




ЗАДАНИЕ 2:

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА
ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ
ПОИСКА ГЛОБАЛЬНО
ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ
ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО
ЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

- 
- Принципы свертки критериев многокритериальных задач с дискретными переменными методами неявного перебора

Формальная постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k : F_k = \sum_{i=1}^{i=n} c_{i,k} x_i \rightarrow \max(\min); \\ \forall j : \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} x_i = b_j; \\ \forall i : x_i \in \{d_{1,i}, d_{2,i}, \dots, d_{m,i}\}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Алгоритм свертки критериев для поиска решения многокритериальных задач с дискретными переменными сочетанием эталонов с методами неявного перебора

Ввод исходных данных

$\forall i$, вычислить $F_{i, \max}$ и $F_{i, \min}$.

$$\varphi = \sqrt{\sum_i \left(z_i - \frac{F_i - F_{i \min}}{F_{i \max} - F_{i \min}} \right)^2},$$

$z_i = 1$, если $F_i \rightarrow \max$,
И
 $z_i = 0$, если $F_i \rightarrow \min$.

Новый
критерий

Пояснения

Свертка критериев с помощью эталонов позволяет получить новую целевую функцию вида:

$$\varphi = \sqrt{\sum_i \left(z_i - \frac{F_i - F_{i \min}}{F_{i \max} - F_{i \min}} \right)^2},$$

где F_i - i -я целевая функция, $z_i = 1$, если $F_i \rightarrow \mathit{max}$,
и $z_i = 0$, если $F_i \rightarrow \mathit{min}$.

Новая формальная постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \sqrt{\sum_i \left(z_i - \frac{F_i - F_{i \min}}{F_{i \max} - F_{i \min}} \right)^2} \longrightarrow \min; \\ \forall j : \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} x_i = b_j; \quad (2) \\ \forall i : x_i \in \{d_{1,i}, d_{2,i}, \dots, d_{m,i}\}. \end{array} \right.$$

ТЕОРЕМА

Оптимальный вектор
переменных задачи (2) является
Парето - оптимальным
вектором задачи (1).

ПРИМЕР 1

- Пользуясь описанным выше методом свертки, решить методом типа ветвей и границ в сочетании с перебором, многокритериальную задачу с булевыми переменными вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max; \\ F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i: x_i = 1, 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Условия свертки

