Методы интегрирования

Неопределенный интеграл

Метод замены переменной

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x = \varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx = \varphi'(u)du$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, выраженные через u и du, имеем

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F(u)du.$$

После того как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u = \psi(x)$ он приводится к переменной x.

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$1)\int (3x+2)^5 dx\ .$$

Решение:

Введём подстановку $3x+2=u$. Дифференцируя, имеем $3dx=du$, откуда

$$dx=\frac{1}{3}du$$

Подставив в данный интеграл вместо $3x+2$ и dx их выражения, получим:

$$\int (3x+2)^5 dx=\frac{1}{3}\int u^5 du=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6}+C=\frac{1}{18}u^6+C.$$

Заменив *u* его выражением через *x*, находим:

$$\int (3x+2)^5 dx=\frac{1}{18}u^6+C=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C.$$

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$2)\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx\ .$$

Решение:

Введём подстановку $2x^3+1=u$. Дифференцируя, имеем $6x^2dx=du$,

откуда $x^2dx=\frac{1}{6}du$. Таким образом,

$$\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx=\frac{1}{6}\int u^4du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}+C=\frac{1}{30}u^5+C=\frac{1}{30}\left(2x^3+1\right)^5+C.$$

$$3)\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^3}\ .$$

Решение:

Введём подстановку $x^2+1=u$. Дифференцируя, имеем $2xdx=du$,

откуда $xdx=\frac{1}{2}du$ Таким образом,

$$\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\int\left(x^2+1\right)^{-3}x\,dx=\frac{1}{2}\int u^{-3}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4u^2}+C=-\frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}+C.$$

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$4)\int\frac{x^2\,dx}{5x^3+1}.$$

Решение:

Введём подстановку $5x^3+1=u$. Дифференцируя, имеем $15x^2dx=du$, откуда $x^2dx=\frac{1}{15}du$. Таким образом,

$$\int\frac{x^2\,dx}{5x^3+1}=\frac{1}{15}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{15}\ln u+C=\frac{1}{15}\ln\left|5x^3+1\right|+C.$$

Задачи для самостоятельной работы:

$$1.\int(7-2x)^3dx;\quad 2.\int\left(x^2+3\right)^5x\,dx;\quad 3.\int\frac{x^3\,dx}{\left(5x^4+3\right)^5}.$$

Интегрирование по частям

Интегрируя обе части равенства $d(u\,v) = u\,dv + v\,du$, получим

откуда $$\int d(u\,v) = \int u dv + \int v\,du;\;\; u\,v = \int u\,dv + \int v\,du,$$

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{1}$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int u dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v\,du$, если последний окажется проще исходного.

Интегрирование по частям

Найдите следующие интегралы:

1) $\int x \sin x\, dx$.

Решение:

Пусть $u = x, \;\; dv = \sin x\, dx;$ тогда $du = dx$, $\int dv = \int \sin x\, dx$, т.е. $v = -\cos x.$

Используя формулу (1), получим:

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2) $\int \frac{\ln x\, dx}{x^2}$.

Решение:

Пусть $u = \ln x, \;\; dv = \frac{dx}{x^2};$ тогда $du = \frac{dx}{x}, \int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}; \;\; v = -\frac{1}{x}.$

Используя формулу (1), получим:

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Интегрирование по частям

Задачи для самостоятельной работы:

$$1)\int x\cos x\,dx;$$

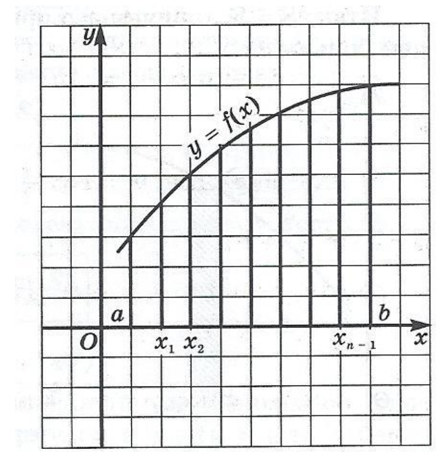
$$2)\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x};$$

