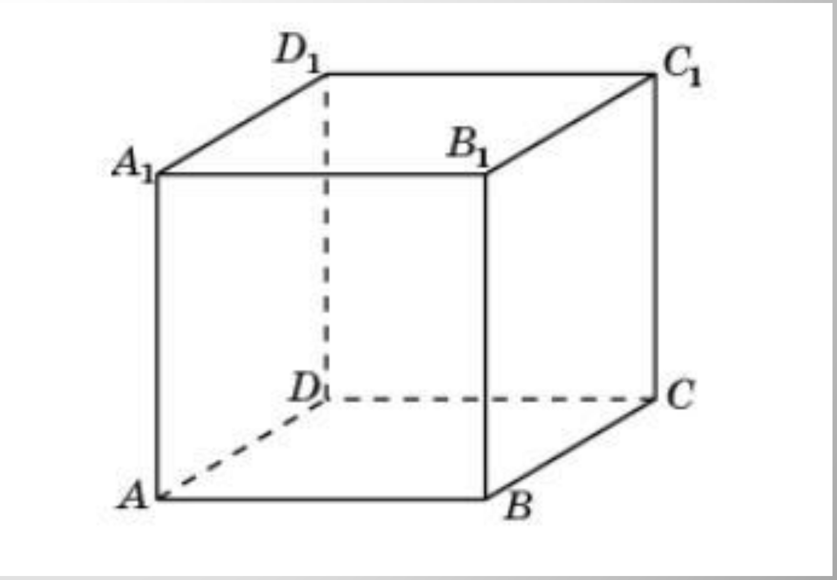
# Решение заданий С2 при подготовке к ЕГЭ 2014 г.

# Применение ортогонального проецирования

$$S\text{сечения} = \frac{S\text{ проекции}}{cos\varphi}$$

# Задача 1. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A \ldots D_1$, проходящее через вершину $D_1$ и середины ребер AB; BC. Найти его $S_{сеч}$.



# Решение:

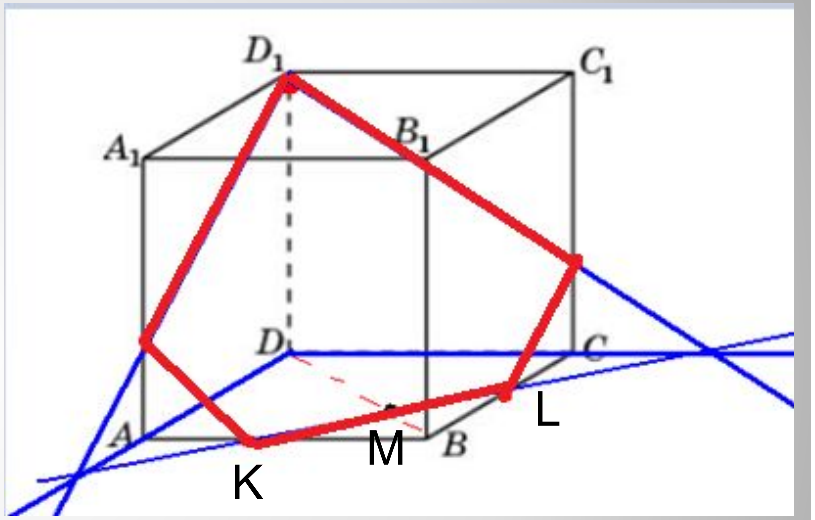
$$S \text{ проекции} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$DM = \frac{3}{4} DB = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$tg\varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\varphi}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{16}{18}}} = \sqrt{\frac{9}{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

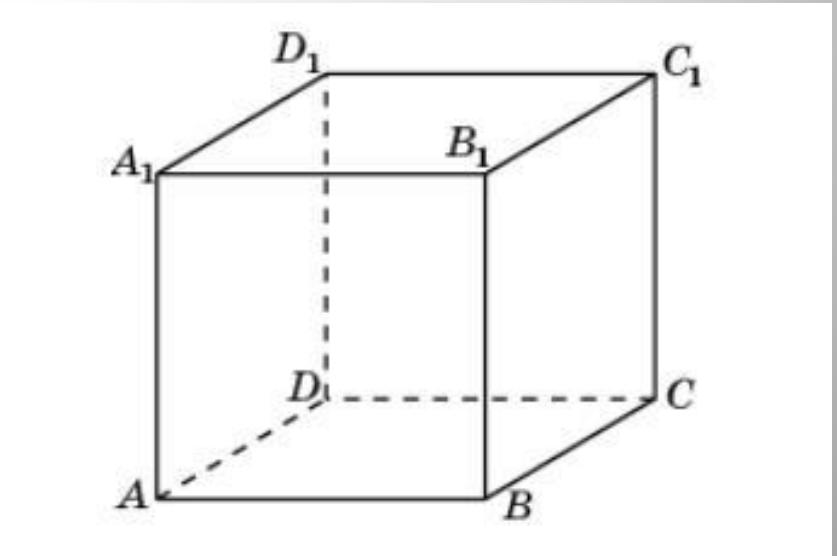
$$S\text{сеч} = \frac{7}{8} : \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$



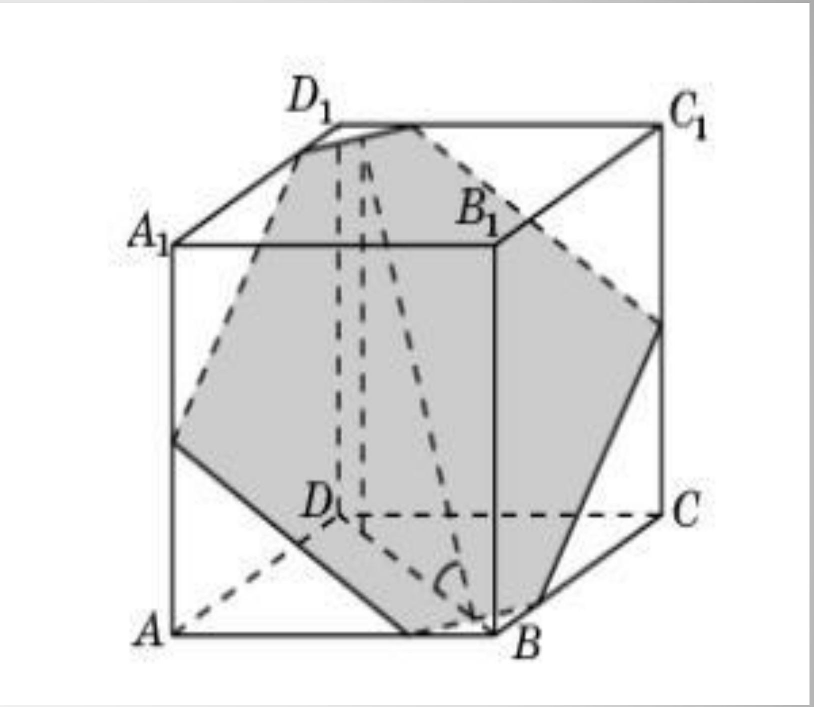

**Ответ:** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$

# Задача 2. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A \ldots D_1$, проходящее через середины ребер $AA_1$, $CC_1$ и точку на ребре $AB$, отстоящую от вершины $A$ на 0,75. Найдите его площадь.

