7 способов решения тригонометрического уравнения

$$\sin x - \cos x = 1$$

или еще раз о

красоте математики.

Проблема красоты привлекала и привлекает величайшие умы человечества.

Математики видят ее в:

- гармонии чисел и форм,
- геометрической выразительности,
- стройности математических формул,
- решении задач различными способами,
- изяществе математических доказательств,
- порядке,
- богатстве приложений универсальных математических методов.

Но красота математики выражается не только в красоте форм ,наглядной выразительности математических объектов, восприятие которых сопряжено с наименьшими усилиями.

Ее привлекательность будет усиливаться за счет эмоционально-экспрессивной составляющей -

- **оригинальности,**
- **неожиданности,**
- **изящества.**

Математики живут ради тех славных моментов,

когда проблема оказывается решенной,

ради моментов

озарения, инсайта, восторга

Можно ли насладиться решением уравнения sinx-cosx=1?
Да, если стать его исследователем!

способы решения уравнения sinx-cosx=1 и , поверьте, красота математики станет вам доступной!

Универсальные методы решения уравнения sin x – cos x=1

- Мы уже говорили о богатстве приложений универсальных математических методов. При решении уравнений одним из них является метод разложения на множители.
- Можно ли применить его к решению уравнения
- Sin x –cos x = 1?
- *На первый взгляд, кажется что нет…*

А если использовать специфические тригонометрические преобразования?

Рассуждаем

Преобразуем исходное уравнение

$$\sin x - \cos x = 1$$

к виду

$$\sin x - (1 + \cos x) = 0.$$

Мы не просто в правой части уравнения получили ноль,мы выделили выражение $1 + \cos x$ …

Как вы думаете зачем

Ну, конечно,вы догадались !

Необходимо перейти к половинному аргументу, применив формулу повышения степени

$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

и формулу двойного аргумента

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Итак…

1-й способ

Разложение левой части уравнения на множители

sinx-cosx=1

$$\sin x-(1+\cos x)=0;$$

$$т.к.\,1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2},\,а\,\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0;$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

Произведение равное нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла, поэтому

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0;\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0;\end{array}\right.$$

$$\cos\frac{x}{2}=0;\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k;x=\pi+2\pi k;k\in Z;$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0-$$

однородное уравнение первой степени.

Делим обе его части на

$$\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\neq 0, т.к., если \cos\frac{x}{2}=0, то \sin\frac{x}{2}-0=0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2}=0,\right.$$

что противоречит тождеству $\left.\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1\right)$

Получим $tg\frac{x}{2}-1=0; tg\frac{x}{2}=1; \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n;$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n; n\in Z.$$

Ответ:

$$x=\pi+2\pi k; k\in Z или x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

А может вы заметили, что левая часть уравнения sin x – cos x является однородным выражением

первой степени   относительно sin x и cos x и тут же огорчились,поняв ,что само уравнение не является однородным (в правой части – не ноль) ?

Не огорчайтесь. Немного математической магии…

и по волшебству

неоднородное уравнение первой степени превращается (вот здорово!) в однородное уравнение второй степени относительно sin x и cos x .Конечно ,вы разгадали этот фокус.

Трах-тибидох…

2-й способ

Приведение уравнения к однородному относительно синуса и косинуса

sinx-cosx=1

Разложим левую часть по формулам двойного аргумента, а правую часть заменим тригонометрической единицей:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2};$$

$$2\sin x\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0;$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

И так далее, как в предыдущем способе …

Тригонометрия удивительна тем ,что она даёт собственные оригинальные способы преобразования разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\frac{\sin x - y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2};$$

Но увы, в левой части уравнения, мы видим разноименные функции. Как изменить название функции на «кофункцию» ?

Есть изящный способ!!!

Вы уже догадались?

Нет? А всего лишь нужно применить формулу приведения!

3-й способ.

Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.

sinx-cosx=1

Запишем уравнение в виде:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

Применяя формулу разности двух синусов, получим

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\frac{\pi}{4} = 1$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Другим универсальным методом решения уравнений является замена переменной. И хотя для данного уравнения этот способ не самый простой,но он применим , причем в двух вариантах!

