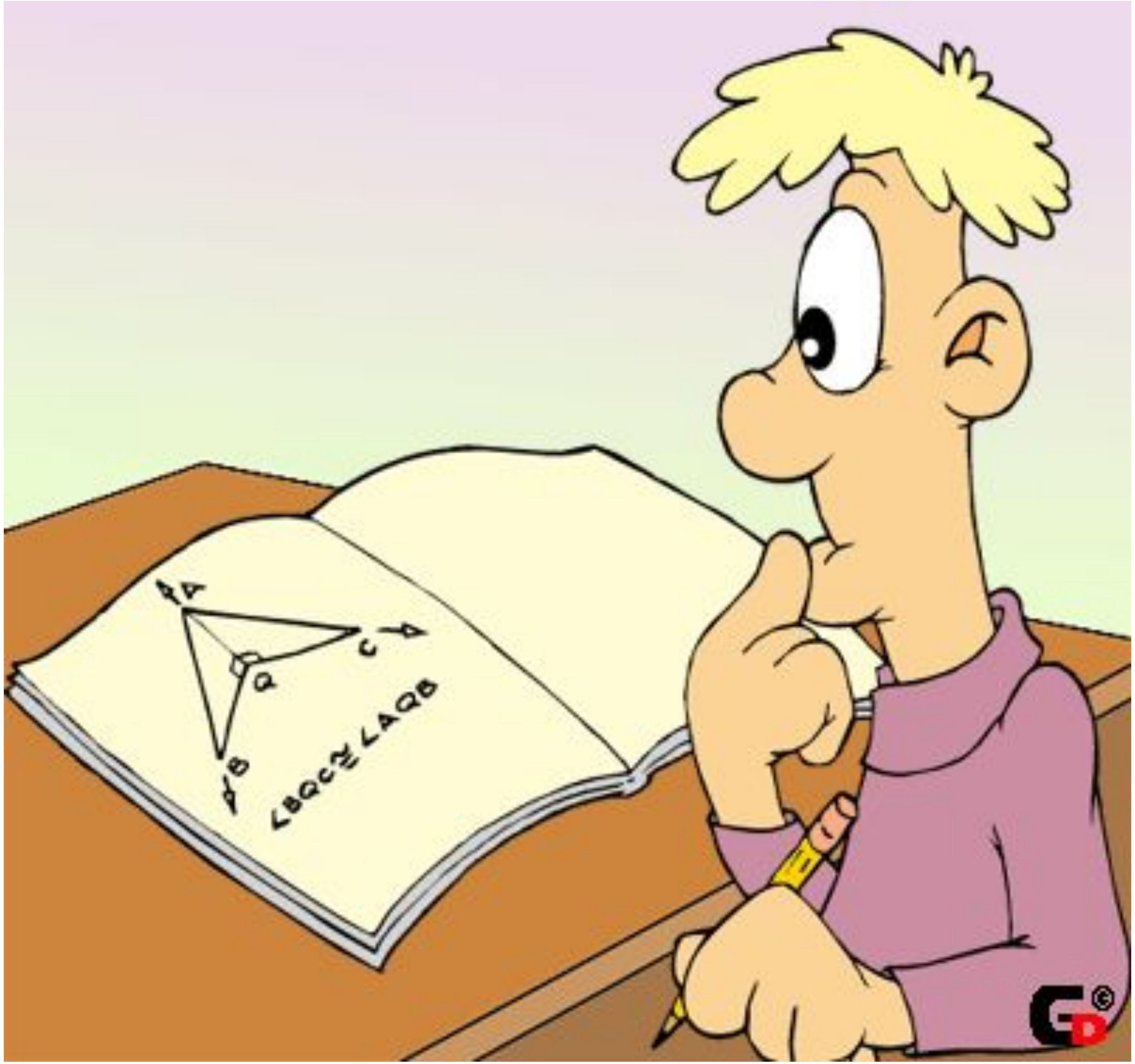
Решение задач по математике С2