Определенный интеграл

Приложения определенного интеграла

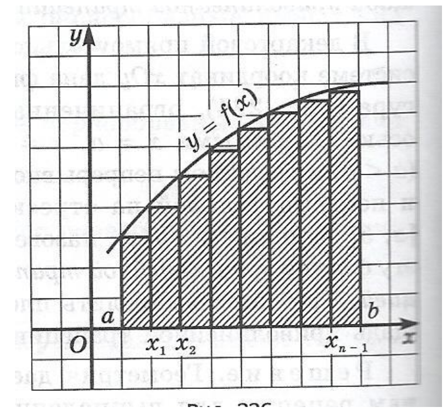
Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX, прямыми x=a, x=b (a<b) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке [a;b] функции y=f(x), называется криволинейной трапецией



Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок [a;b] на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY. Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.



$$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, его называют определенным интегралом от функции y=f(x) по отрезку [a;b] и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Связь между определенным интегралом и первообразной
(Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная функции f(x).

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

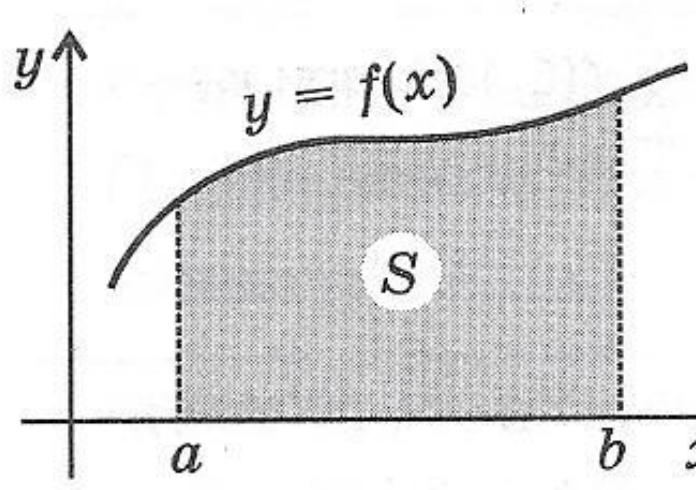
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

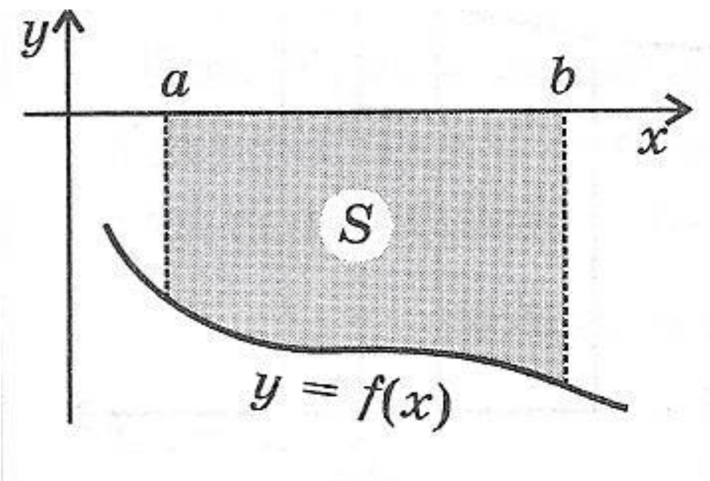
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:

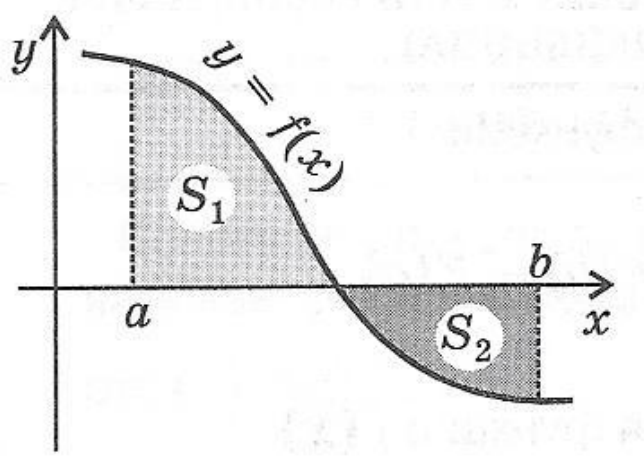


$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

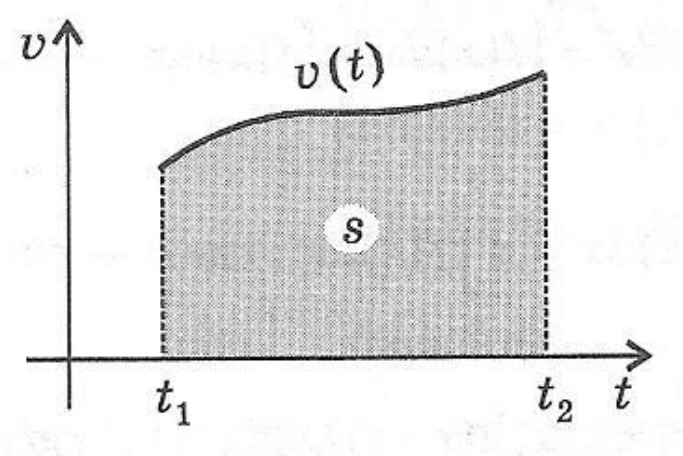
- **Замечание:** Если функция изменяет знак на промежутке [a;b] , то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$



Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение s численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t:



$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Пример

Вычислить определённый интеграл:

$$\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)dx = \left.3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} =$$

$$=\left(3\cdot 1-1^2-\frac{1^3}{3}\right)-\left(3\cdot(-2)-(-2)^2-\frac{(-2)^3}{3}\right)=9$$

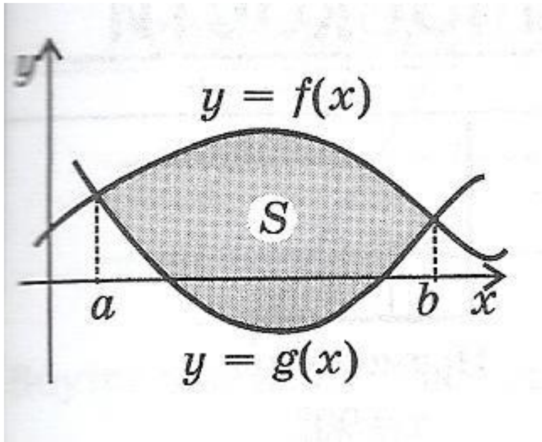
$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры,

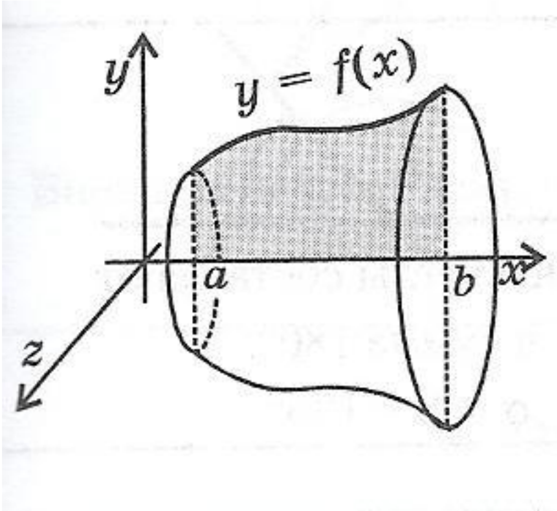
- Ограниченной графиками непрерывных функций y=f(x) и y=g(x) таких, что $f(x) \geq g(x)$ для любого x из [a;b], где a и b – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции y=f(x) на отрезке [a;b]:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$