В первом случае используется основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

А во втором – универсальная подстановка.

4-й способ

Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций

sinx-cosx=1

Так как
$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1, mo$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x},$$

$$\sin - \cos x = 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1-\cos^2 x} - \cos x = 1,$$

$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 + \cos x.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат

$$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x,$$

$$2\cos^2 + 2\cos x = 0,$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x + 1 = 0; \end{array}\right.$$

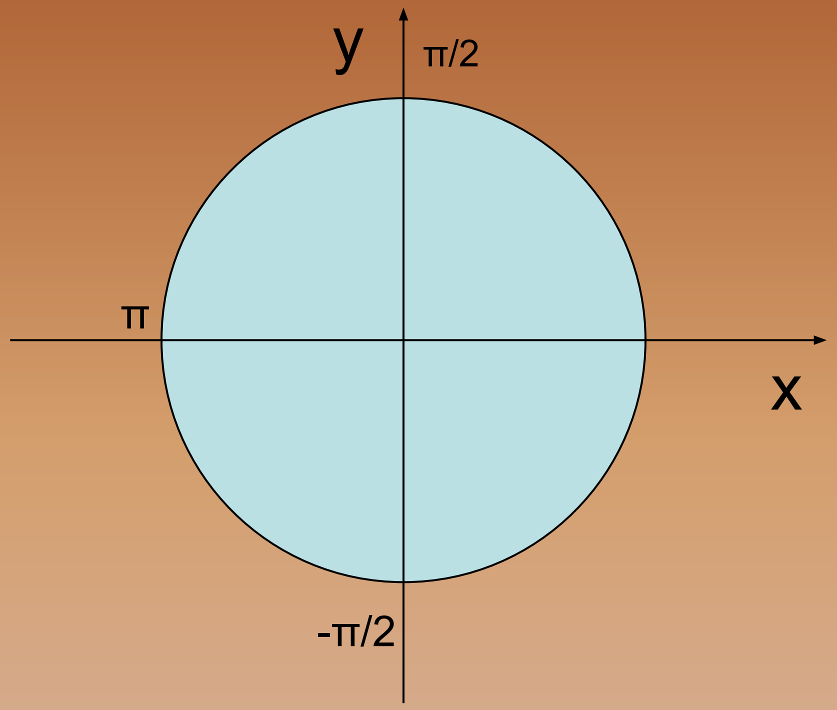
$$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$\cos x + 1 = 0; \cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

В процессе решения обе части уравнения возводились в квадрат, что могло привести к появлению посторонних решений, поэтому необходима (обязательна!) проверка. Выполним ее.

Полученные решения эквивалентны объединению трех решений:

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ &x = \pi + 2\pi n, \\ &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m. \end{aligned}\right.$$



Первое и второе решения совпадают с ранее полученными, поэтому не являются посторонними.

Проверим

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z.$$

Левая часть:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) =$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1.$$

Правая часть:1.

Следовательно, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z - \textit{постороннее}$

решение.

Ответ :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \textit{или} x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

5-й способ

Выражение всех функций через tgx (универсальная подстановка) по формулам:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}.$$

С учетом приведенных формул уравнение

sinx-cosx=1

запишем в виде

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1.$$

Умножим обе части уравнения на

$$1+tg^2\frac{x}{2}$$

$$\left(1+tg^2\frac{x}{2}\neq 0, т.к. tg^2\frac{x}{2}\geq 0\right)$$

$$2tg\frac{x}{2}-1+tg^2\frac{x}{2}=1+tg^2\frac{x}{2};$$

$$2tg\frac{x}{2}=2; tg\frac{x}{2}=1;$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n; x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

ОДЗ первоначального уравнения – все множество R.

При переходе к $tg\frac{x}{2}$

из рассмотрения выпали значения, при которых $tg\frac{x}{2}$

не имеет смысла, т.е.

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, или x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$$

Следует проверить, не является ли x=π+2πk решением данного уравнения.

Левая часть:

*sin(*π+2πk)-cos(π+2πk)=sinπ-cosπ=0-(-1)=1.

Правая часть: 1.

