ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

До сих пор мы рассматривали производные функций первого порядка.

Первая производная функции $f'(x)$

сама является функцией, которая может иметь производную.

Производной *n* –го порядка называется производная от производной *n*-1 –го порядка.

Обозначается:

$f''(x)$ - производная второго порядка

$f'''(x)$ - производная третьего порядка

$f^{(4)}(x)$ - производная четвертого порядка

$f^{(n)}(x)$ - производная *n* -го порядка

Выясним механический смысл второй производной.

Если точка движется прямолинейно по закону *S=S(t)*, то

$$S'(t_0)$$

- *<u>есть скорость изменения пути в момент времени</u>* t_0.

Следовательно, вторая производная по времени

$$S''(t_0) = \left(S'(t_0)\right)' = v'(t_0)$$

<u>- есть скорость изменения скорости, или ускорение, в момент времени t_0.</u>

ПРИМЕР.

Найти вторую производную функции

$$y = x^2 \cdot e^{-3x}$$

$$y' = \left(x^2 \cdot e^{-3x}\right)' = 2x \cdot e^{-3x} - x^2 \cdot 3e^{-3x} = e^{-3x}(2x - 3x^2)$$

$$y'' = \left(e^{-3x}(2x - 3x^2)\right)' =$$

$$= -3e^{-3x}(2x - 3x^2) + e^{-3x}(2 - 6x) =$$

$$= e^{-3x}(-6x + 9x^2 + 2 - 6x) = e^{-3x}(9x^2 + 2 - 12x)$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрим три важнейшие теоремы дифференциального исчисления: теорему Ферма, теорему Ролля и теорему Лагранжа.

Теорема Ферма

Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна 0:

$$f'(x_0) = 0$$

Доказательство:

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема на промежутке *X* и в точке

$$x_0 \in X$$

принимает наименьшее значение.

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$$

если

$$x_0 + \Delta x \in X$$

Величина

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$$

Следовательно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad \textbf{при} \quad \Delta x > 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \quad \textbf{при} \quad \Delta x < 0$$

Переходим в этих неравенствах соответственно к пределу справа и слева:

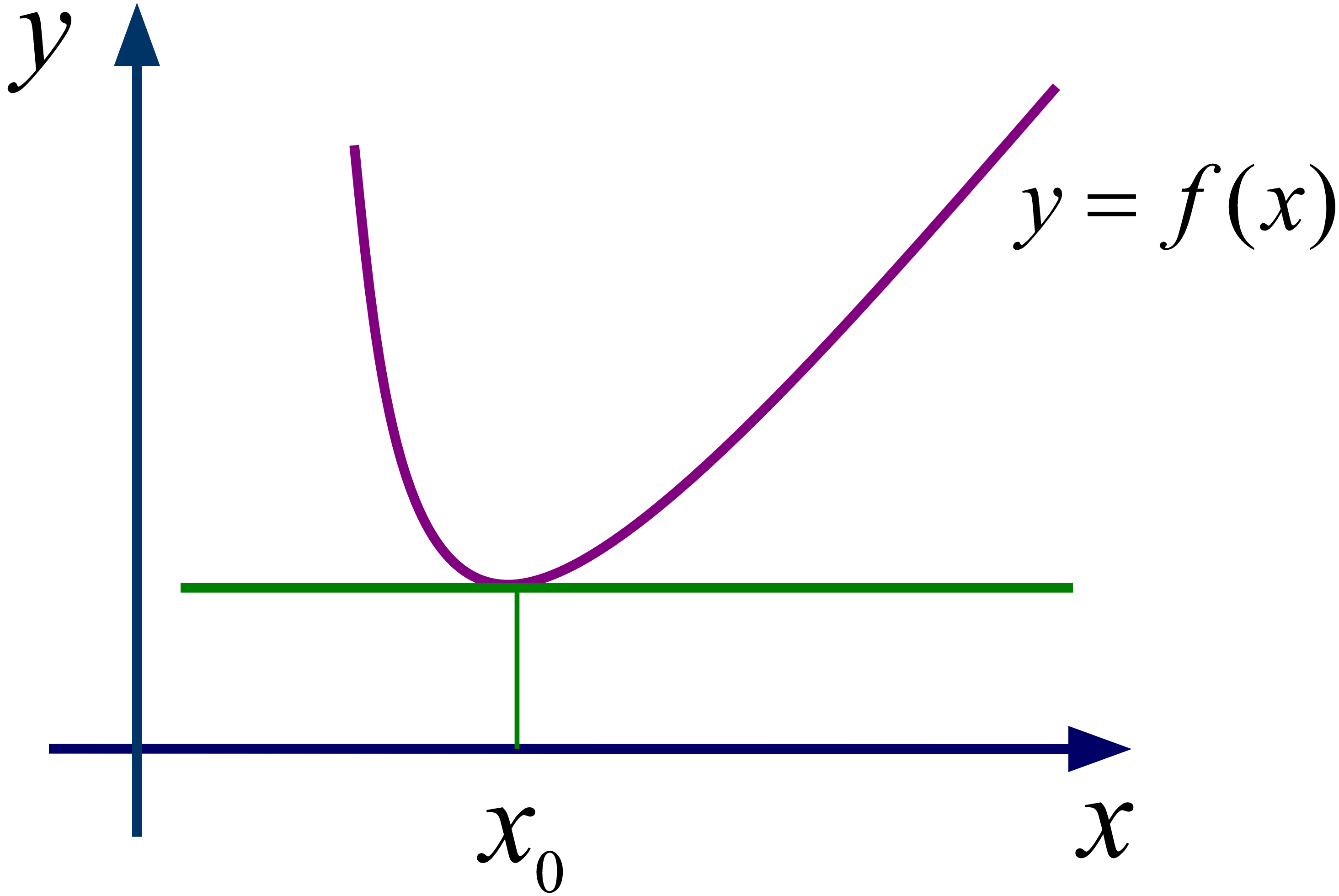
$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

