Алгебра і початки аналізу. 10 клас
(за підручником Мерзляк А. Г.)

Тема уроку: Обернена функція

Поняття оберненої функції

На рисунках 47, 48 зображено графіки функцій *f і g. Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу* $y_0 \in E(f)$ *відповідає єдине число* $x_0 \in D(f)$ *таке, що* $y_0 = f(x_0)$.

Функція g такої властивості не має.

Справді, з рисунка 48 видно, що значенню y_0 *відповідають два значення аргументу* x_1 *і* x_2 *такі, що* $y_0 = g(x_1)$ *і* $y_0 = g(x_2)$.

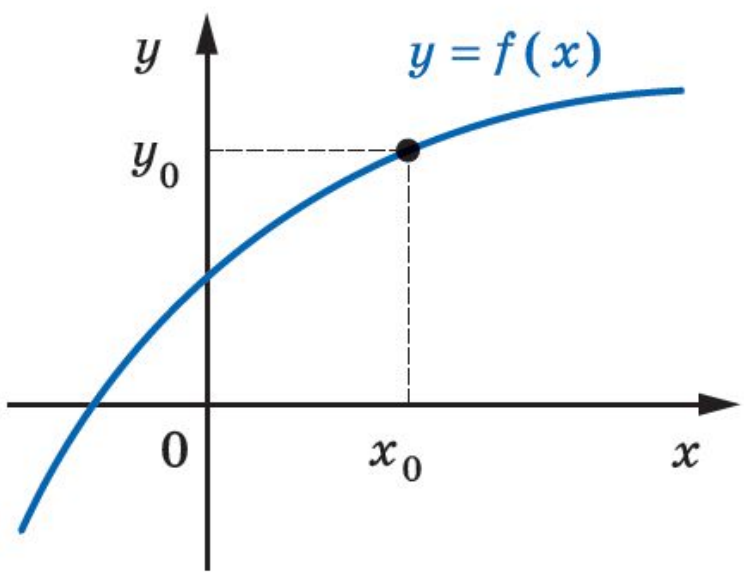


Рис. 47

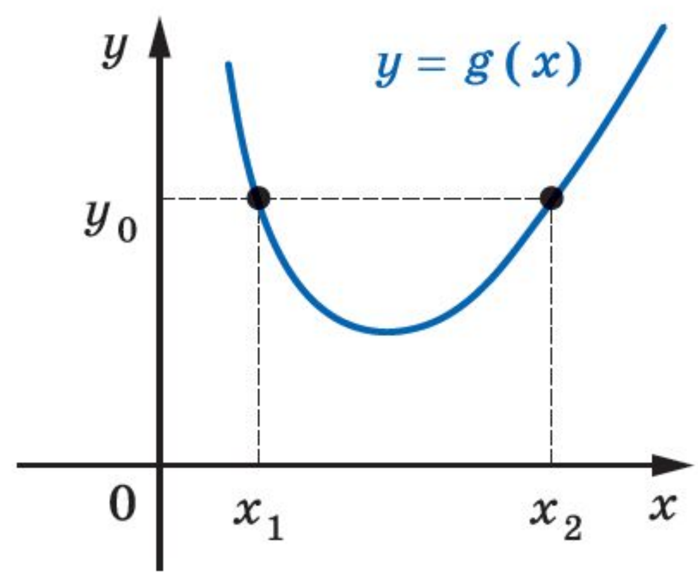


Рис. 48

Оборотна функція

***Означення. Функцію** $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція f (рис. 47) є оборотною. Функція g (рис. 48) не є оборотною.*