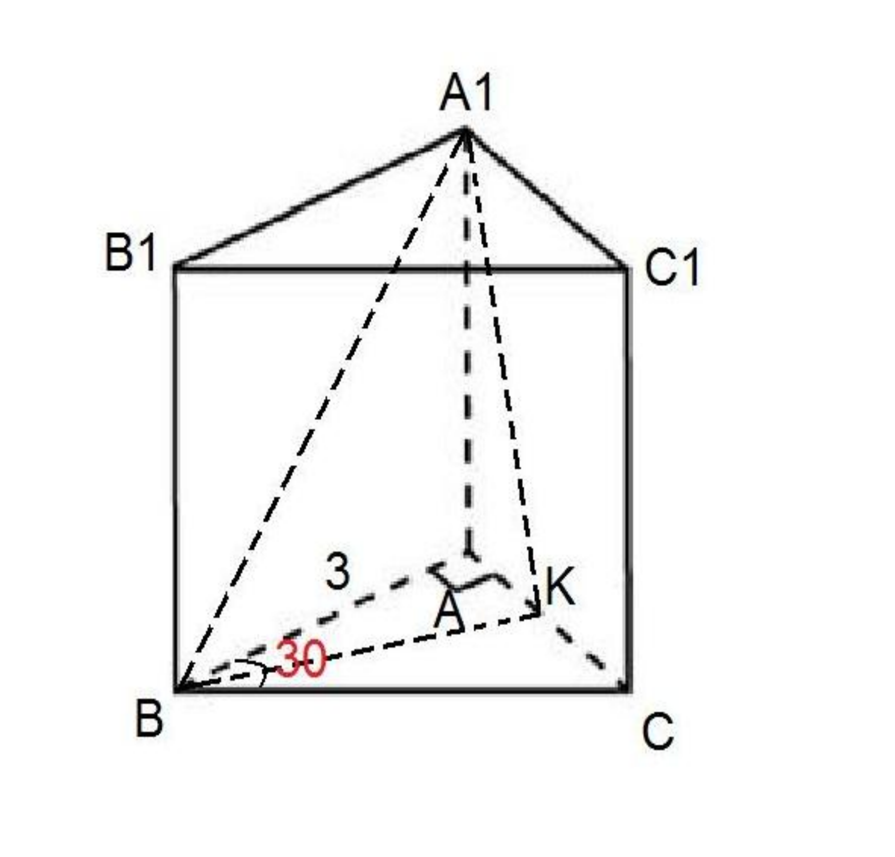


- Искомым сечением будет шестиугольник. Площадь его ортогональной проекции на плоскость ABC равна $\frac{15}{16}$ ,косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью ABC равен $\frac{3}{\sqrt{17}}$. Площадь сечения равна $\frac{5\cdot\sqrt{17}}{16}$ .




**Ответ:** $S_{сеч} = \frac{5\cdot\sqrt{17}}{16}$

# Задача 3. Условие:




- В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ BK-биссектриса основания ABC. Через биссектрису и вершину $A_1$ проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания 60°. Найти $S_{сеч.}$, если AB=3, BC=6, угол ABC=30°.

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}$$

$$S\Delta ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

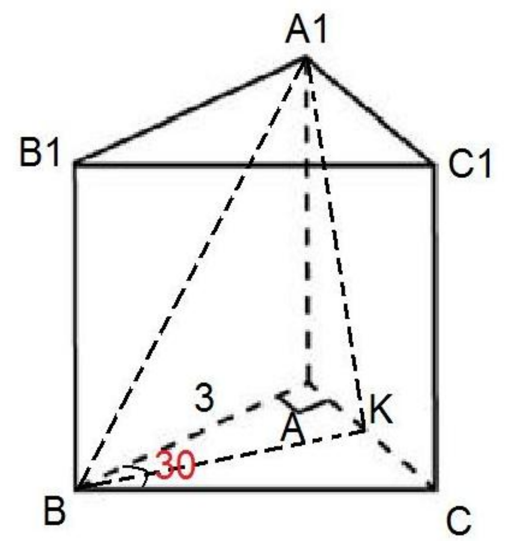
$BK$ – биссектриса, по свойству биссектрис:

$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . AK=t; KC=2t.

$$S\Delta AKB = \frac{1}{3} S\Delta ABC = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_{сеч} = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$$

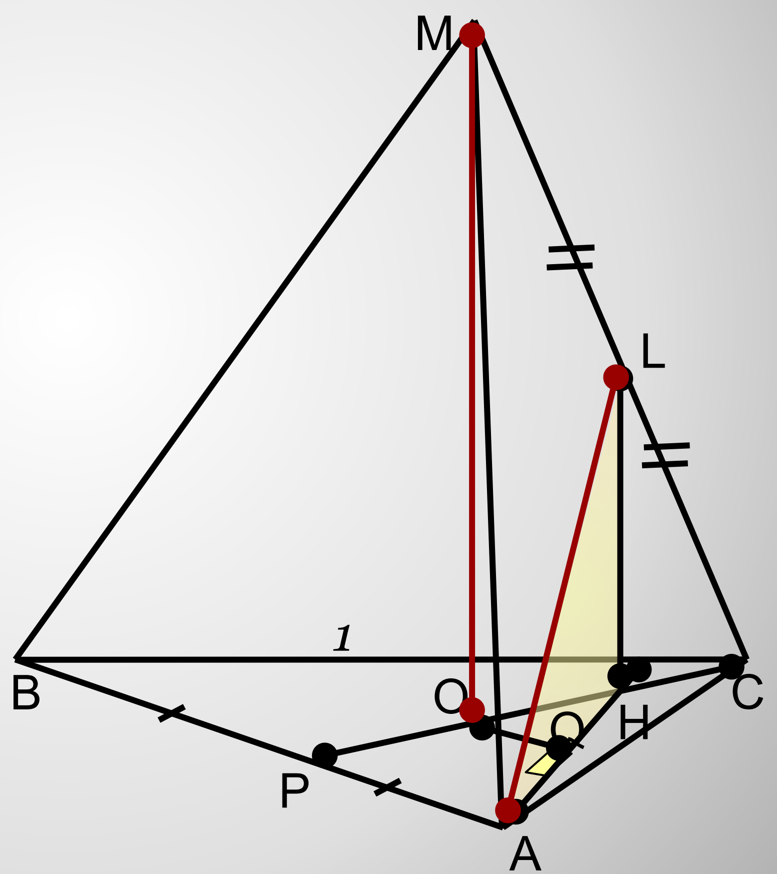
**Ответ: 3.**



- Если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую $a$ в точку A, а прямую b в прямую $b_1$, то расстояние между скрещивающимися прямыми $a$ и b равно расстоянию от A до прямой $b_1$.
- Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.

# Задача 4. Условие:

- Дан правильный тетраэдр MABC с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, если L – середина MC, O – центр грани ABC.



# Решение:

1. LH ⊥ (ABC), H ∈ CO

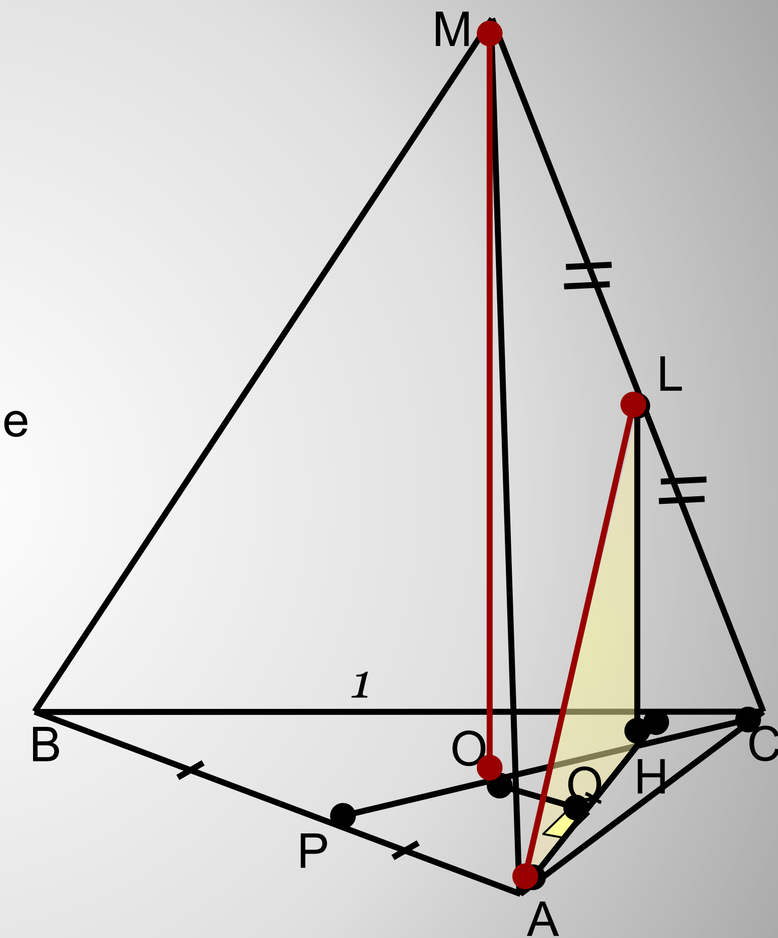
2. CH = HO.

