

ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ ПО ТЕМЕ:
**«АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ПРОГРЕССИИ»**

Содержание:

- ◎ Арифметическая прогрессия
 - Теория
 - Задачи для самостоятельного решения
- ◎ Геометрическая прогрессия
 - Теория
 - Задачи для самостоятельного решения
- ◎ Занимательные задачи на применение формул прогрессий

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Прогрессии	Арифметическая	Геометрическая
Определение	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n q$
Формула n-го члена.	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Сумма n-первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$
Свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

Арифметическая прогрессия:

- ⊙ Арифметической прогрессией называется ряд чисел, в котором каждое число, начиная со второго, равняется предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным числом
- ⊙ Формула n - го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$
 d - разность арифметической прогрессии: $d = a_{n+1} - a_n$
- ⊙ Характеристическое свойство: $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2$
- ⊙ Формулы суммы n - первых членов:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$



Задача 1: Диаметры пяти шкивов, насаженных на общий вал, образуют арифметическую прогрессию. Найти диаметры шкивов, если сумма первого и третьего составляет 268 мм, а второго и четвертого - 316 мм.

Решение: По условию задачи $a_1 + a_3 = 268$; $a_2 + a_4 = 316$, найти требуется a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Составим и решим систему уравнений, используя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 268, \\ a_2 + a_4 = 316 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 2d = 268, \\ a_1 + d + a_1 + 3d = 316; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 2d = 268, \\ 2a_1 + 4d = 316; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 110, \\ d = 24. \end{cases}$$

Подставив полученные значения в формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, найдем остальные значения

$$a_2 = 134, a_3 = 158, a_4 = 182, a_5 = 206$$

Ответ: 110, 134, 158, 182, 206

Задача 2: За изготовление и установку первого железобетонного кольца колодца заплатили 100 уе., а за каждое следующее кольцо платили на 20 уе. больше, чем за предыдущее. Средняя стоимость одного кольца и его установки оказалась равной 220 уе. Сколько колец было установлено?

Решение: По условию задачи $a_1 = 100$, $d = 20$, $S_n : n = 220$, а найти требуется n .

По формуле: $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

значит $S_n : n = (2a_1 + d(n-1)) : 2$

$$220 = (2 \cdot 100 + 2(n-1)) : 2$$

$$440 = 200 + 2n - 2$$

$$n = 13$$

Ответ: 13

Задача 3: За первый день было вспахано 100 га пашни, а в каждый последующий день - на 3 га больше, чем в предыдущий. Найти, сколько гектаров пашни было вспахано за 19 дней.

Решение: По условию задачи $a_1 = 100$, $d = 3$, $n = 19$, значит найти требуется S_{19} .

По формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_{19} = \frac{2 \cdot 100 + 3(19-1)}{2} \cdot 19 = 2413$$

Ответ: 2413

Задача 4: Два тела, находясь на расстоянии 153 м друг от друга, начали двигаться одновременно навстречу друг другу. Первое тело движется со скоростью 10 м/с, второе в первую секунду прошло 3 м, а в каждую последующую - на 5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд тела встретятся?

Решение: Первое тело движется равномерно, и поэтому путь, пройденный этим телом, вычисляется по формуле: $S=V \cdot t$. Движение второго тела подчиняется законам арифметической прогрессии где $a_1 = 3$, $d = 5$

Поэтому
$$S = \frac{2a_1 + d(t-1)}{2} \cdot t$$

необходимо найти t .

Из условия задачи получаем уравнение: $10t + \frac{6 + 5(t-1)}{2} \cdot t = 153$, где $t \in \mathbb{N}$

$$5t^2 + 21t - 153 = 0$$

$$t_1 = 6, t_2 = -10,2$$

Второй корень не удовлетворяет условию $t \in \mathbb{N}$

Ответ: 6



Задачи для самостоятельного решения:

1. За изготовление и установку первого железобетонного кольца заплатили 100 уе., а за каждое следующее кольцо платили на 20 уе. больше, чем за предыдущее. На постройку колодца израсходовали 9 колец. Какова стоимость колодца?

Ответ: 1620

2. За рытье колодца оплачивается за первый метр глубины 150 уе., а за каждый следующий – на 10 уе. больше, чем за предыдущий. Вычислить стоимость работы, если глубина колодца составила 10 м.

Ответ: 1950

3. Шар, катящийся по желобу, в первую секунду проходит 0,6 м, а путь, пройденный в каждую следующую секунду, увеличивается на 0,6 м. Сколько секунд будет двигаться шар по шестиметровому желобу?

Ответ: 4

4. Турист, двигаясь по пересеченной местности, за первый час пути прошел 800 в, а за каждый следующий час проходил на 25 м меньше, чем за предыдущий. Сколько времени он потратил на путь, равный 5700 м?

Ответ: 8



Геометрическая прогрессия:

- Геометрическая прогрессия - это ряд чисел, каждое из которых получается из предыдущего умножением его на некоторое постоянное для этого ряда число

- Формула n - го члена: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

q - знаменатель геометрической прогрессии: $q = b_{n+1} : b_n$

- Характеристическое свойство:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

- Формулы суммы n - первых членов:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q^n - b_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$



Задача 1: Известно, что бактерия в питательной среде через каждые полчаса делится на две. Сколько бактерий может образоваться из одной бактерии за 10 часов?

Решение: Бактерия была одна, следовательно, $b_1=1$. Она делится на две, значит $q=2$, а так как время деления полчаса, то за 10 часов произойдет 20 делений и нам нужно найти b_{21}

По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$b_{21} = 1 \cdot 2^{20} = 1048576 \approx 1,05 \cdot 10^6$$

Ответ: $10,5 \cdot 10^6$

Задача 2: После каждого качания поршня под колоколом воздушного насоса давление воздуха уменьшается на 0,83 начального давления. Определить, как велико будет давление воздуха под колоколом после 15 качаний, если первоначальное давление было равно 760 мм ртутного столба.