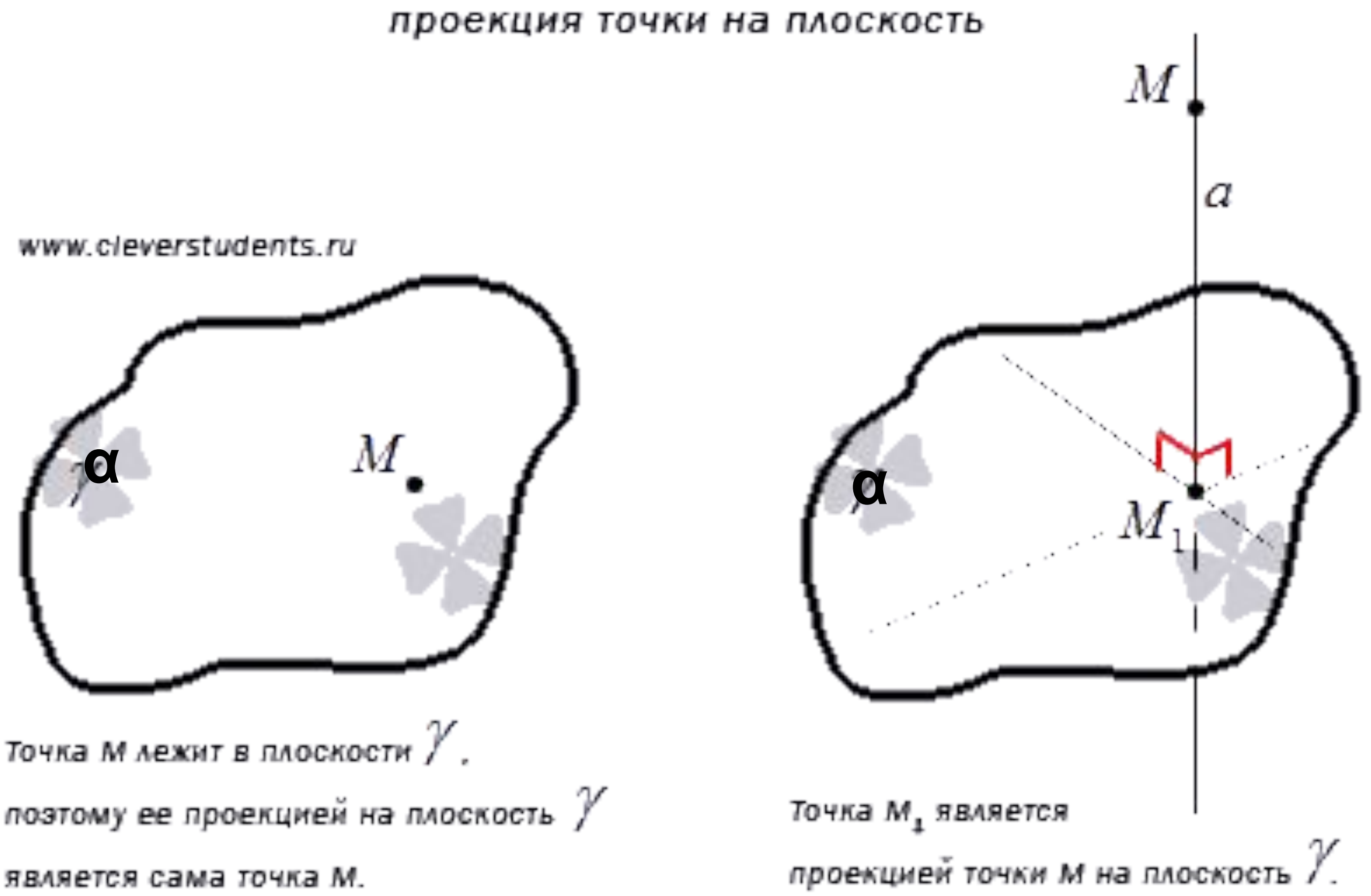
Нахождение угла между прямой и плоскостью