3. Точка O и прямая AH – ортогональные проекции соответственно прямых MO и AL на (ABC).

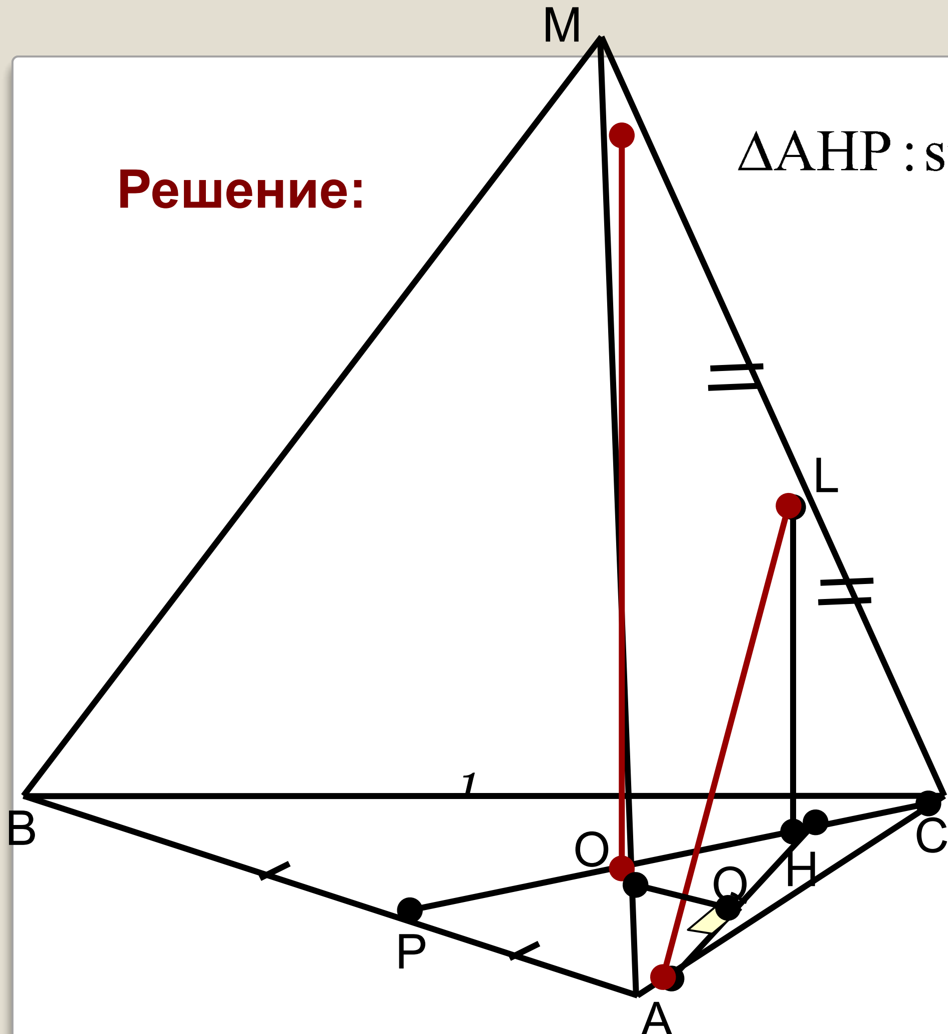
Расстояние между скрещивающимися прямыми MO и AL равно расстоянию от точки O до прямой AH.

4. OQ ⊥ AH, OQ- искомое расстояние.

5. Вычислим OQ.



**Решение:**




$$\Delta AHP : \sin \angle AHP = \frac{AP}{AH} = \frac{AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}.$$

$$OH = \frac{1}{3} CP$$

$$PH = \frac{2}{3} CP$$

$$CP = AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$OQ = \frac{OH \cdot AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}$$

$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

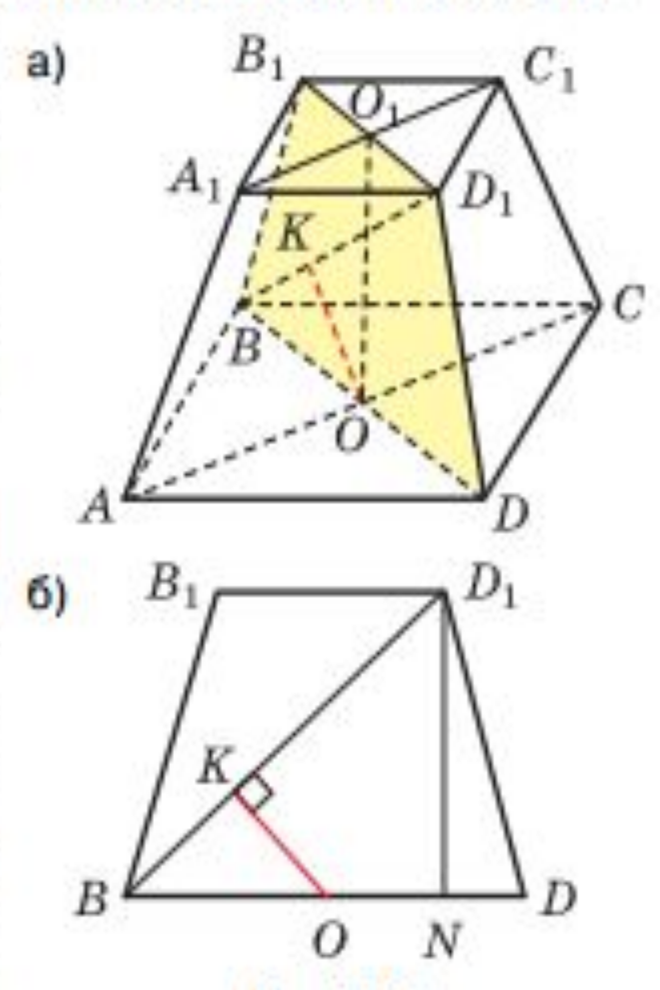
$$PH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta OQH : \sin \angle OHQ = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OQ = OH \cdot \sin \angle OQH \qquad OQ = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

**Ответ:** $\frac{\sqrt{7}}{14}$ .

# Задача 5. Условие:

В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $A \ldots D_1$ со сторонами оснований $a$ и $b$ ($a>b$) и высотой $h$ найти расстояние между диагональю $BD_1$ и диагональю большего основания $AC$.



$$D_1N = h,$$

$$BN = BD - ND = a\sqrt{2} - \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2},$$

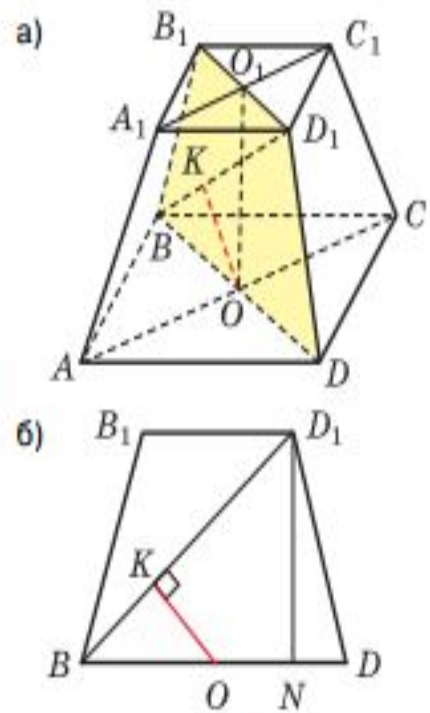
$$BD_1 = \sqrt{D_1N^2 + BN^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}}.$$