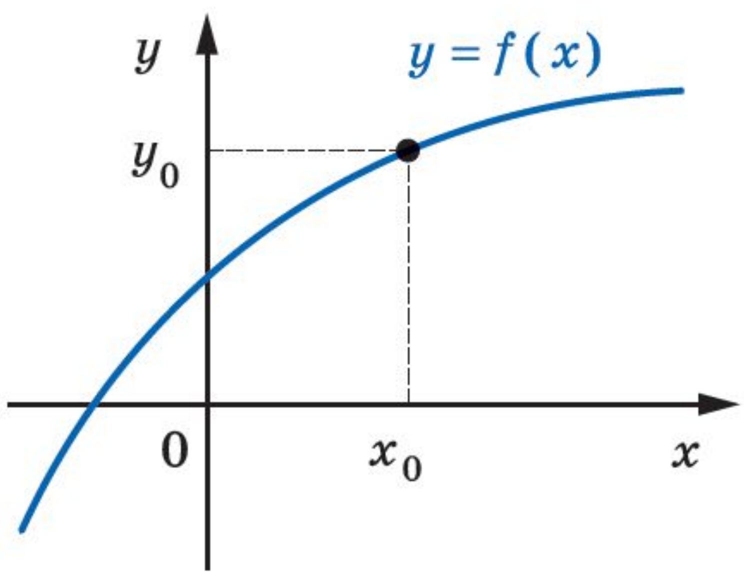


Рис. 47

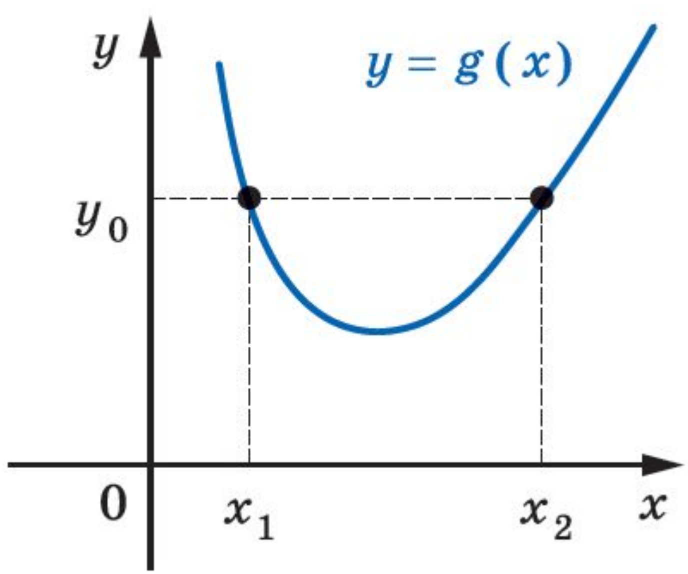


Рис. 48

Приклади оборотних функцій

Функції $y = x,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = \sqrt{x}$ *є прикладами оборотних функцій (рис. 49). а) б) в)*