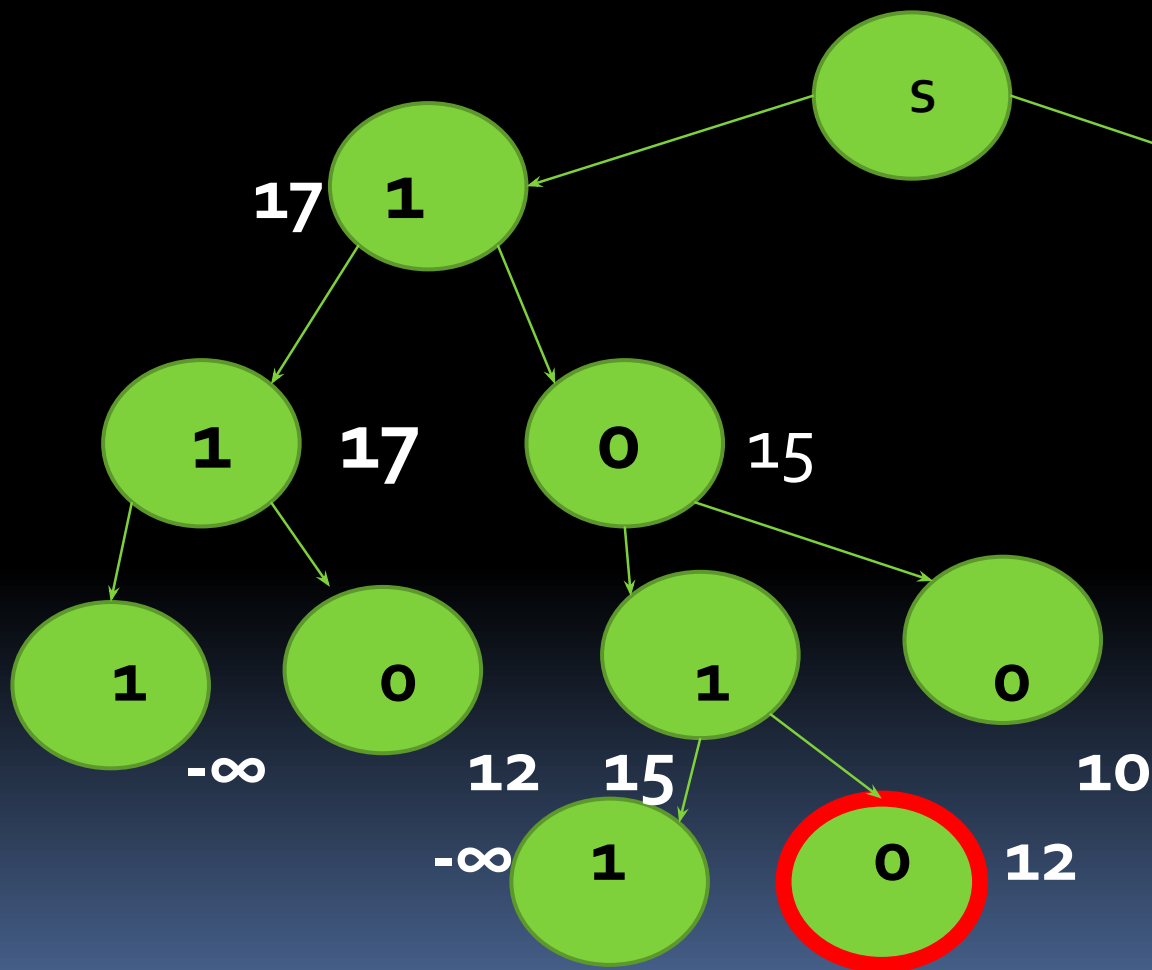
- Для того, чтобы преобразовать (1) в однокритериальную задачу, следует определить максимальные и минимальные значения F_1 и F_2 .

Поиск максимальной величины

F_1

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Решение задачи (2) методом типа ветвей и границ



$$\begin{cases}
 F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max; \\
 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\
 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\
 \forall i: x_i = 1,0.
 \end{cases} \quad (2)$$