В треугольнике $BKO$

$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

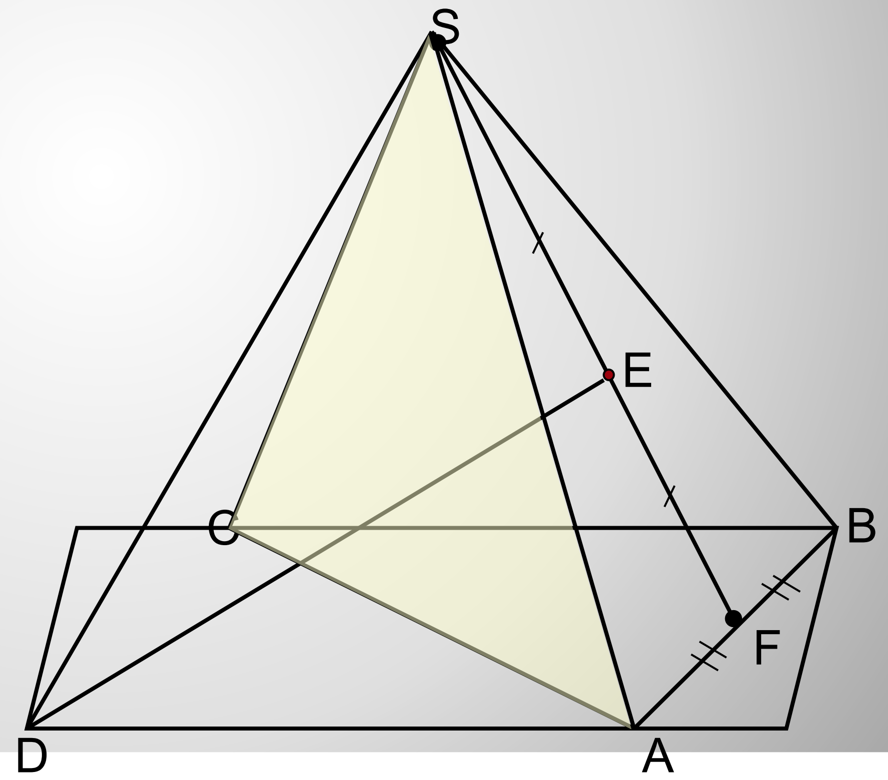
Тогда $\dfrac{OK}{D_1N} = \dfrac{BO}{BD_1}$ и $OK = \dfrac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$.

*Ответ*: $\dfrac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$.



- В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1. Найдите угол между прямой DE, где E - середина апофемы SF грани ASB, и плоскостью ASC.

# Задача 6. Условие:



Введем прямоугольную систему координат.

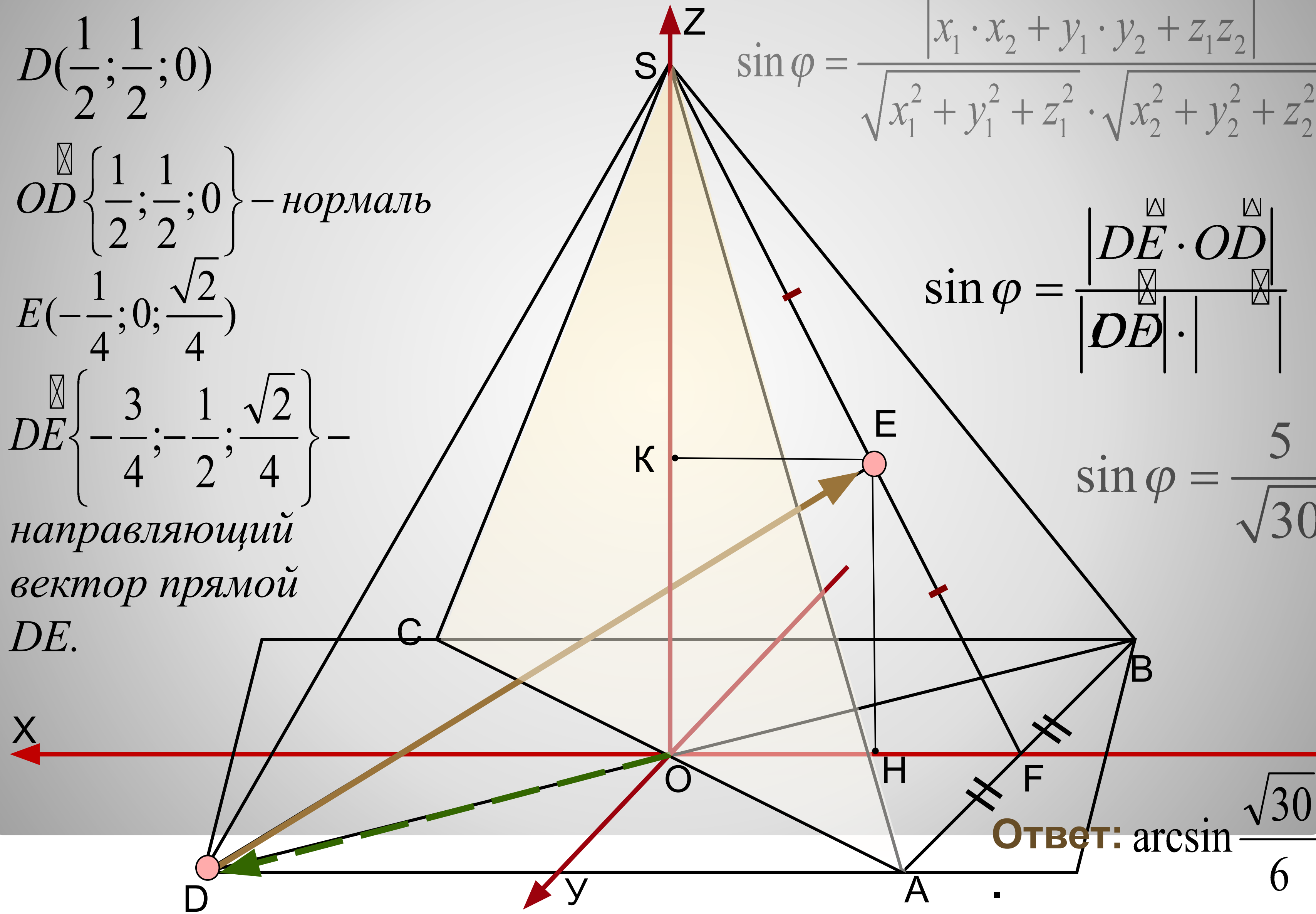
$$D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$\vec{OD}\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\} - \textit{нормаль}$$

$$E\left(-\frac{1}{4};0;\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\vec{DE}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} -$$

*направляющий вектор прямой DE.*



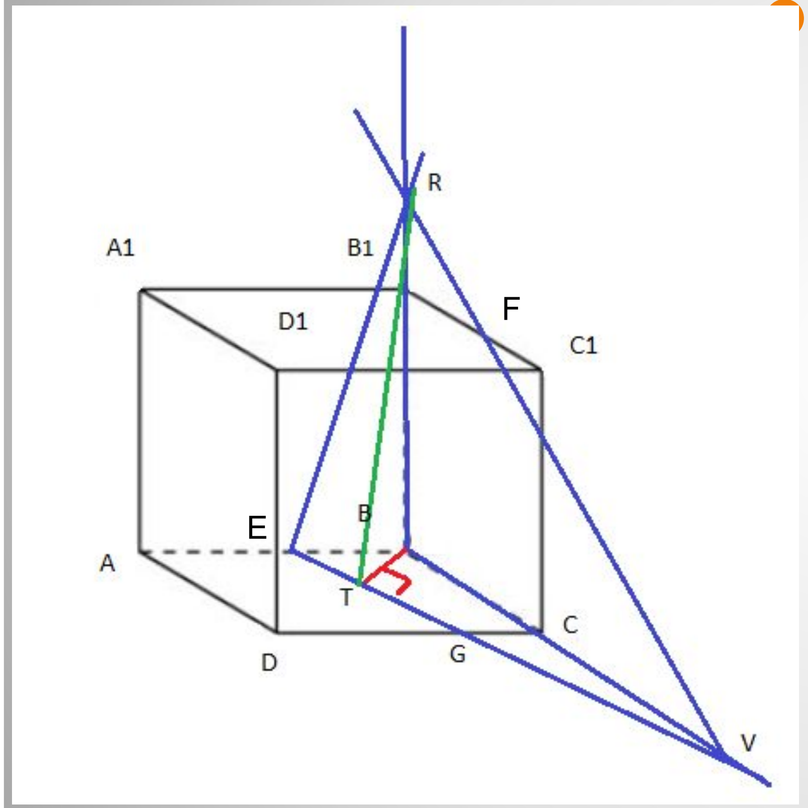

$$\sin\varphi = \frac{|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{DE}\cdot\vec{OD}|}{|\vec{DE}|\cdot|\vec{OD}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