По условию функция *y=f(x)* дифференцируема в точке x_0, следовательно ее предел при $\Delta x \to 0$ **не должен зависеть от способа стремления Δx к нулю, т.е.**

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x_0) = 0}$$

Геометрический смысл теоремы Ферма

В точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка
Х, касательная к графику функции параллельна оси Х.



y
$y = f(x)$
x_0
x

Теорема Ролля

Пусть функция y=f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1. ***Непрерывна на отрезке [a,b].***
2. ***Дифференцируема на интервале (a,b).***
3. ***На концах отрезка принимает равные значения: f(a)=f(b).***

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ, в которой производная функции равна нулю:

$$\boxed{f'(\xi) = 0}$$

Доказательство:

На основании теоремы Вейерштрасса, функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего *M* и наименьшего *m* значений.

Если оба этих значения достигаются на концах отрезка,то они по условию равны: *M*= *m*, а это значит, что функция постоянна на *[a,b]*. Тогда

$$f'(x) = 0$$

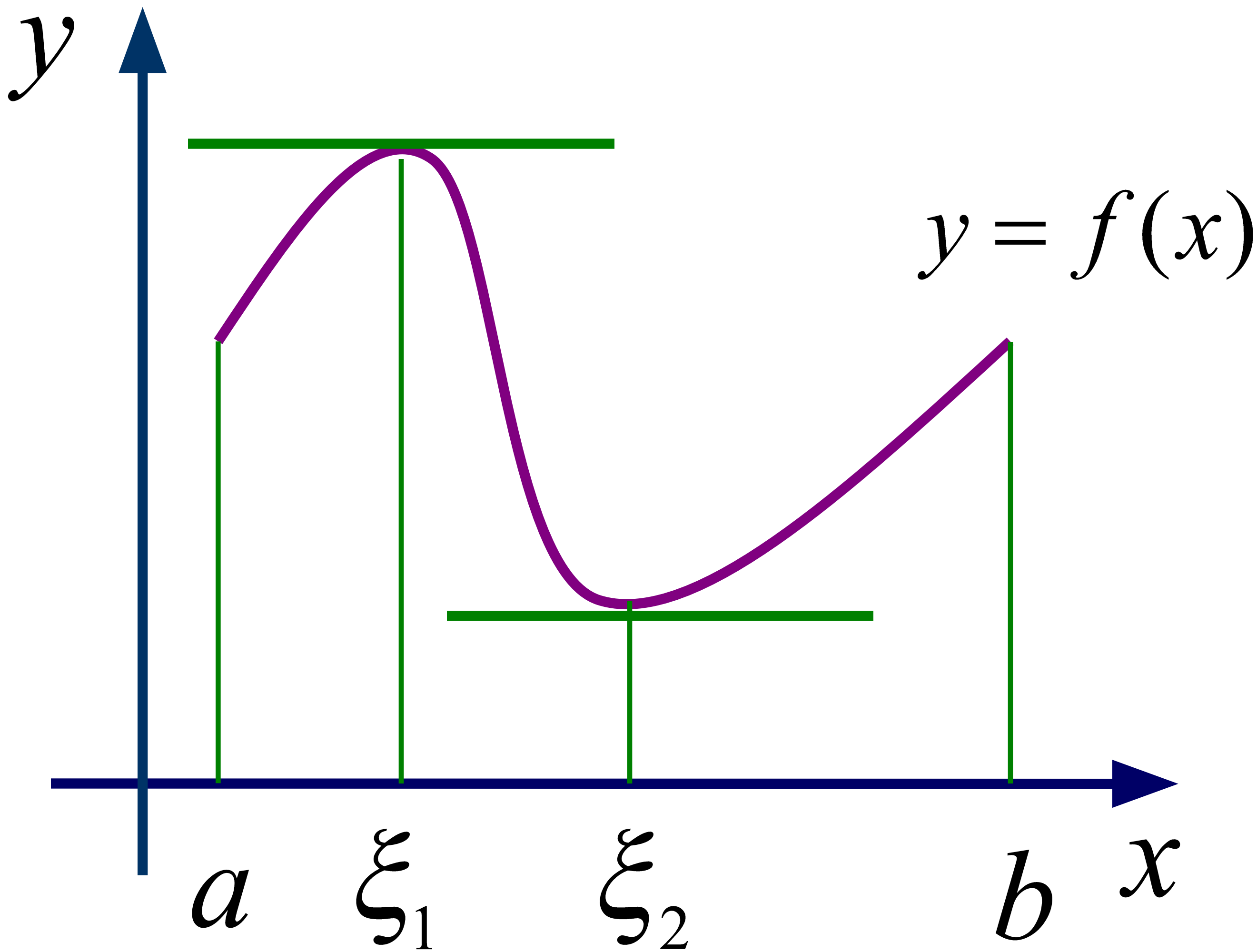
во всех точках этого отрезка.