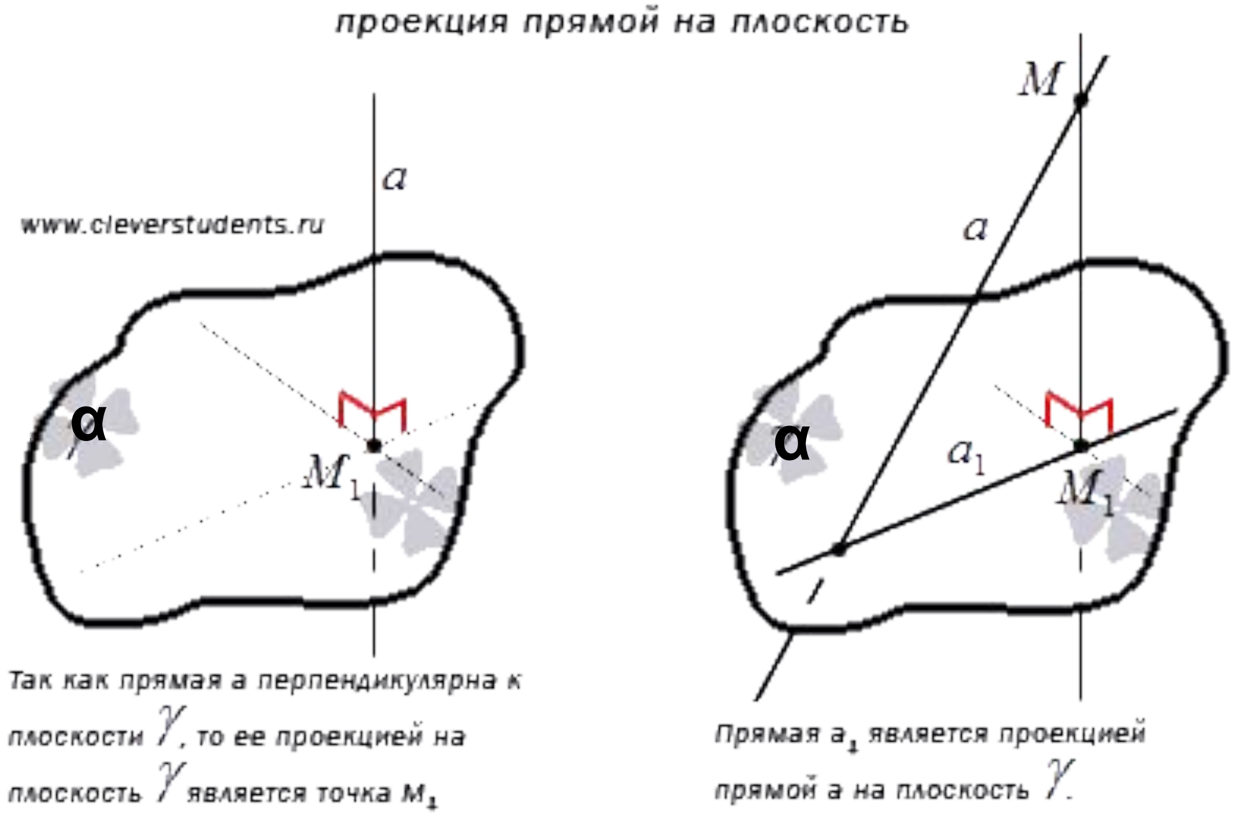
Прямая и плоскость пересекаются, если они имеют одну единственную общую точку, которую называют **точкой пересечения прямой и плоскости**.

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Проекцией точки *M* на плоскость α   называется либо сама точка *M*,
если *M* лежит в плоскости α , либо точка пересечения плоскости α и прямой, перпендикулярной к плоскости α и проходящей через точку *M*, если точка *M* не лежит в плоскости α .