**Ответ:** $\arcsin\frac{\sqrt{30}}{6}$

# Задача 7. Условие:




- В основании прямой призмы ABCDA1B1C1D1 лежит ABCD со стороной √21 и углом A, равным 60°. На ребрах AB, B1C1 и DC взяты соответственно точки E, F и G так, что AE=EB, B1F=FC1 и DG=3GC. Найти косинус угла между плоскостями EFG, если высота призмы равна 4,5.

# 1 способ решения:

- $$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$ $$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$ $$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\varphi}$$

# Решение 2 (угол между прямой и плоскостью)

- F ⊥ (ABC)
  $F_1$-ортогональная проекция точки F на плоскость и основание
  $BF_1=F_1C$, $FF_1 \parallel BB_1$
- $G_1$-точка пересесечения прямых EG и BC. Треугольник $EF_1G_1$, лежащий в плоскости ABC,- ортогональная проекция треугольника $EF_1G_1$, лежащего в плоскости EFG
- Из подобия треугольников $EBG_1$ и $GCG_1$=> $EB \parallel GC$, $CG_1=BC$, т.к. $GC=\frac{1}{4}DC=\frac{1}{2}EB$
- По теореме косинусов для треугольника

$EBF_1$: $EF_1$^2=EB^2+BF^2-2*EB*$BF_1$*cos120°=63/4

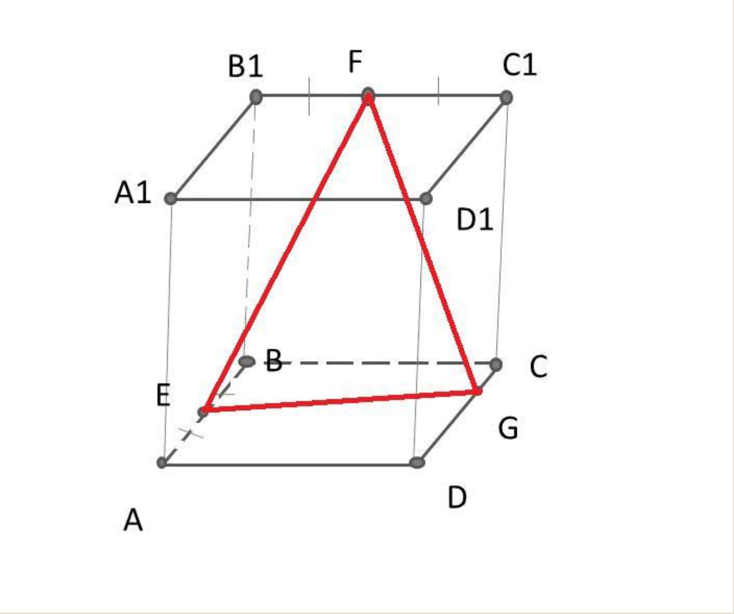
- EF=(3√7)/2
- Из прямоугольных треугольников $EFF_1$

и $F_1FG_1$: EF^2=$EF_1$^2+$F_1F$^2 =36

EF=6

$FG_1$^2=F1G1^2+F1F^2=270/4

$FG_1$=(3√30)/2



- По теореме косинусов для треугольника $EBG_1$:

$EG_1\text{^}2=EB\text{^}2+BG\text{^}2-2*EB*BG_1*\cos120°=441/4$

$EG_1=21/2$

- Используя теорему косинусов для треугольника $EFG_1$:

$\cos\angle EFG_1=(EF\text{^}2+FG_1\text{^}2-EG_1\text{^}2)/(2*EF*FG_1)=-3/(8\sqrt{30})$

$\sin\angle EFG_1=\sqrt{}(1-(-3/(8\sqrt{30})\text{^}2=\sqrt{637}/(8\sqrt{10})$

- Находим площадь треугольника $EFG_1$

$S_{EFG1}=½*EF*FG1*\sin\angle EFG_1=((9\sqrt{3})/16)*\sqrt{637}$

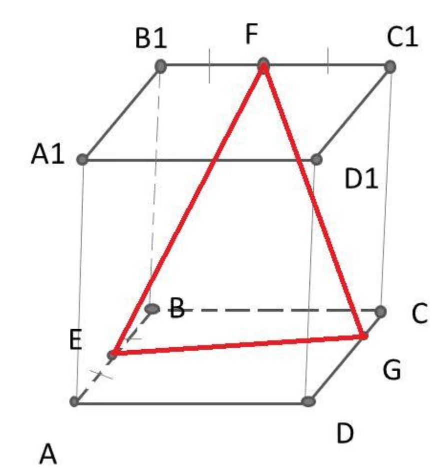
- Находим площадь треугольника $EF_1G_1$:

$S_{EF1G1}=½*EF_1*F_1G_1*\sin150\ °=(63\sqrt{3})/16$

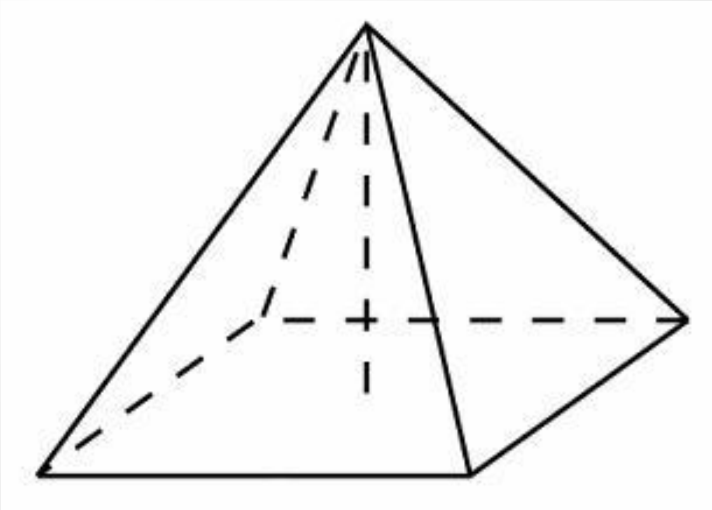
- Находим косинус угла Y между плоскостями $EFG_1$ и ABC по формуле:

$\cos Y= S_{EF_1G_1}/S_{EFG_1}=1/\sqrt{13}$

**Ответ:1/√13**



- Дана правильная четырехугольная пирамида MABCD, стороны основания которой равны 7. Угол между прямыми DM и AL, L-середина ребра MB, равен 60°. Найдите высоту пирамиды.



# Задача 8

- AB=BC=CD=AD=7
- DM и AL скрещивающиеся прямые
- DM||OL в плоскости DMB
- OL||MD, так как OL-средняя линия треугольника BMD (по построению)
- ∟ALO=60°
- Докажем, что треугольник AOL- прямоугольный

(AC ⊥BD, AC ⊥OM, тогда => AC ⊥(BMD)

AC ⊥ любой прямой, лежащей в этой плоскости, т.е.