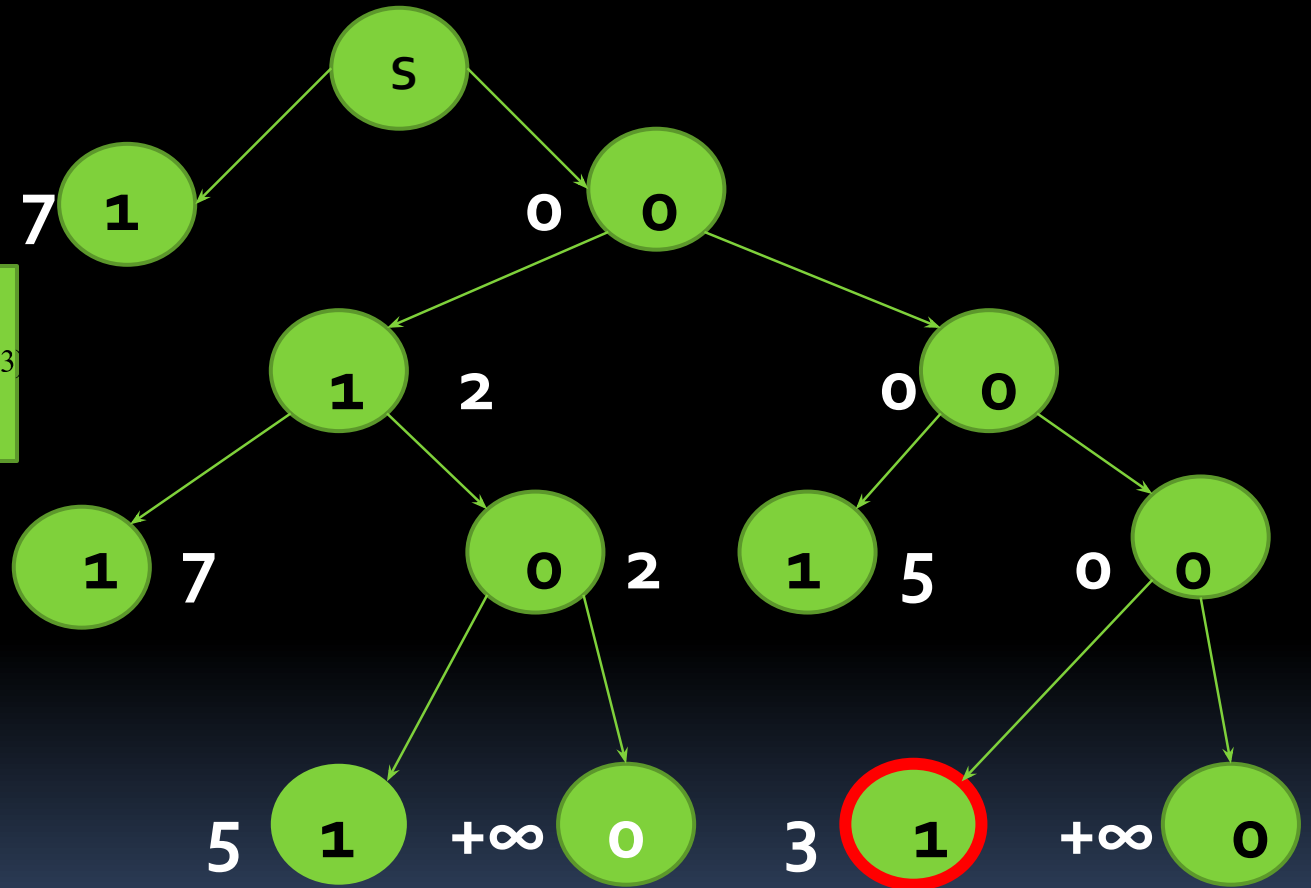
F1 max = 12

Поиск минимальной величины F_1 сводится к решению задачи (3):

$$\begin{cases} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение задачи (3) методом типа ветвей и границ

$$\begin{cases}
 F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \min; \\
 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\
 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\
 \forall i: x_i = 1, 0.
 \end{cases} \quad (3)$$