Решение: Из условия задачи получаем, что $b_1=760$; $q=0,83$; $n = 16$,
а найти необходимо b_{16} .

По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, значит:

$$b_{16} = 760 \cdot 0,83^{15} \approx 46,45$$

Ответ: 46,45

Задача 3: Мощности пяти электромоторов составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Мощность первого 5 кВт, а третьего 9,8 кВт. Рассчитать мощности остальных электромоторов (ответ дать в кВт).

Решение: По условию задачи $b_1=5$; $b_3=9,8$; $n = 5$, значит нам необходимо найти b_2 , b_4 , b_5

Для решения применим формулы: $q = b_{n+1} : b_n$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

По условию задачи $b_2 = \sqrt{b_1 \cdot b_3}$

$$b_2 = \sqrt{5 \cdot 9,8} = \sqrt{49} = 7$$

для того, чтобы найти остальные значения, найдем q ,

$$q = b_2 : b_1 = 7 : 5 = 1,4$$

$$b_4 = 9,8 \cdot 1,4 = 13,72$$

$$b_5 = 13,72 \cdot 1,4 = 19,208$$

Ответ: 7; 13,72; 19,208

Задача 4: В сберегательный банк внесли вклад в размере 10000 рублей с доходом 2% годовых. Какую сумму выплатит банк вкладчику через 4 года? (ответ дать в рублях)

Решение: За один год банк выплатит $S_1 = b_1 + b_1 q = b_1 \cdot (1+q)$,

где b_1 - вклад, q - процентная ставка.

За 2 года $S_2 = S_1 + S_1 q = S_1 (1+q)$, но $S_1 = b_1 \cdot (1+q)$, следовательно, $S_2 = b_1 \cdot (1+q)^2$.

Тогда за n лет $S_n = b_1 \cdot (1+q)^n$

Найдем по этой формуле S_4 , $S_4 = b_1 \cdot (1+q)^4$

$$10000 \cdot (1 + 2\% : 100\%)^4 = 10000 \cdot 1,02^4 = 10824,32$$

10824 руб. 32 коп.

Ответ: 10824,32

Задача 5: Два товарища поспорили о том, что река должна покрыться льдом не ранее 20 декабря. Они условились, что если река покроется ледяным покровом раньше, то первый из них платит, а если позже, то получает за первый день 1 рубль, а за каждый последующий день в 1,5 раза больше. Река покрылась льдом 12 декабря. Сколько заплатит первый? (ответ дайте в рублях, округлив до единиц)

Решение: 1 день-1 руб, 2 день- $1 \cdot 1,5$ руб, 3 день- $1 \cdot 1,5 \cdot 1,5$ руб. Получаем геометрическую прогрессию, где $b_1=1$; $q=1,5$.

Соответствие дней и членов геометрической прогрессии следующее:

12 декабря- b_1 , 13 декабря- b_2 , ..., 19 декабря- b_8 . Получилось $n = 8$.

Применим формулу суммы:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

посчитаем S_8

$$S_8 = 1 \cdot (1,5^8 - 1) = 49,26 \approx 49 \text{ (руб)}$$

Ответ: 49



Задачи для самостоятельного решения:

1. Какое количество древесины будет на участке через 6 лет, если первоначальное количество древесины было 40000 м^3 , при условии, что ежегодный прирост древесины составляет 10%?

Ответ: $70,8 \text{ тыс м}^3$

2. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две, а каждая из них к концу следующих 20 минут вновь делится на две и т.д. Найти число бактерий, образовавшихся из одной бактерии к концу суток.

Ответ: 2^{72}

3. Клиенту в банке предлагают сделать вклад на условия 2% в месяц. Какая сумма будет на счету через: а) два месяца, б) полугодие, в) десять лет, если первоначальная сумма вклада равнялась 100 тыс. руб (ответ дайте в рублях, округляя до сотых).

Ответ: а) 104040; б) 112616,24; в) 1076516,3

4. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда образуют геометрическую прогрессию. Объем параллелепипеда равен 216 м^3 , а сумма длин всех его ребер равна 104 м. Найдите измерения параллелепипеда.

Ответ: 2 м, 6 м, 18 м



Занимательные задачи на применение формул прогрессий

1. Однажды богач заключил выгодную, как ему казалось, сделку с человеком, который целый месяц ежедневно должен был приносить по 100 тысяч руб., а взамен в первый день месяца богач должен был отдать 1 коп., во второй - 2 коп., в третий - 4 коп., в четвертый - 8 коп. и т.д. в течение 30 дней. Сколько денег получил богач и сколько он отдал? Кто выиграл от сделки?

Ответ: получил $3 \cdot 10^6$ руб., отдал примерно 10^7 руб., богач проиграл

2. У каждого из нас двое родителей, 4 дедушек и бабушек, 8 прадедушек и прабабушек, 16 прапрадедушек и прапрабабушек. Считая три поколения на каждые 100 лет, посчитайте, сколько у вас было предков 3000 лет тому назад. Подумайте, почему полученный вами верный математический ответ нереален.

Ответ: 2^{9000}

3. Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день – на 5 капель больше, чем в предыдущий. Дойдя до нормы 40 капель в день, он 3 дня пьёт по 40 капель, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель в последний день. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 200 капель)?

Ответ: 2 пузырька

4. Улитка ползет вверх по дереву, начиная от его основания. За первую минуту она проползла 30 см, а за каждую следующую минуту – на 5 см больше, чем за предыдущую. За какое время улитка достигнет вершины дерева высотой 5,25 м?

Ответ: 10 минут