AC⊥OL, треугольник AOL-прямоугольный, ∟AOL=90°, ∟LAD=30°

- tg∟LAO=OL/OA=tg30 ° =√3/3
- OL/((7*√2)/2)= √3/3

OL=((7√2)/2)* (√3/3)=(7√6)/6

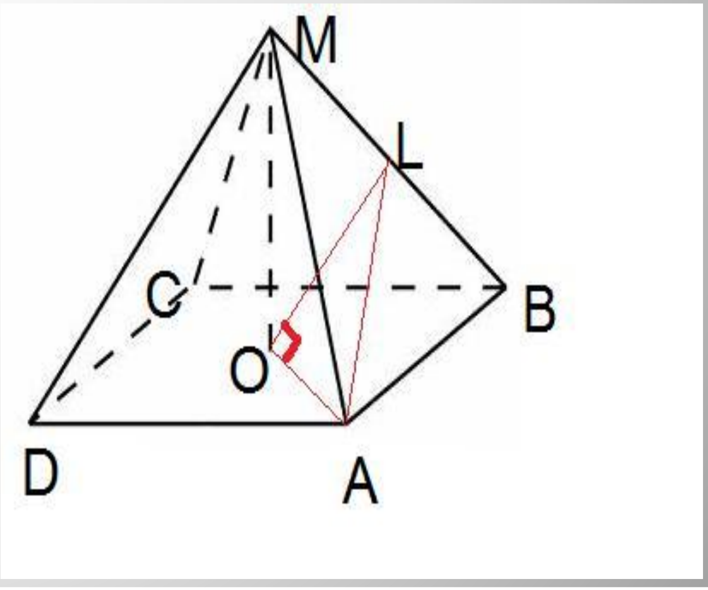
- DM=2OL

DM=2*((7√6)/6)=(7√6)/3

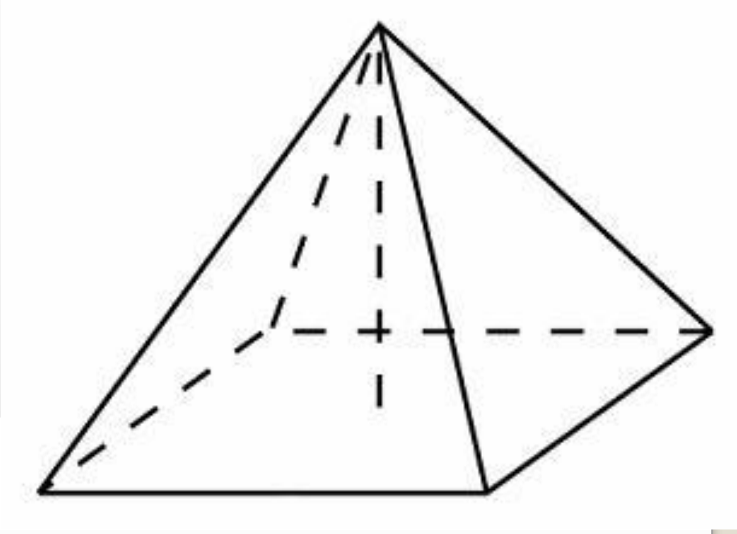
- Треугольник OMD: OM=√(DM^2-OD^2)=

=(7√6)/6

**Ответ: (7√6)/6**

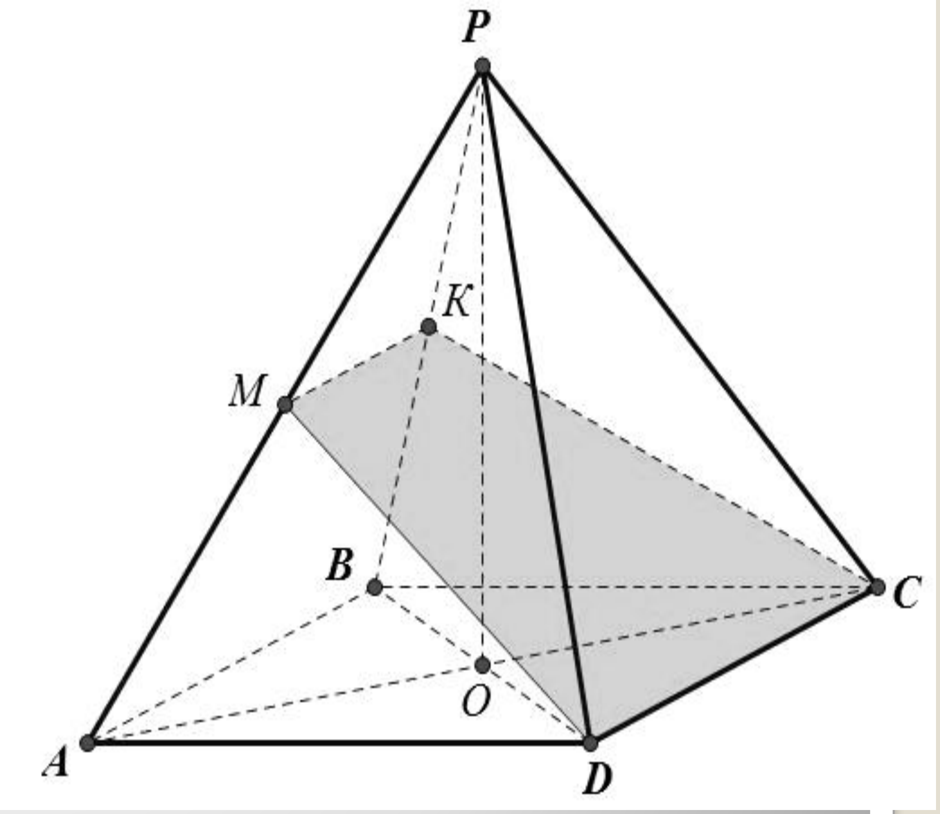


- В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с основанием $ABCD$ точка $M$ - середина ребра $PA$, точка $K$ - середина ребра $PB$.
Найдите расстояние от вершины $A$ до плоскости $CMK$, если $PC = 6$, $AB = 4$.

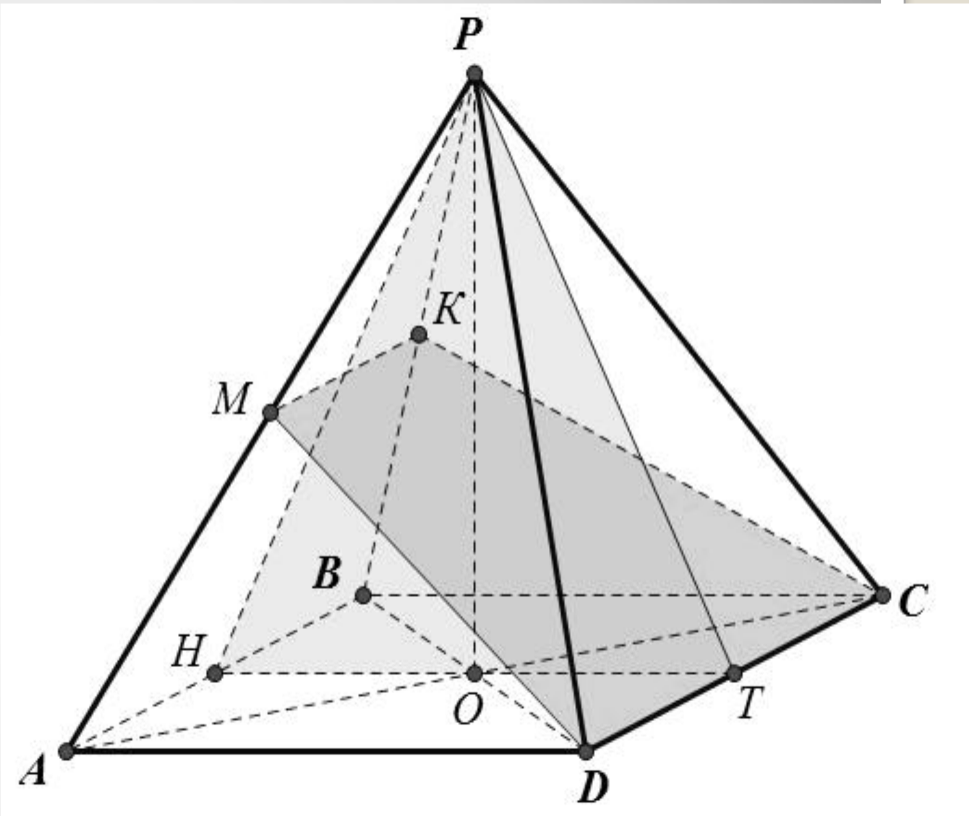


# Задача 9

- МК - средняя линия треугольника АРВ
- МК || АВ=> *АВ* плоскости || сечения (по признаку параллельности прямой и плоскости)
- Расстояние L от точки *А* до сечения равно расстоянию от прямой *АВ* до сечения, L равно расстоянию от любой точки прямой *АВ* до сечения.