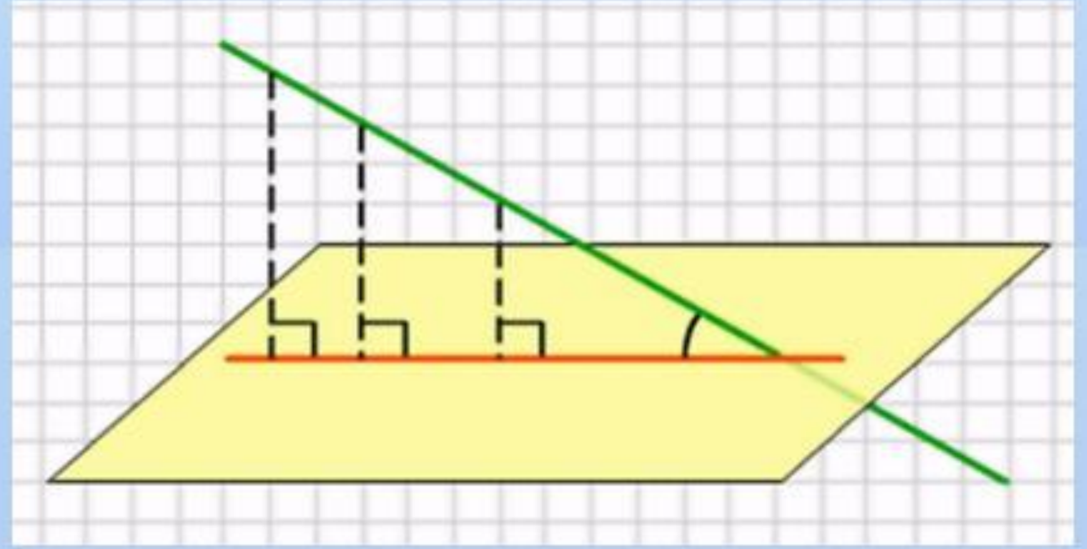


Проекцией прямой *a* на плоскость α называют множество проекций всех точек прямой *a* на плоскость



Угол между наклонной и плоскостью

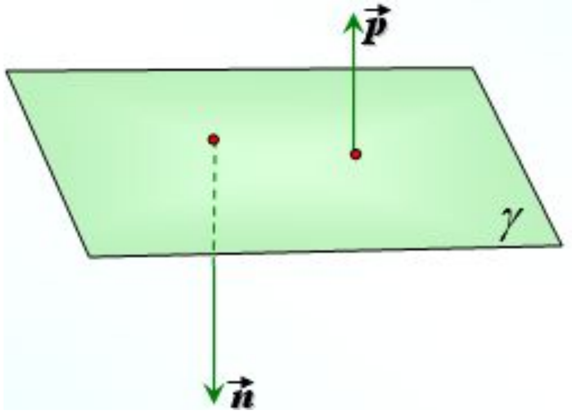
Пусть даны плоскость и наклонная прямая. *Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость*. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ней и плоскостью считается равным нулю. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ней и плоскостью прямой, т. е. равен 90°.