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу x_1 =

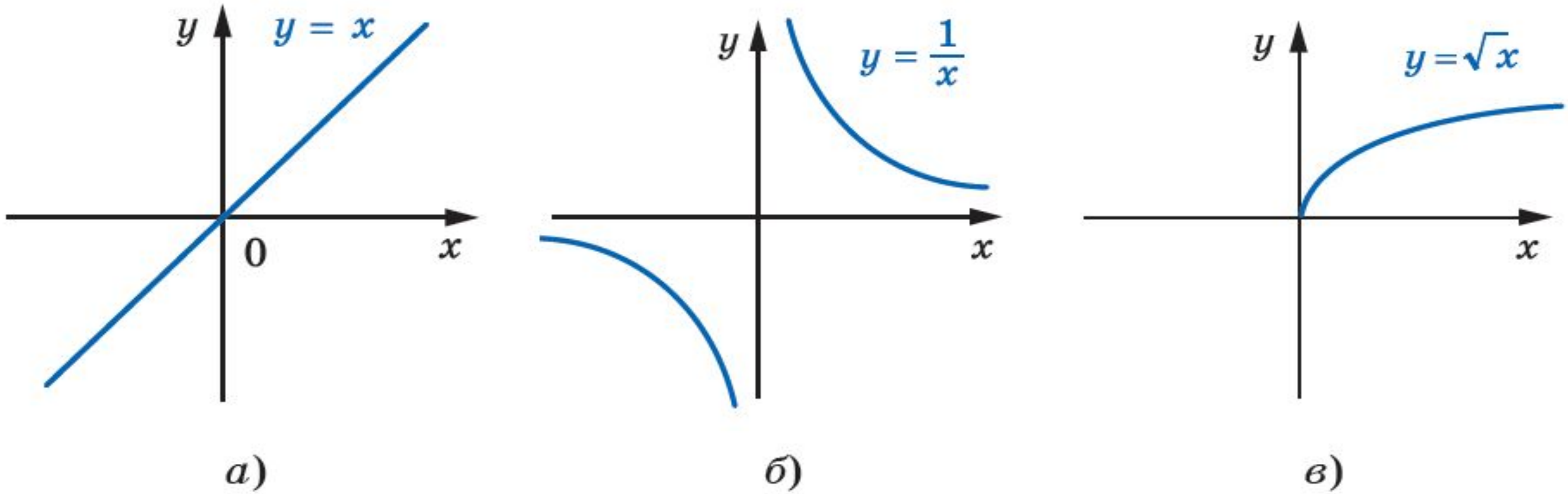


Рис. 49

Теорема 6.1

Теорема 6.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення.

Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y_0.$$

Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною.

Розглянемо функцію *y = f (x), задану таблично:*

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція *f є оборотною. Поміняємо рядки таблиці місцями і розглянемо функцію y = g (x), задану отриманою табли*

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Фу

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g\left(\sqrt{5}\right) = 5$; $f(6) = \sqrt{6}$, $g\left(\sqrt{6}\right) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g\left(\sqrt{7}\right) = 7$.

Ці рівності означають, що коли *$f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$. У таких випадках говорять, що функція g є* ***оберненою до функції f, а функція f — оберненою до функції g.*** ***Такі функції f і g називають взаємно оберненими.***

Взаємно обернені функції

Означення. Функції *f і g називають взаємно оберненими, якщо:*

1) *D (f) = E (g) і E (f) = D (g);*
2) *для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.*

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таке: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ з рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї.

Будь-яка оборотна функція має обернену.

Приклад

Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної y знайти відповідне значення змінної x таке, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою x, а залежну — буквою y. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яка задається формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x)=\frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0)=\frac{y_0+1}{2}=\frac{2x_0-1+1}{2}=x_0$.

Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $f(x) = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо обернену функцію.

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y}=\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y=\sqrt{x}$.

Покажемо, що функції $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, і $g(x)=\sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$, $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = x_0^2$, де $x_0 \geqslant 0$. Запишемо $g(y_0)=\sqrt{y_0}=\sqrt{x_0^2}=|x_0|=x_0$.

Теорема 6.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Доведення. ⊙ Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g обернена до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.

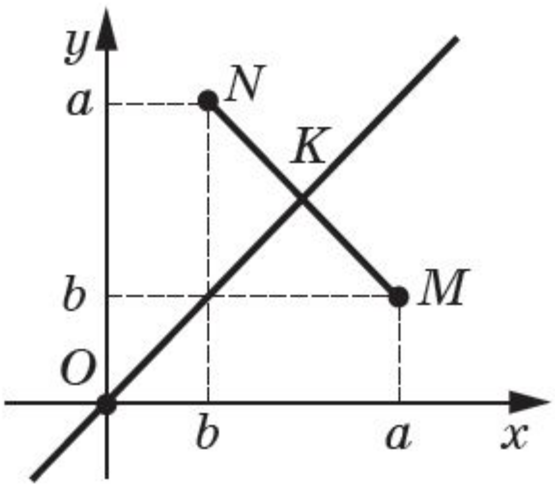


Рис. 50

При $a \neq b$ маємо (рис. 50): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ і є серединним перпендикуляром відрізка MN. ▲

Доведену теорему 6.2 ілюструють графіки взаємно обернених функцій, що розглядалися вище (рис. 51)