$F_1 \min = 3.$

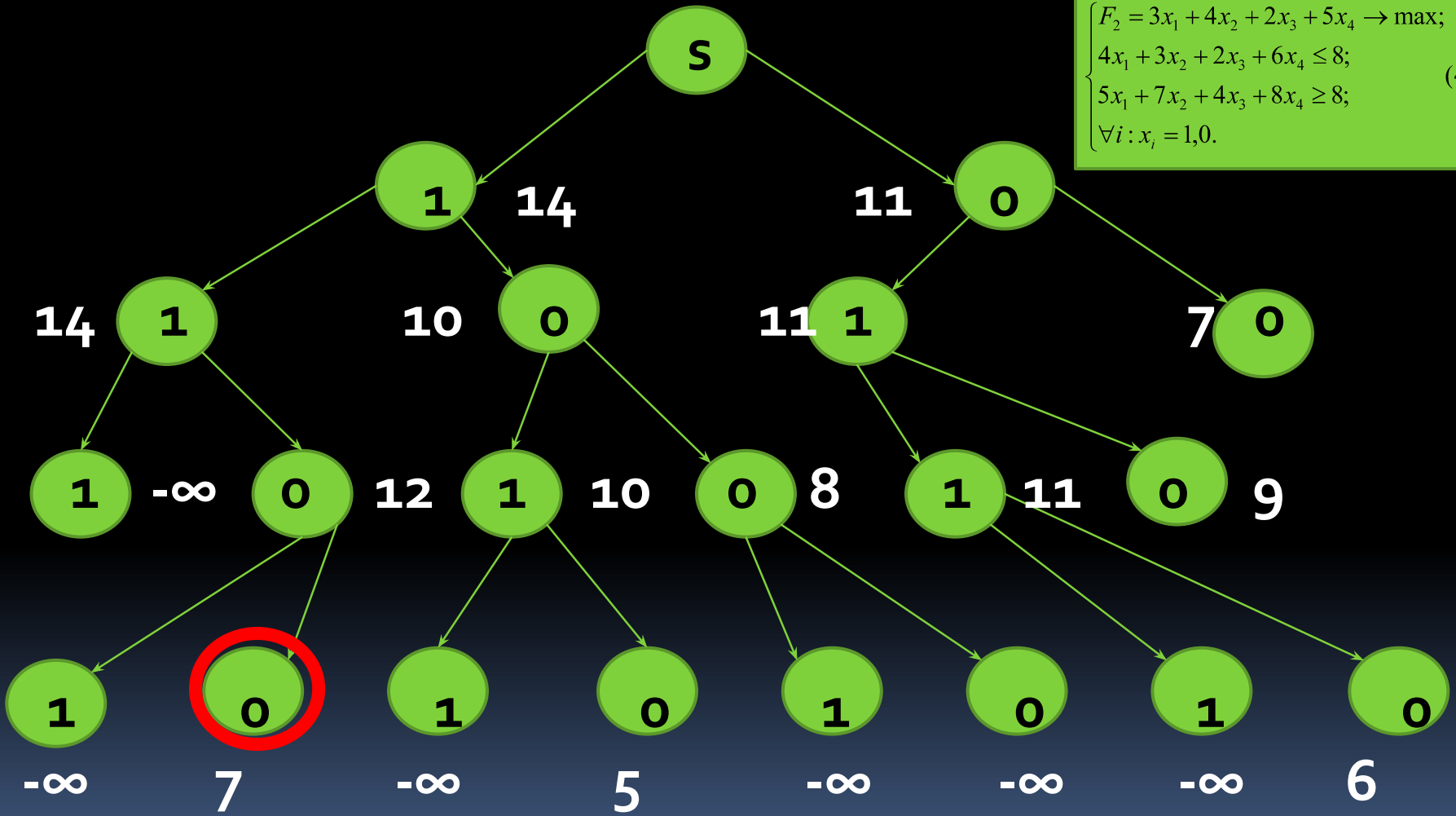
Поиск максимальной величины

F_2

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i: x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Решение задачи (4) методом типа ветвей и границ

$$\begin{cases} F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i: x_i = 1, 0. \end{cases} \quad (4)$$