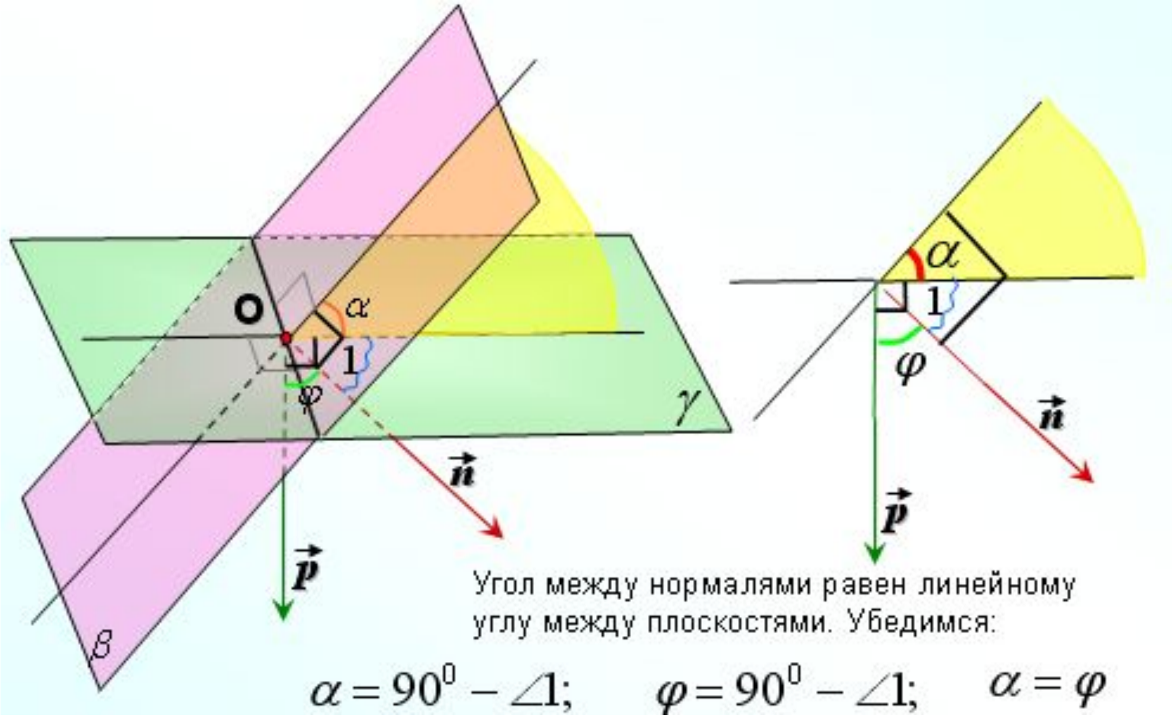
Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Определение.

Нормальным вектором плоскости (или ***нормалью плоскости***) называют вектор, перпендикулярный данной плоскости.



Плоскости, пересекаясь, образуют четыре двугранных угла: два тупых и два острых или четыре прямых, причем оба тупых угла равны между собой, и оба острых тоже равны между собой. Мы всегда будем искать острый угол. Для определения его величины возьмем точку на линии пересечения плоскостей и в этой точке в каждой из плоскостей проведем перпендикуляры к линии пересечения. Нарисуем также нормальные векторы к каждой плоскости. Отложим их от точки О.



Вычислять угол между векторами мы умеем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Но! Мы при решении задач можем выбрать нормали так, что угол между векторами будет тупой. А угол между плоскостями не может быть тупой.

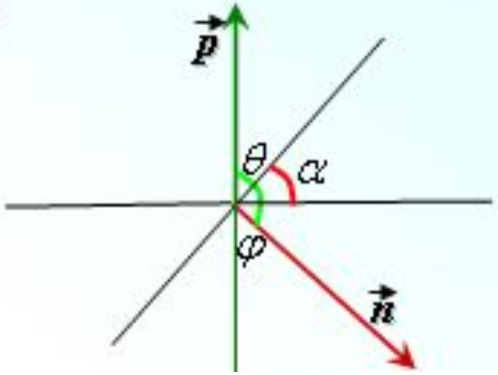
α - искомый угол между прямой и плоскостью