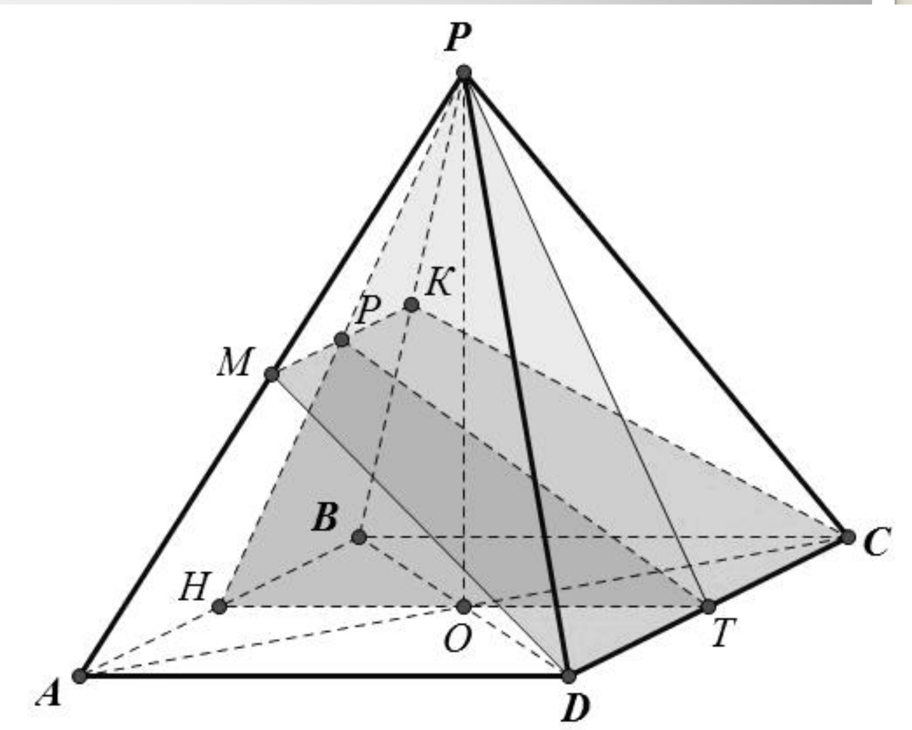


- AH = HB
- DMKC симметрична относительно HPT
- DT=TC
- Плоскость симметрии перпендикулярна плоскости сечения. Плоскость сечения проходит через прямую *DC*, которая перпендикулярна плоскости симметрии *HPT*
- Плоскость симметрии перпендикулярна сечению и они пересекаются по прямой *PT*.

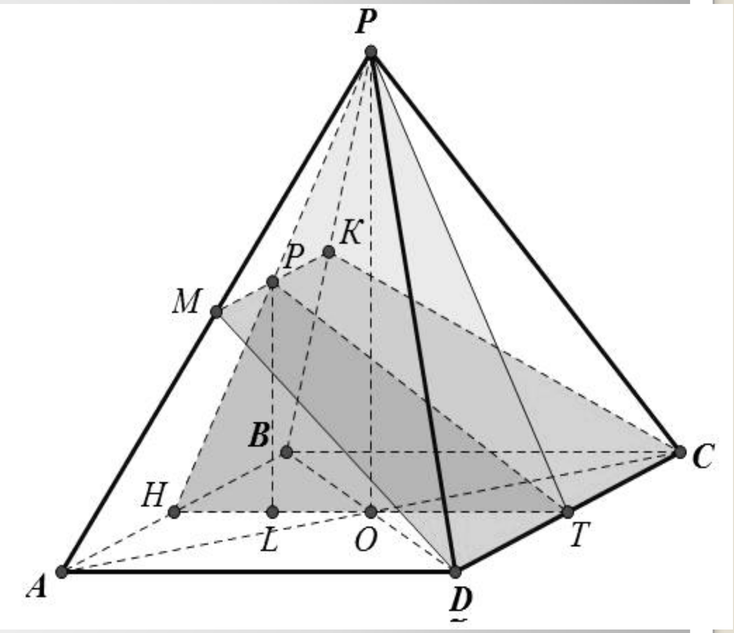


- По свойству перпендикулярных плоскостей перпендикуляр, опущенный из т. Н на сечение, попадает точно на прямую *PT*, то есть найти нам надо длину именно этого перпендикуляра. Найдем высоту треугольника *HPT*, проведённой к стороне *PT*.
- X- искомое расстояние.

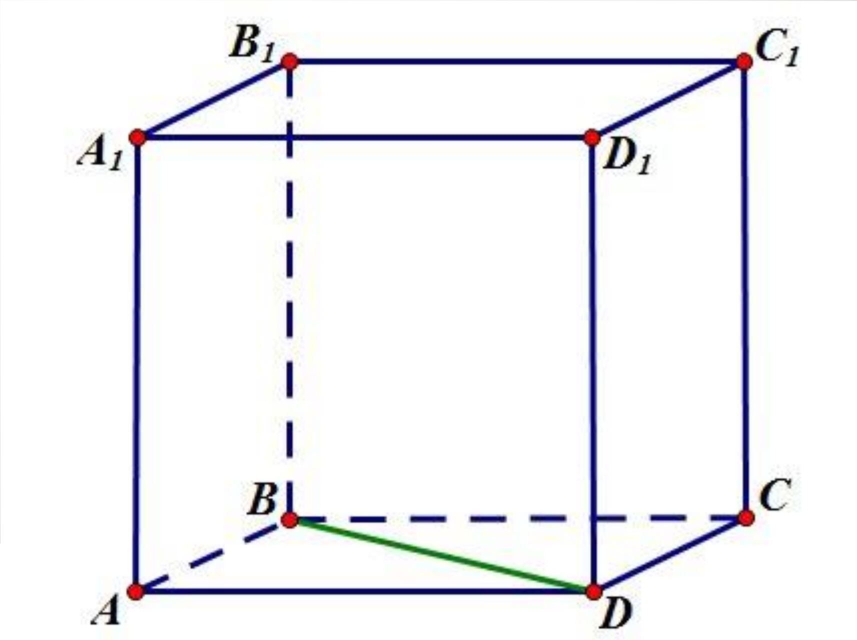
Найдем через S:
S=½*HT*PL*x



- X- искомое расстояние.
  Найдем через S: S=(1/2)*HT*PL*x
- 1) $PL = 0{,}5 \cdot PO$, т.к. $PL$ - ср. линия треугольника $HPO$. Найдём высоту пирамиды. В прямоугольном треугольнике $POC$: $PC = 6$ и $OC = 0{,}5 \cdot AC = 0{,}5 \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
По теореме Пифагора находим
$PO = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Значит, $PL = \sqrt{7}$.
- 2) $HT = BC = AB = 4$. $HL = 0{,}5 \cdot HO = 0{,}5 \cdot 2 = 1$,
$LT = HT - HL = 4 - 1 = 3$.
- 3) $PT$ найдём по теореме Пифагора из треугольника $PLT$: $PT = \sqrt{9 + 7} = 4$.
- Теперь можно искать высоту $x$, проведённую к стороне $PT$ треугольника $PTL$:
  $HT \cdot PL = PT \cdot x$
  $4 \cdot \sqrt{7} = 4 \cdot x$
  $x = \sqrt{7}$
  **Ответ: √7**



