

Метод максимального правдоподобия

Плотность распределения

- Функцию $f_{\theta}(y)$

будем называть плотностью
распределения

$$f_{\theta}(y) = \begin{cases} \text{плотность } f_{\theta}(y), & \text{если распределение } \mathcal{F}_{\theta} \text{ абсолютно непрерывно,} \\ P_{\theta}(X_1 = y), & \text{если распределение } \mathcal{F}_{\theta} \text{ дискретно} \end{cases}$$

Функция правдоподобия

- Функция (случайная величина при фиксированном)

$$f(\mathbf{X}, \theta) = f_{\theta}(X_1) \cdot f_{\theta}(X_2) \cdot \dots \cdot f_{\theta}(X_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i)$$

называется функцией правдоподобия.

- А функция

$$L(\mathbf{X}, \theta) = \ln f(\mathbf{X}, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f_{\theta}(X_i)$$

называется логарифмическая функция правдоподобия

Дискретный случай

- В дискретном случае функция правдоподобия $f(x_1, \dots, x_n, \theta)$ есть вероятность выборки $X_1, \dots, X_n$ в данной серии экспериментов $\{x_1, \dots, x_n\}$. Эта вероятность меняется в зависимости от θ :

$$f(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = P_{\theta}(X_1 = x_1) \cdot \dots \cdot P_{\theta}(X_n = x_n) = \\ = P_{\theta}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n).$$

Оценка максимального правдоподобия

- Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ называют значение $f(\mathbf{X}, \theta)$ при котором функция достигает максимума (как функция от θ) при фиксированном $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$):

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} f(\mathbf{X}, \theta).$$

Замечание

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\mathbf{X}, \theta).$$

Пример 1

$X_1, \dots, X_n$ — выборка объема n из распределения Пуассона Π_λ , где $\lambda > 0$

$$P_\lambda(X_1 = y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(\mathbf{X}, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum X_i}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda} = \frac{\lambda^{n\bar{X}}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda}$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X}, \lambda) &= \ln f(\mathbf{X}, \lambda) = \ln \left(\frac{\lambda^{n\bar{X}}}{\prod X_i!} e^{-n\lambda} \right) = n\bar{X} \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n X_i! - \\ &- \ln \prod_{i=1}^n X_i! - n\lambda. \end{aligned}$$

Пример 1(продолжение)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{X}, \lambda) = \frac{n\bar{X}}{\lambda} - n$$

точка экстремума $\hat{\lambda}$ — решение уравнения: $\frac{n\bar{X}}{\lambda} - n = 0$

то есть $\hat{\lambda} = \bar{X}$

Пример 2

$X_1, \dots, X_n$ — выборка объема n из нормального распределения N_{a, σ^2}
где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$f_{(a, \sigma^2)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(\mathbf{X}, a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i - a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mathbf{X}, a, \sigma^2) = \ln f(\mathbf{X}, a, \sigma^2) = -\ln(2\pi)^{n/2} - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{2\sigma^2}$$

Пример 2(продолжение)

$$\frac{\partial}{\partial a} L(\mathbf{X}, a, \sigma^2) = \frac{2 \sum_{i=1}^n (X_i - a)}{2\sigma^2} = \frac{n\bar{X} - na}{\sigma^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} L(\mathbf{X}, a, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{2\sigma^4}.$$

$$\frac{n\bar{X} - na}{\sigma^2} = 0; \quad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0.$$

$$\hat{a} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S^2$$

Пример 3

$X_1, \dots, X_n$ — выборка объема n из равномерного распределения

$U_{\theta, \theta+5}$, где $\theta \in \mathbb{R}$

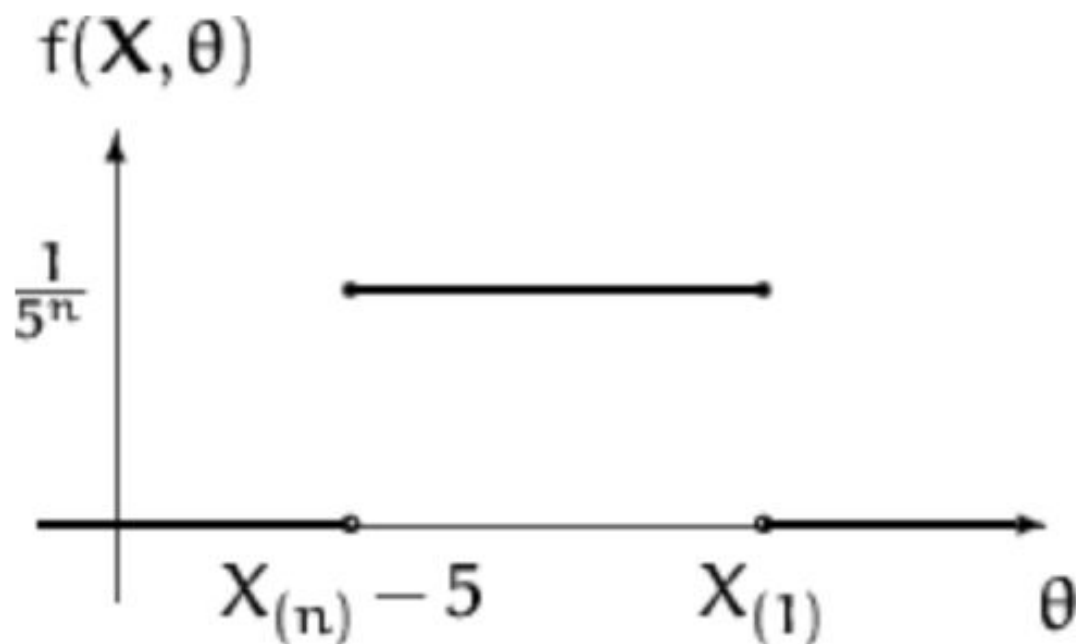
$$f_{\theta}(y) = \begin{cases} 1/5, & \text{если } y \in [\theta, \theta + 5] \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$f(\mathbf{X}, \theta) = \begin{cases} (1/5)^n, & \text{если все } X_i \in [\theta, \theta+5] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (1/5)^n, & \theta \leq X_{(1)} \leq X_{(n)} \leq \theta+5 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} =$$

Пример 3(продолжение)

$$= \begin{cases} (1/5)^n, & \text{если } X_{(n)} - 5 \leq \theta \leq X_{(1)} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$



Пример 3(продолжение)

$$\hat{\theta}_{\alpha} = (1 - \alpha)(X_{(n)} - 5) + \alpha X_{(1)}$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

$$\hat{\theta}_0 = X_{(n)} - 5, \hat{\theta}_1 = X_{(1)} \text{ — концы отрезка}$$