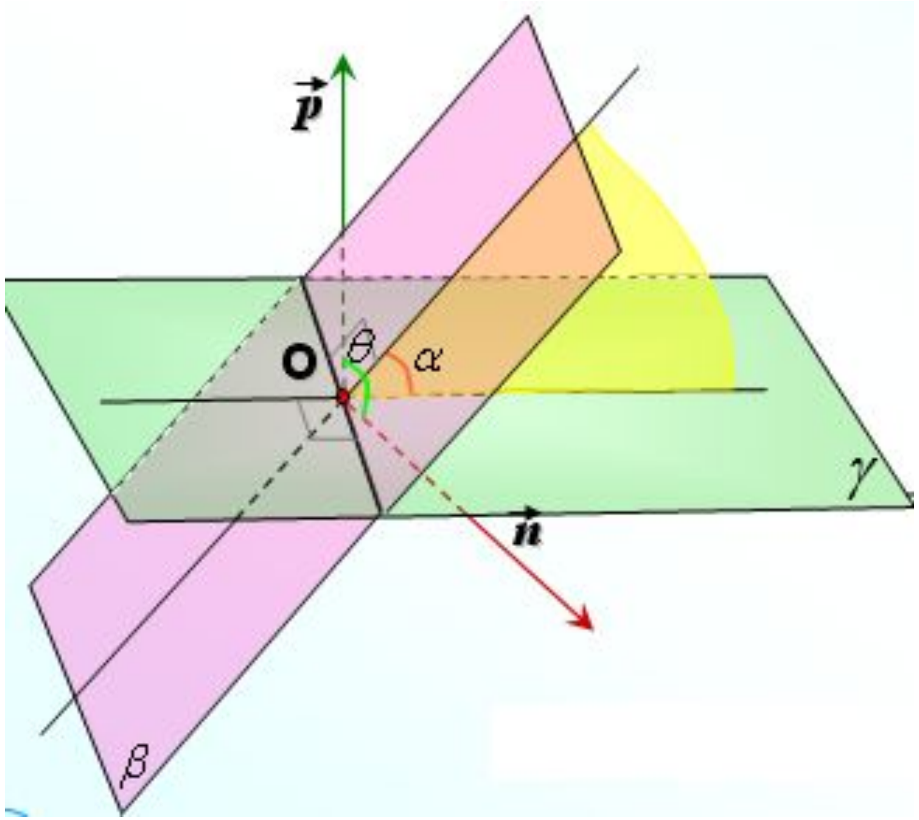
θ - угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{n}$

$\alpha = \varphi$ (уже обосновали)

$\cos\theta = \cos(180^0 - \varphi) = -\cos\varphi$

Тогда $\cos\varphi = -\cos\theta$





Итак, если угол между нормалями острый, то мы сразу получаем угол между плоскостями (формула со знаком «+»).