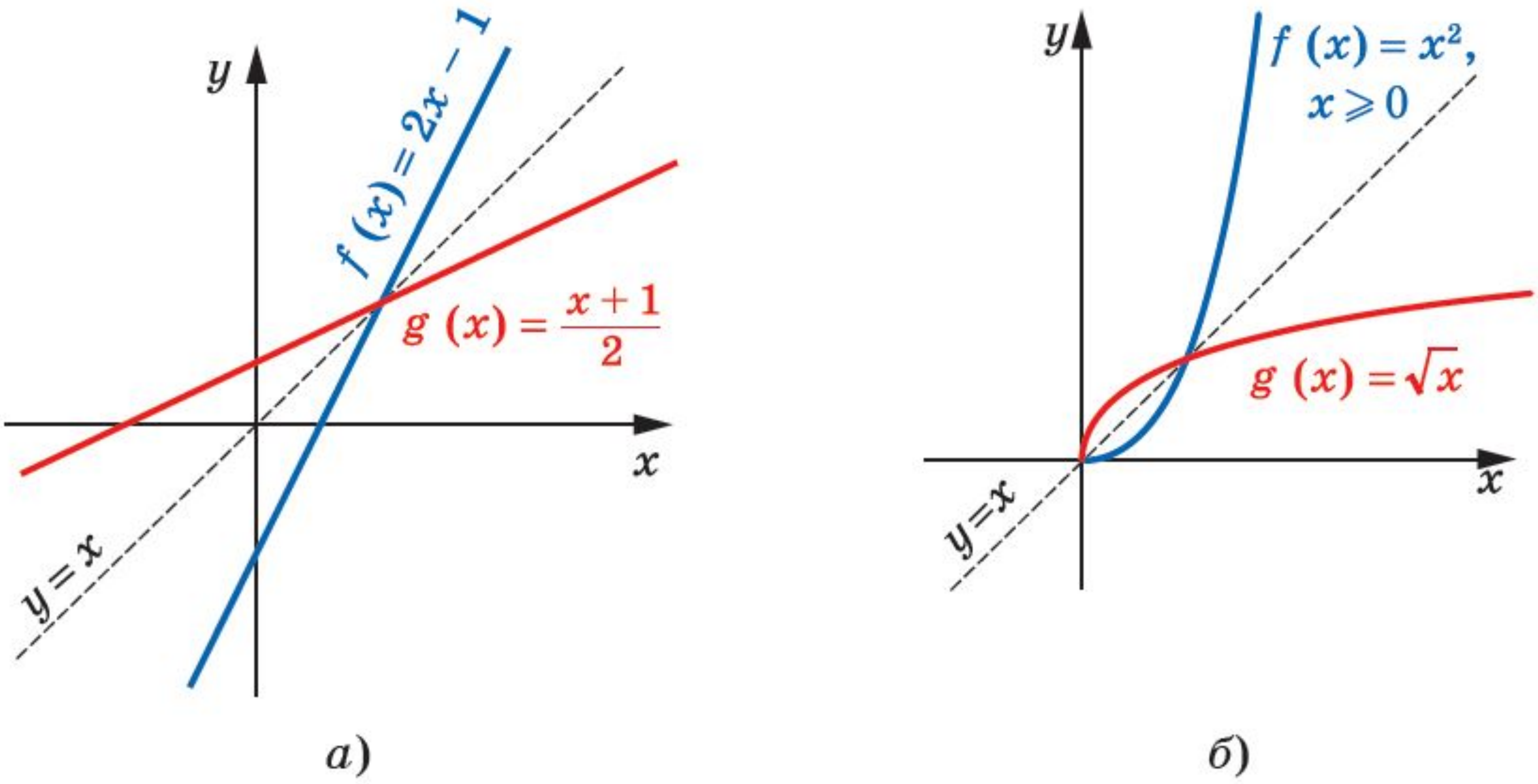


Рис. 51

Теорема 6.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. ⊙ Припустимо, що функція f — зростаюча і при цьому обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Отримуємо, що $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f — зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ▲

Первинне закріплення вивченого матеріалу

1. **Яку функцію називають оборотною?**
2. **Сформулюйте теорему про оборотність зростаючої (спадної) функції.**
3. **Як пов’язані область визначення функції та область значень оберненої до неї функції?**
4. **Як пов’язані область значень функції та область визначення оберненої до неї функції?**
5. **Які дві функції називають взаємно оберненими?**
6. **Як розташовані графіки взаємно обернених функцій?**
7. **Якою є функція, обернена до зростаючої функції? до спадної функції?**

Тренувальні вправи

181.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 52, є оборотними?