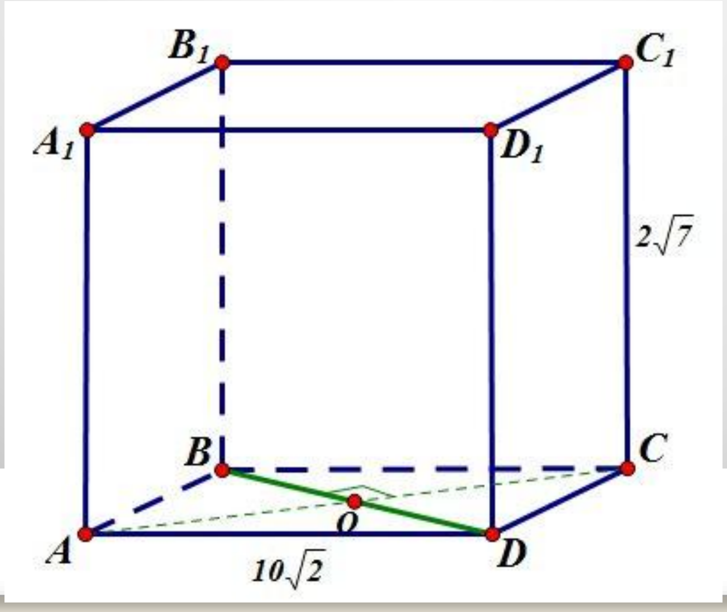
- В прямоугольном параллелепипеде A…$D_1$, AB=BC=10√2, AA1=2√7. Сечение параллелепипеда проходит через точки B и D и образует с плоскостью ABC угол $\alpha = arctg\frac{\sqrt{7}}{3}$. Найдите площадь сечения.




## Задача 10

- Сначала нам нужно построить это сечение.

  Очевидно, что отрезок  принадлежит плоскости сечения и плоскости основания, то есть принадлежит линии пересечения плоскостей.
- Угол между двумя плоскостями – это угол между двумя перпендикулярами, которые проведены к линии пересечения плоскостей и лежат в этих плоскостях.
- BD ⊥ AC. Пусть точка  – точка пересечения диагоналей основания.  – перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, который лежит в плоскости основания:



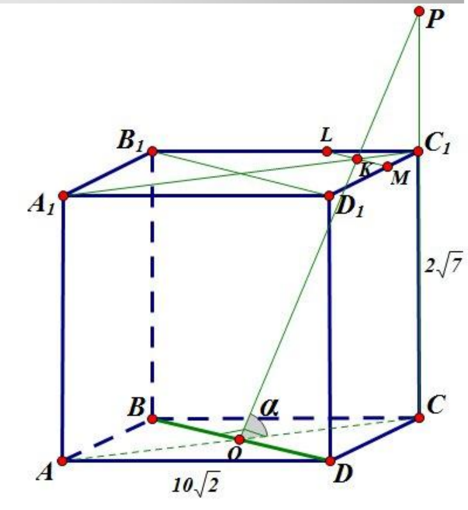
- Определим положение перпендикуляра, который лежит в плоскости сечения. (Помним, что если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной. Ищем наклонную по ее проекции (OC) и углу между проекцией и наклонной). Найдем тангенс угла $COC_1$ между $OC_1$ и $OC$ :

$$tgCOC_1 = \frac{C_1C}{OC}$$

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2}}{2} = 10$$

$$tgCOC_1 = \frac{2\sqrt{7}}{10} = \frac{\sqrt{7}}{5} < \frac{\sqrt{7}}{3}$$ =>

$$\alpha = arctg\frac{\sqrt{7}}{3}$$



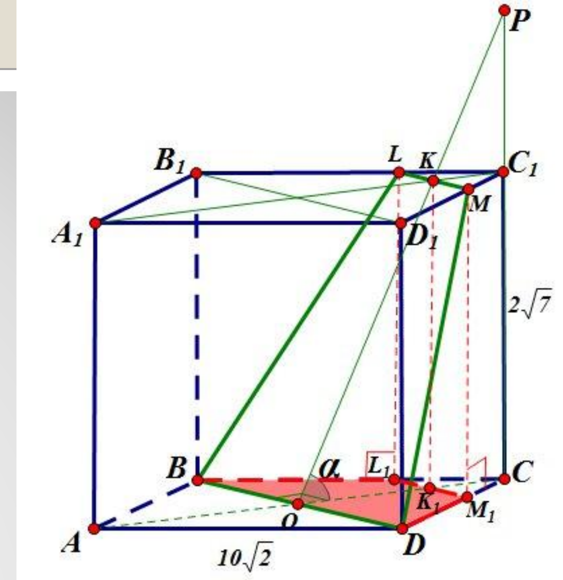

между плоскостью сечения и плоскостью основания больше, чем между $OC_1$ и $OC$. То есть сечение расположено как-то так:

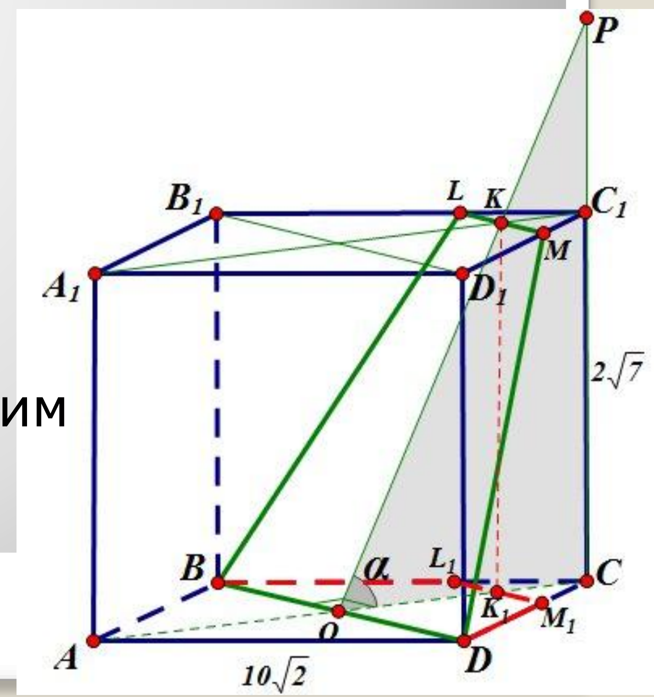
$$CP = OCtg\alpha = \frac{10\times\sqrt{7}}{3} = \frac{10}{3}\sqrt{7}$$

K- точка пересечение OP и $A_1C_1$. LM ll $B_1D_1$.

- Найдем проекцию сечения BLMD на плоскость
основания. Для этого найдем проекции точек L и M.
- Четырехугольник $BL_1M_1D$– проекция сечения BLMD
на плоскость основания.
- Найдем площадь четырехугольника $BL_1M_1D$. Для этого
из площади треугольника BCD вычтем площадь
треугольника $L_1CM_1$
- Найдем площадь треугольника $L_1CM_1$.
Треугольник $L_1CM_1$ подобен треугольнику BCD. Найдем
коэффициент подобия. Для этого рассмотрим
треугольники OPC и $OKK_1$:

$$\frac{OK_1}{OC}=\frac{KK_1}{PC}=\frac{CC_1}{PC}=\frac{2\sqrt{7}}{\frac{10\sqrt{7}}{3}}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{K_1C}{OC}=\frac{2}{5}$$



- $S_{L_1CM_1}$ равен $\frac{4}{25}$ $S_{BCD}$ (отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия).

- Тогда площадь четырехугольника $BL_1M_1D$ равна площади треугольника BCD и равна:

$$1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$$

$$S_{BL_1M_1D}=\frac{21}{25}\times\frac{10\sqrt{2}\times10\sqrt{2}}{2}=84$$

- Найдем $\cos\alpha$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}}=\frac{3}{4}$$

- 

$$S_{BLMD}=S_{BL_1M_1D}:\cos\alpha=84:\frac{3}{4}=112$$

**Ответ: 112**