end{cases}$$



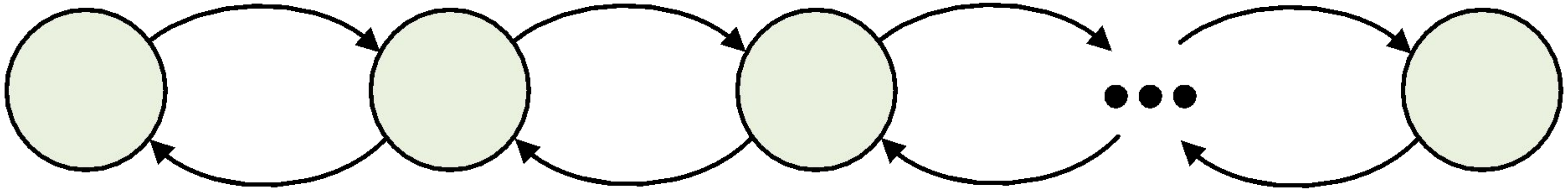
$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$P_{отк} = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ вероятность отказа в обслуживании заявки

$A = \lambda P_0 = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$ абсолютная пропускная способность (сколько заявок в единицу времени обслуживается)

$A = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ относительная пропускная способность (какая часть заявок будет обслужена)

Одноканальная СМО с ограниченной очередью (M/M/1/K)



$$
\begin{cases}
P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\
P_0\lambda + P_2\mu - P_1\,(\lambda + \mu) = 0 \\
P_{k-1}\lambda + P_{k+1}\mu - P_k\,(\lambda + \mu) = \\
\ldots \\
P_{m-1}\lambda + P_{m+1}\mu - P_m\,(\lambda + \mu) =
\end{cases}
$$

очередью

(M/M/1/K)

$P_{отк}=P_N=$

относительная пропускная способность

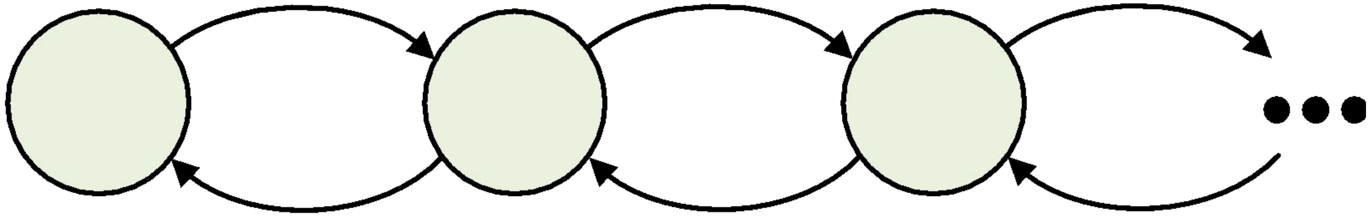
абсолютная пропускная способность: $A=q\cdot\lambda$

среднее число находящихся в системе заявок:

среднее время пребывания заявки в системе:

средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди: $W =W - 1/\mu$;

Одноканальная СМО с неограниченной очередью (M/M/1/ ∞)



$$\begin{cases} P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\ P_0\lambda + P_2\mu - P_1(\lambda+\mu) = 0 \\ P_{k-1}\lambda + P_{k+1}\mu - P_k(\lambda+\mu) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots\right]^{-1} = (1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots)^{-1}. \qquad p_0 = 1 - \rho,$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_k = \rho^k \cdot p_0, \quad \ldots$$

$$p_1 = \rho(1-\rho), \quad p_2 = \rho^2(1-\rho), \quad \ldots, \quad p_k = \rho^k(1-\rho), \quad \ldots$$

очередью

(M/M/1/∞)

$\bar{k} = 1 - P_0 = \rho$ Среднее число работающих ОУ в системе

L_{SIST}=

$$L_{\text{sist.}} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Среднее число заявок в системе

$$W_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$L_{оч} = L_{сист} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Средне число заявок под обслуживанием

$$W_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$$

Время пребывания заявки в очереди

Пример расчета одноканальной СМО с неограниченной очередью

В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

Решение

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{ob.}} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$$

$$p_0 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$P_{\text{zan.}} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

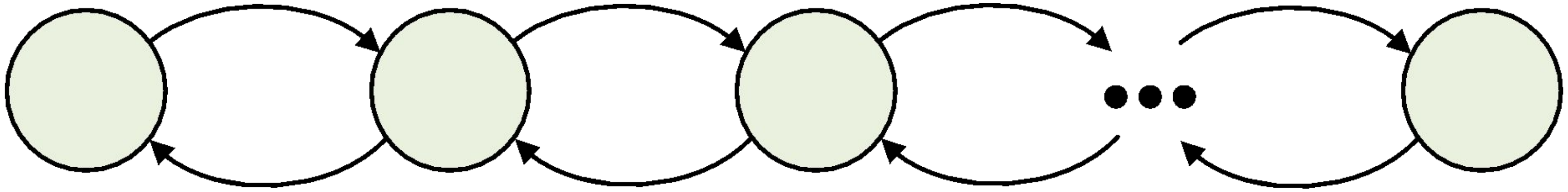
$$p_1 = 0{,}8(1 - 0{,}8) = 0{,}16; \quad p_2 = 0{,}8^2(1 - 0{,}8) = 0{,}128; \quad p_3 = 0{,}8^3(1 - 0{,}8) = 0{,}1024.$$