Если угол между нормалями тупой, то чтобы получить косинус острого угла, надо взять полученное числовое значение для косинуса со знаком «–».

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

А лучше и проще применить знак модуля.

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Алгоритм.

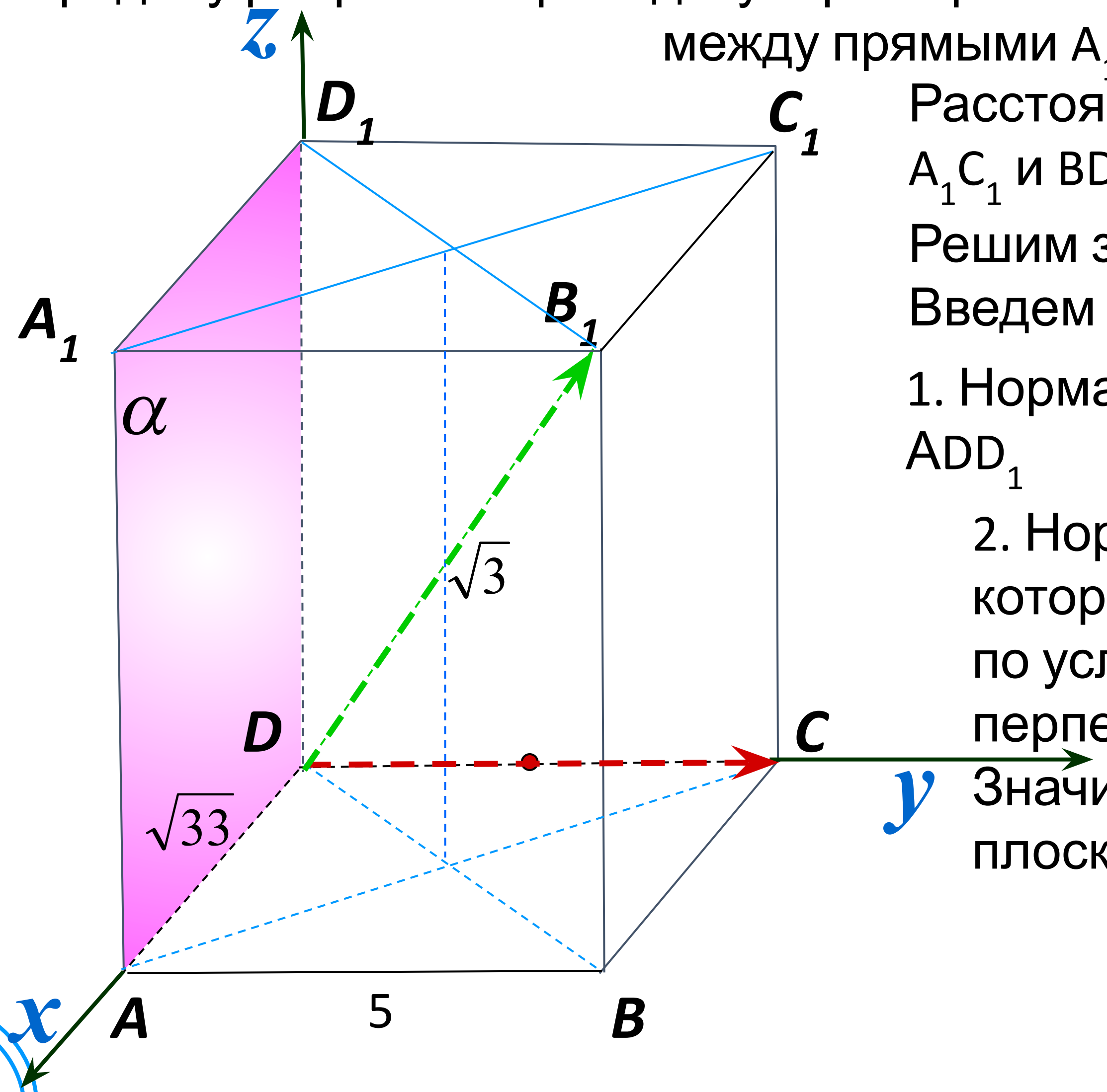
Применение скалярного произведения для вычисления угла между плоскостями.