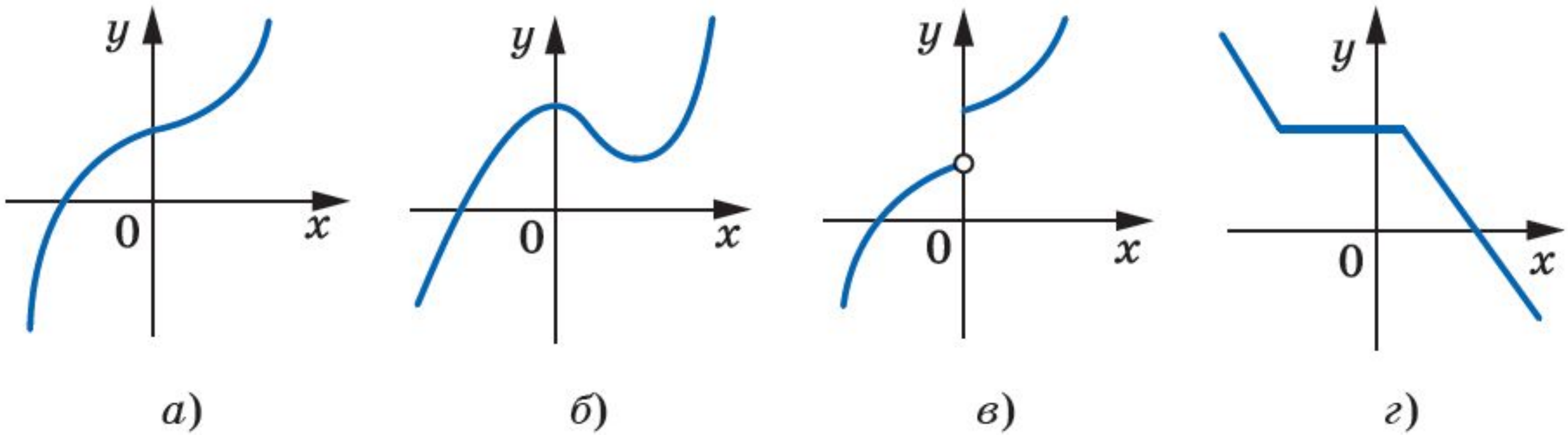


Рис. 52

Коментоване виконання вправ

183.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$.

184.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$; 4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

186.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x}{x-1}$; 3) $y = 2\sqrt{x} - 1$; 5) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

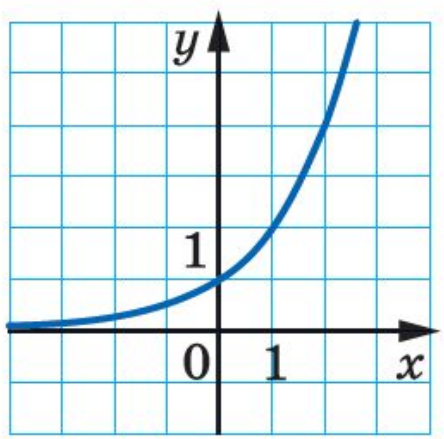
2) $y = \sqrt{2x-1}$; 4) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$;

Напівсамостійне виконання вправ

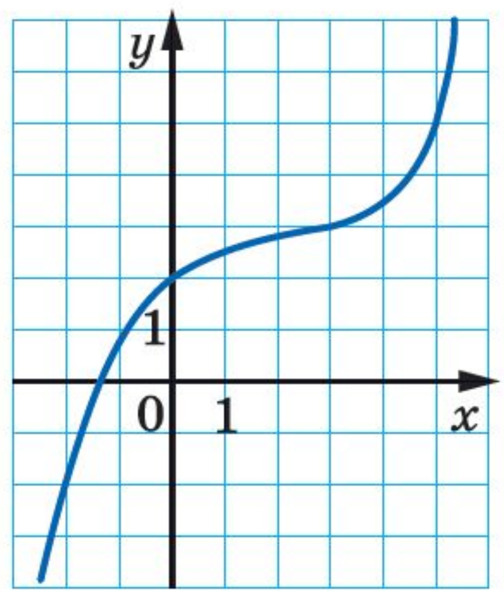
188.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y = -0{,}5x + 2$; 2) $y = \sqrt{x+1}$; 3) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 2x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

190.• Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 54, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.



а)



б)

Рис. 54

Вправи для повторення

195. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 9 год., а через другу — за 12 год. Спочатку 3 год. була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басей