Значит, x=π+2πk, k€Z – решение уравнения.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$или x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$$

На ряду с универсальными методами решения уравнений, есть и специфические. Наиболее ярким из них является ***метод введения вспомогательного угла*** (числа).

Благодаря этому приёму исходное уравнение легко сводится ***к простейшему*** –

просто и красиво!

Последний метод, предлагаемый нами, связан также с нестандартным преобразованием тригонометрического уравнения – возведением обеих частей в квадрат.

И хотя он является коварным в плане приобретения посторонних корней, но подкупает своим оригинальным способом сведения исходного уравнения **к простейшему!**

6-й способ

Введение вспомогательного угла (числа)

sinx-cosx=1

В левой части вынесем за скобку (корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при sinx и cosx). Получим

$\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1;$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

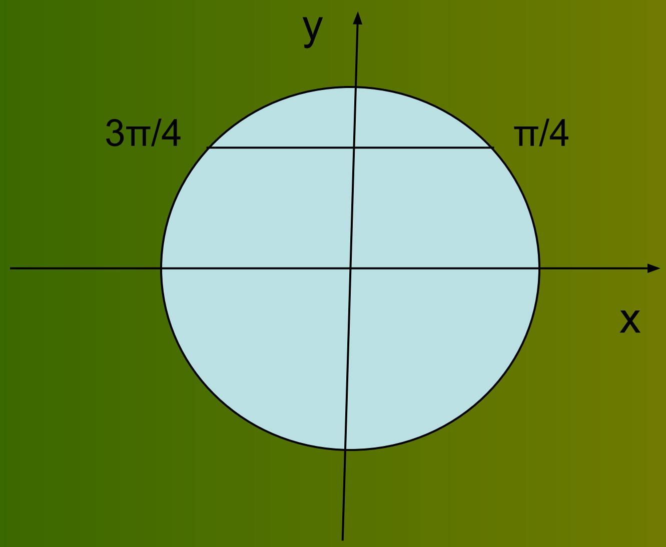
Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

С помощью тригонометрического круга легко установить, что решение

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k$$

распадается на два случая

$$\left[\begin{array}{l} x=\pi+2\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n; \end{array}\right.$$



$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, \\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k; \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} [x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, \\ x=\pi+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

7-способ

Возведение обеих частей уравнения в квадрат

sinx-cosx=1

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1^2$$

$$\sin x^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1;$$

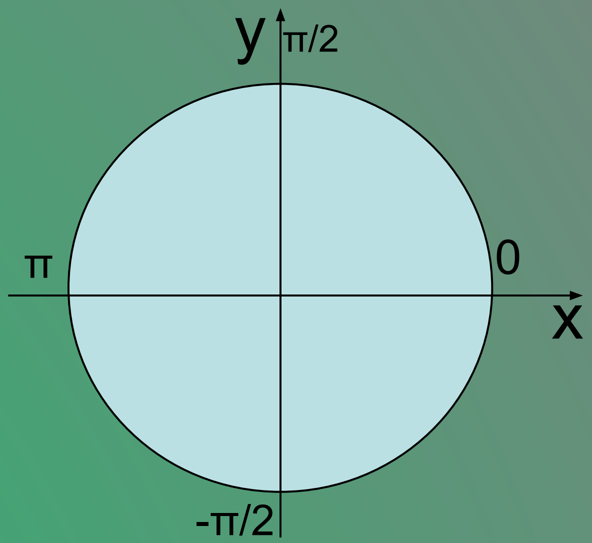
$$1 - \sin 2x = 1;$$

$$\sin 2x = 0;$$

$$2x = \pi k; x = \frac{\pi}{2} k, k \in Z.$$

Полученное решение эквивалентно объединению четырех решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \pi + 2\pi m, m \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z. \end{array}\right.$$



Проверка показывает, что первое и четвертое решения – посторонние.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \text{или} \; x = \pi + 2\pi m, m \in Z.$$

ВСЁ!
Точнее почти всё!
Осталось выбрать метод решения, победивший в номинации:

- Самый простой;
- Самый оригинальный;
- Самый неожиданный;
- Самый универсальный …

УДИВИТЕЛЬНОЕ И КРАСИВОЕ ВСЕГДА РЯДОМ!

ДЕРЗАЙТЕ!!!