1. Нормальный вектор (нормаль) для первой плоскости.
2. Нормальный вектор (нормаль) для второй плоскости.
3. Вычислить cos α по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

4. Найти угол α. Если значение косинуса не табличное, то записать ответ, используя арккосинус.

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольник ABCD, в котором AB = 5, AD = $\sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.



Расстояние между прямыми A_1C_1 и BD?

Решим задачу методом координат. Введем нормали к плоскостям.

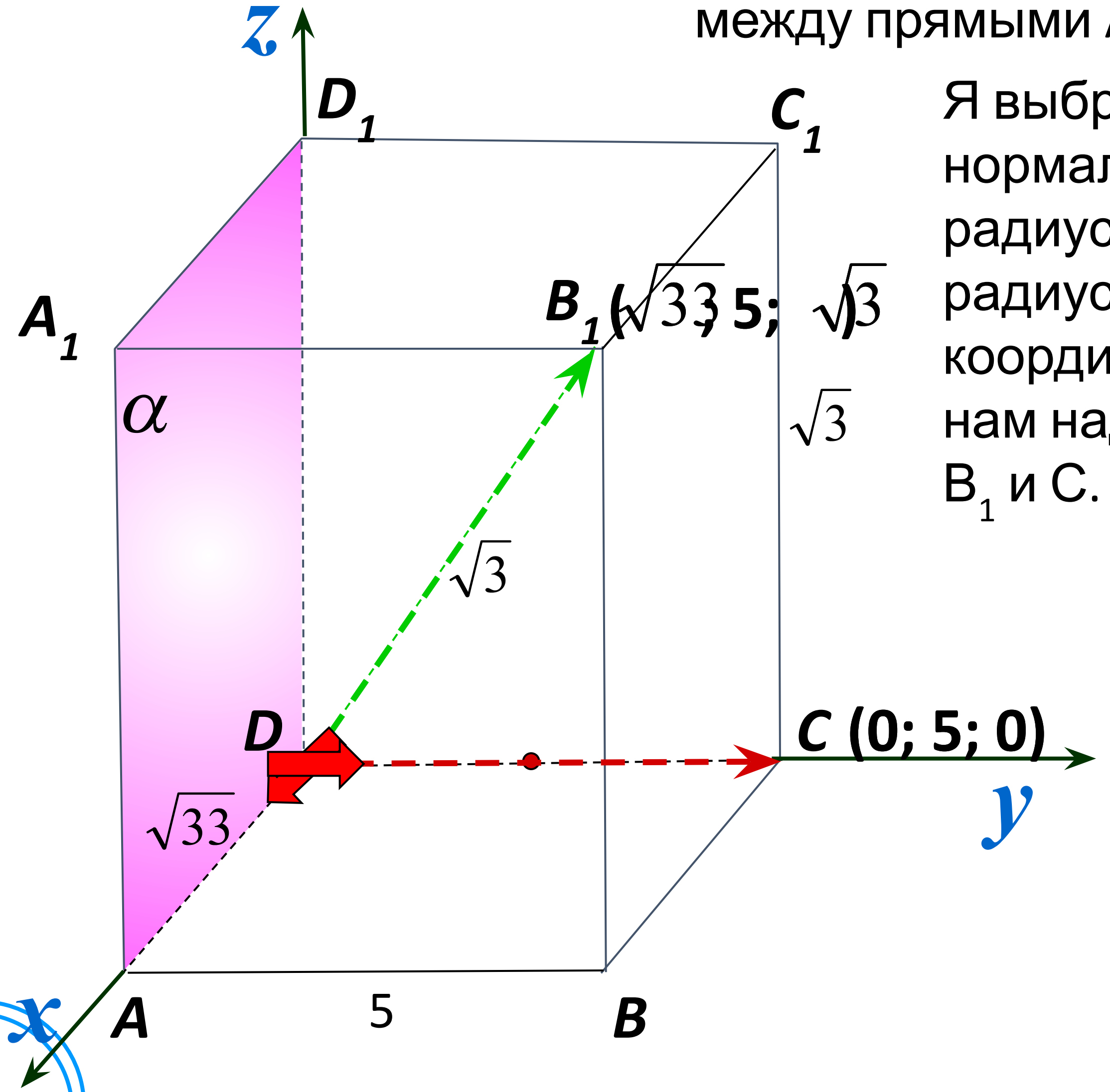
1. Нормаль к плоскости ADD_1

$\overrightarrow{DC} \perp \alpha$

2. Нормаль ко второй плоскости β, которую я и строить не берусь… Но по условию это сечение проходит перпендикулярно прямой B_1D. Значит, B_1D перпендикуляр к плоскости. Выберем нормаль B_1D.

$\overrightarrow{DB_1} \perp \beta$

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольник ABCD, в котором AB = 5, AD = $\sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.



Я выбрала очень удобно нормальные векторы. Ведь это радиус-векторы. Координаты радиус-вектора такие же, как и координаты конца вектора. Значит, нам надо найти координаты точек B_1 и C.

1. $\overrightarrow{DB_1}$
2. $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DB_1}$ $(\sqrt{33}; 5; \sqrt{3})$ $\overrightarrow{DC}$ $(0; 5; 0)$

3. $\cos\varphi = \dfrac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$$\cos\varphi = \frac{|\sqrt{33} \cdot 0 + 5 \cdot 5 + \sqrt{3} \cdot 0|}{\sqrt{(\sqrt{33})^2 + 5^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{|0 + 25 + 0|}{\sqrt{33 + 25 + 3} \cdot \sqrt{25}} = \frac{25}{\sqrt{61} \cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{61}}.$$

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

Теперь найдем тангенс.

$$\mathbf{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$tg^2\varphi + 1 = \frac{1}{\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)^2}$$

$$tg^2\varphi + 1 = \frac{61}{25}$$

$$tg^2\varphi = \frac{61}{25} - 1$$

$$tg^2\varphi = \frac{36}{25}$$

$$tg\varphi = \pm\frac{6}{5}$$

т.к. φ – острый угол

$$tg\varphi = \frac{6}{5}$$