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904.$$

Вероятность ожидания не более, чем 2-х судов

$$L_{\text{och.}} = \frac{0{,}8^2}{1 - 0{,}8} = 3{,}2 \quad T_{\text{och.}} = \frac{3{,}2}{0{,}8} = 4 \quad L_{\text{sist.}} = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 4 \quad T_{\text{sist.}} = \frac{4}{0{,}8} = 5$$

(M/M/K)



$$
\left.
\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\
&\lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 = 0, \\
&\dots\dots\dots \\
&\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \qquad (0 < k < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&\lambda p_{n-2} - [\lambda + (n-1)\mu] p_{n-1} + n\mu p_n = 0, \\
&\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0.
\end{aligned}
\right\}
$$

(М/М/К)

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} = 1 \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} \quad P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}$$

Формула Эрланга!

$$P_{\text{ОТК}} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

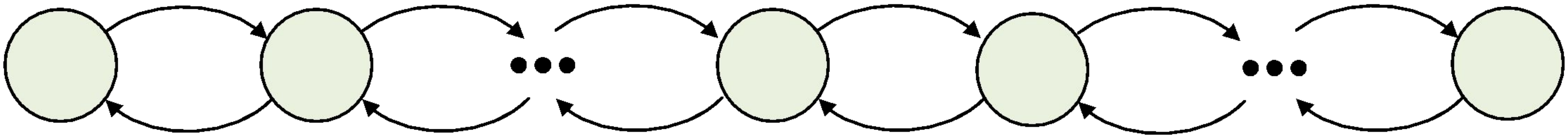
$$q = 1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

$$A = q\lambda = \lambda(1 - P_{\text{ОТК}}) = \lambda(1 - P_n) = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0\right)$$

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \rho(1 - P_{\text{ОТК}})$$

очередью

(м/м/к/∞)



$$\begin{cases} P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\ P_0\lambda + P_2 2\mu - P_1(\lambda + \mu) = 0 \\ P_{k-1}(k+1)\lambda + P_{k+1}k\mu - P_k(k\lambda + k\mu) = 0 \\ P_{k-1}(n+1)\lambda + P_{k+1}n\mu - P_k(n\lambda + n\mu) = 0 \\ \dots \\ P_{n+m-1}(n+1)\lambda - P_{n+m}(n\lambda + n\mu) = 0 \end{cases}$$

ϕ=ρ/n – нагрузка на один канал

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\psi^k + \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{\psi^{n+1}(1-\psi^n)}{1-\psi}\right]^{-1}, \quad \text{если } \psi \neq 1$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \frac{n^n}{n!}\cdot m\right)^{-1}, \quad \text{если } \psi = 1$$

$$\alpha_k = \frac{\lambda^k}{(k\mu)[(k-1)\mu\cdot\ldots\cdot\mu]} = \frac{\lambda^k}{\mu^k\cdot k!} = \frac{\rho^k}{k!} = \frac{n^k}{k!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k; k = 1,\ldots,n.$$

$$\alpha_{n+2} = \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+2}, \ldots, \alpha_{n+m} = \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m}$$

Многоканальная СМО с ограниченной очередью (M/M/K/L)

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0$$

$$P_{\text{ОБС}} = 1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0$$

$$\text{Q} = P_{\text{ОБС}} = 1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0$$

$$A = \lambda Q = \lambda\left[1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0\right]$$

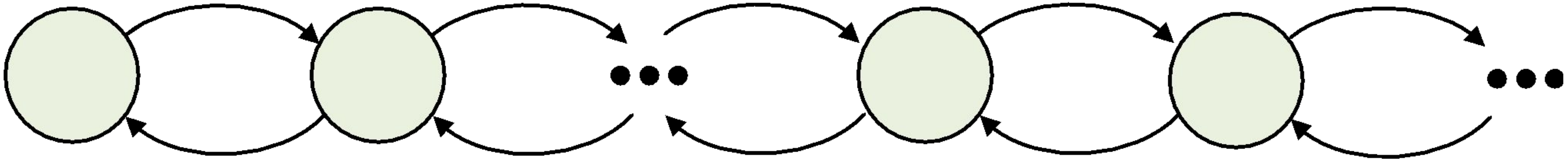
$$\bar{k} = \overline{N_{\text{ОБС}}}\frac{A}{\mu} = \rho Q$$

Среднее число занятых работой ОУ

$$T_{SIST} = T_{\text{ОЧ}} + 1/\mu(\rho/n)$$

очередью

(М/М/К/∞)



$$
\begin{cases}
P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\
P_0\lambda + P_2 2\mu - P_1(\lambda + \mu) = 0 \\
P_{k-1}(k+1)\lambda + P_{k+1}k\mu - P_k(k\lambda + k\mu) = 0 \\
P_{k-1}(n+1)\lambda + P_{k+1}n\mu - P_k(n\lambda + n\mu) = 0 \\
\ldots
\end{cases}
$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0, \quad \ldots$$

очередью

(М/М/К/∞)

$$P_{\text{och.}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot p_0.$$

$$L_{\text{och.}} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n!} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{-2},$$

$$L_{\text{sist}} = L_{\text{och.}} + \rho.$$

$$P_{\text{otk.}} = 0$$

$$\overline{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho,$$

Среднее число занятых каналов

Литература

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для втузов. — 2-е
изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с:

2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. /Пер. И.И. Глушко; ред. В.И. Нейман. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

3/ Миллер Б. М., Панков А. Р. Теория случайных процеспроцессов в примерах и задачах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. -320 с.