МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

ВЫПОЛНИЛ: ШЕЛОМЕНЦЕВ ВЛАДИСЛАВ

ИХПБДИТБ 1 КУРС МАГ.

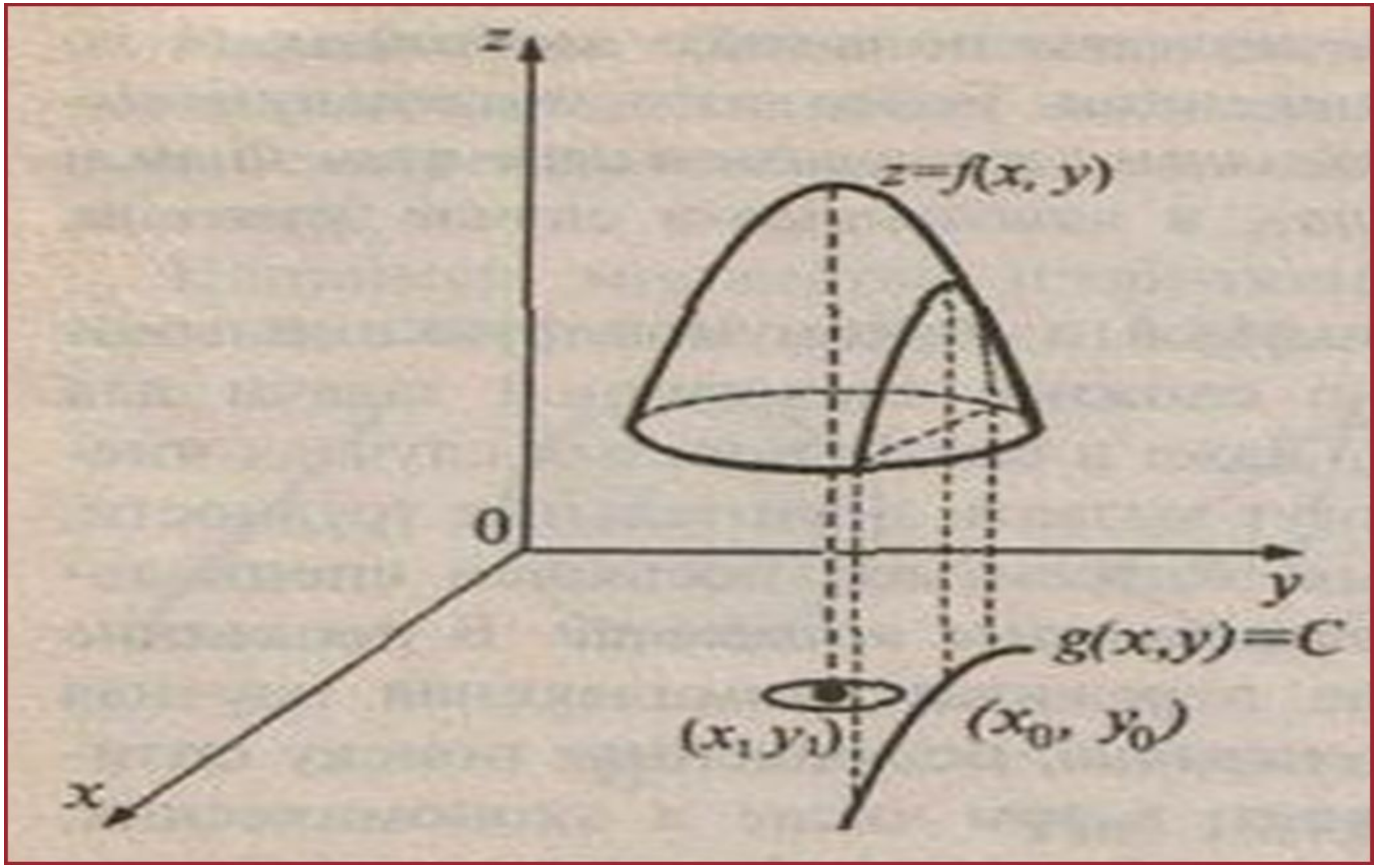
УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Точка *(x_0,y_0)* называется точкой условного экстремума (максимума или минимума), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек *(x,y)* из этой окрестности, удовлетворяющих условию *g(x,y)*=*C*, выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$ ***max***

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$ ***min***

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ



Условный экстремум является точкой локального максимума, как на данном рисунке (или минимума) функции.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Существует два основных метода поиска условного экстремума:

- **Метод замены переменной**
- **Метод множителей Лагранжа**

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим нахождение экстремума функции нескольких переменных не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющему некоторому условию.

Пусть задана функция $z=f(x,y)$, аргументы которой удовлетворяют уравнению

$$g(x,y)=C,$$

называемому уравнением связи.

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Чтобы найти условный экстремум, нужно из уравнения связи выразить одну переменную через другую:

$$y=\varphi(x).$$

Подставим это выражение в функцию двух переменных и получим функцию одной переменной:

$$z=f(x,y)=f(x, \varphi(x)).$$

Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z=f(x,y)$.