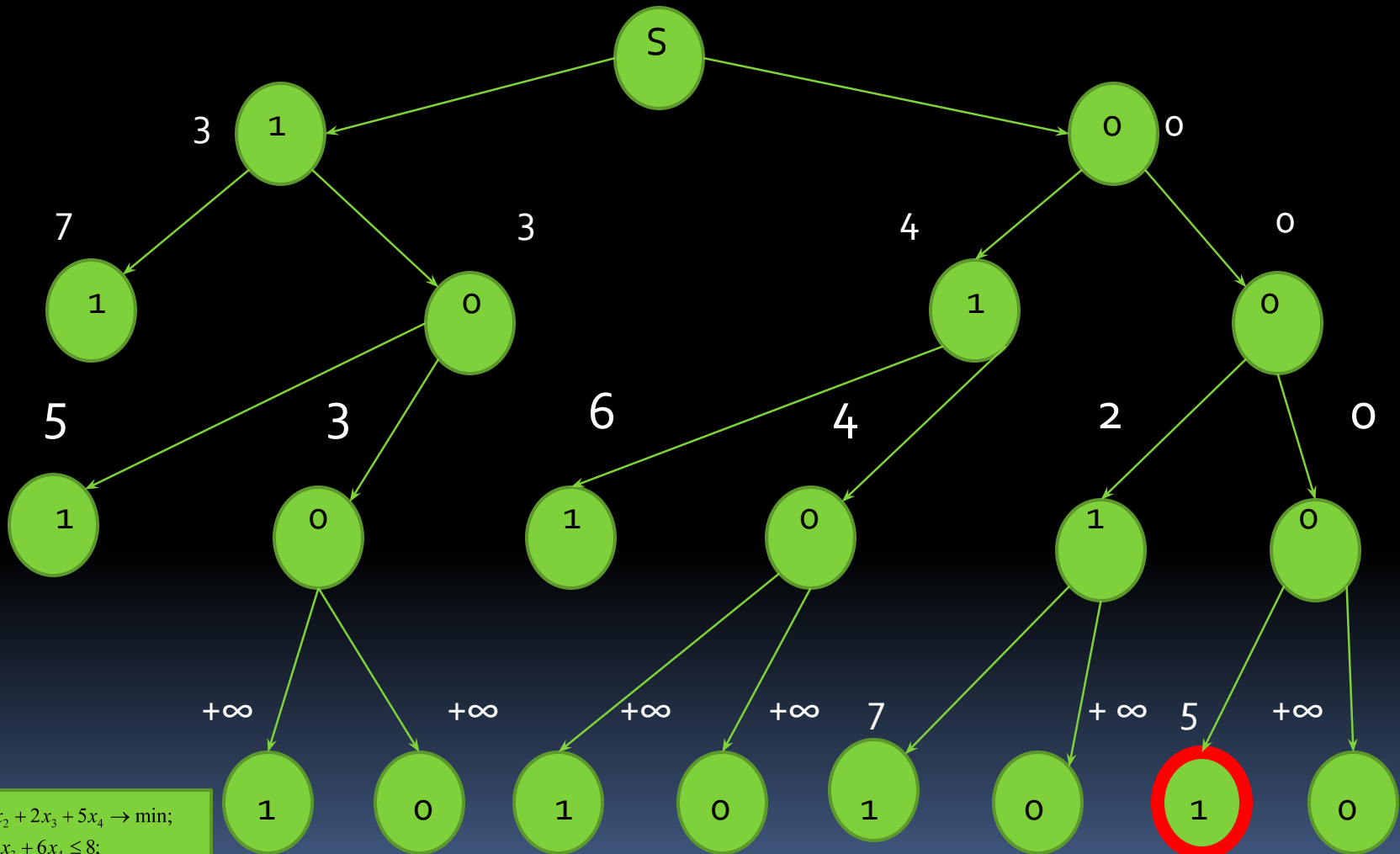


F₂ max = 7

Поиск минимальной величины F_2

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Решение задачи (5) методом типа ветвей и границ



$$\begin{cases}
 F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min; \\
 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\
 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\
 \forall i: x_i = 1, 0.
 \end{cases} \quad (5)$$

$F_2 \min = 5$

Использование эталонов для преобразования(1)
в однокритериальную задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \left(1 - \frac{F_1 - 3}{12 - 3} \right)^2 + \left(0 - \frac{F_2 - 5}{7 - 5} \right)^2 \rightarrow \min; \\ F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4; \\ F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1, 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Вид системы (6) после

преобразования

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \left(\frac{12 - F_1}{9} \right)^2 + \left(\frac{F_2 - 5}{2} \right)^2 \rightarrow \min; \\ F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4; \\ F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (7)$$

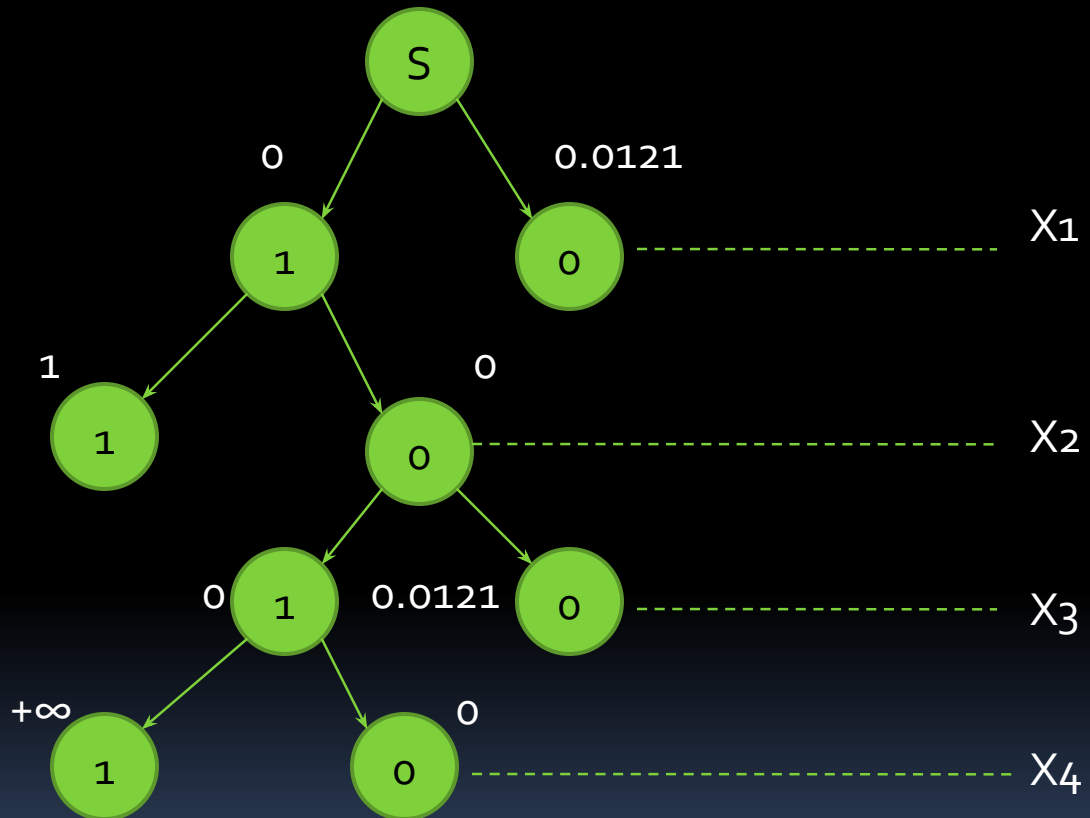
Вычисление оценки

$$\Delta\varphi = \left[\frac{F_{1\max} - \min(F_{1\max}; \Delta F_1)}{F_{1\max} - F_{1\min}} \right]^2 + \left[\frac{F_{2\min} - \max(F_{2\min}; \Delta F_2)}{F_{2\max} - F_{2\min}} \right]^2,$$

где $\Delta\varphi$ – нижняя оценка функции φ ; $\Delta F_1 = \min\{\Delta F_1, F_{1\max}\}$;
 $\Delta F_2 = \max\{\Delta F_2; F_{2\min}\}$.

Дерево ветвлений представлено на следующем слайде.

Решение системы (7)



$$X_{\text{opt}} = \{1, 0.1.0\}; \quad \varphi = 0; \quad F_1 = 12; \quad F_2 = 5.$$

Требования, предъявляемые к отчету

Отчет должен содержать:

1. Содержательную постановку задачи.
2. Использованные обозначения и формальную постановку задачи.
3. Блок-схему алгоритма или его пошаговое описание.
4. Пример, иллюстрирующий работу алгоритма .
5. Экспериментальные графические и аналитические зависимости среднего, максимального и минимального времени счета от числа переменных и от числа целевых функций с указанием параметров использованной ЭВМ и ОС.
6. Инструкции и рекомендации по применению программы.
7. Листинг программы.