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ (ПРИМЕР)

Найти точки максимума и минимума функции

$$z = x^2 + 2y^2$$

при условии 3x+2y=11.

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ (РЕШЕНИЕ)

$$3x+2y=11 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{11-3x}{2}$$

$$z=x^2+2\left(\frac{11-3x}{2}\right)^2=\frac{11}{2}\left(x^2-6x+11\right)$$

$$z'=11\left(x-3\right)$$

$$\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=1 \end{cases} \quad - \quad \textit{условный минимум}$$

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

В этом примере связь между *x* и *y* оказалась линейной, поэтому уравнение связи легко разрешилось относительно одной из переменных.

Но в некоторых случаях это сделать довольно сложно. Поэтому в общем случае для нахождения условного экстремума используется метод множителей Лагранжа.

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим функцию трех переменных:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot (g(x, y) - C)$$

Функция Лагранжа

Метод множителей Лагранжа (теорема)

Если точка (x_0,y_0) является точкой условного экстремума функции

$z=f(x,y)$

при условии $g(x,y)=C$, то существует значение λ_0, такое что точка (x_0,y_0,λ_0) является точкой экстремума функции $L(x,y,\lambda)$.

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Следовательно, для нахождения условного экстремума функции z=f(x,y) при условии g(x,y)=C, требуется найти решение системы:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda \cdot g'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda \cdot g'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda = g'(x,y) - C = 0 \end{cases}$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением связи.

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

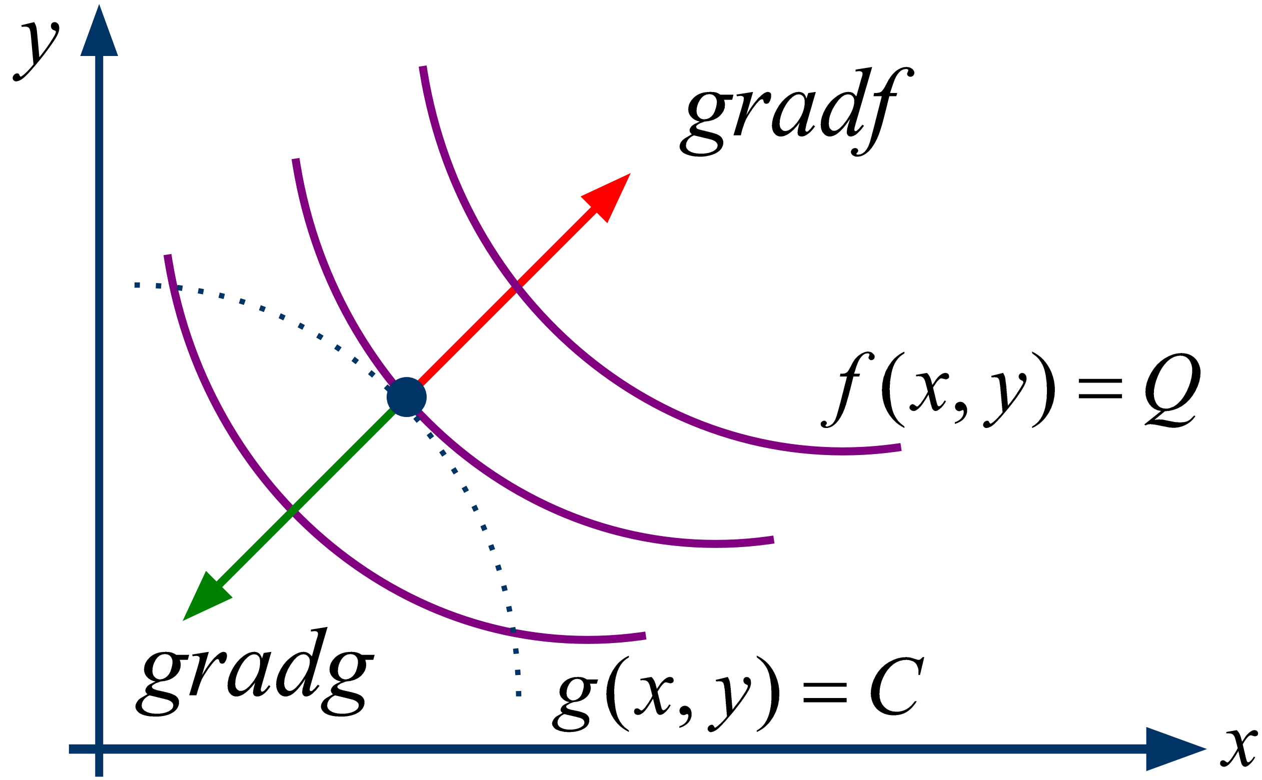
Первые два уравнения можно записать в виде:

$$grad f = -\lambda grad g$$

То есть в точках условного экстремума градиенты функций f(x,y) и g(x,y) коллинеарны.

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим геометрический смысл теоремы Лагранжа:



В точке условного экстремума линия уровня функции z=f(x,y) касается линии g(x,y)=C.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Выполнил: Шеломенцев Владислав Валерьевич
ИХПБДиТБ 1 курс маг.