Если же хотя бы одно из этих значений (минимальное или максимальное), достигается внутри отрезка, то по доказанной ранее теореме Ферма, производная функции в этой точке равна нулю.

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Геометрический смысл теоремы Ролля

Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси Х, в этой точке производная функции будет равна нулю.



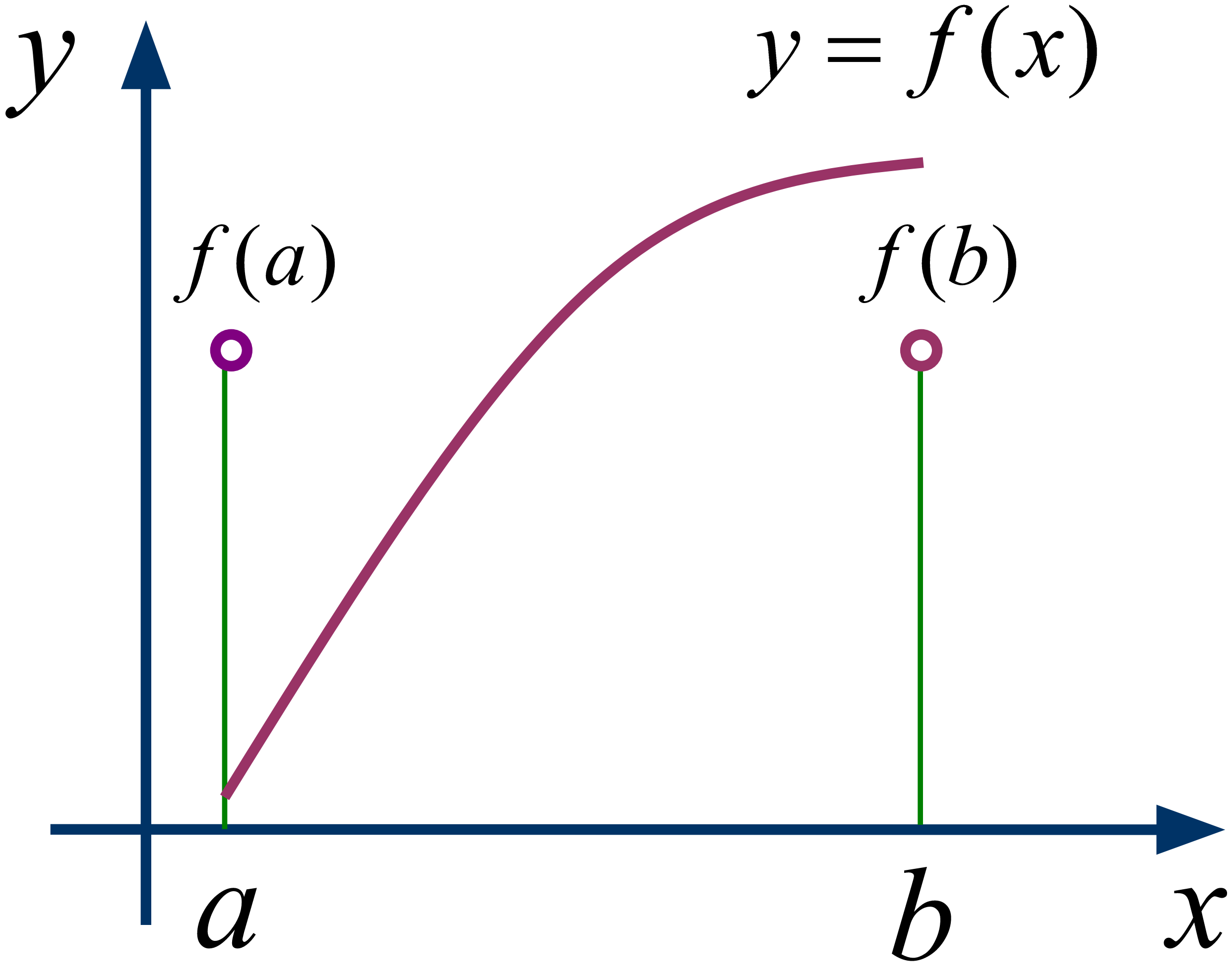
y
$y = f(x)$
a
ξ_1
ξ_2
b
x

Если же хотя бы одно условие теоремы Ролля нарушено, то заключение теоремы может быть неверным.

Например:

1

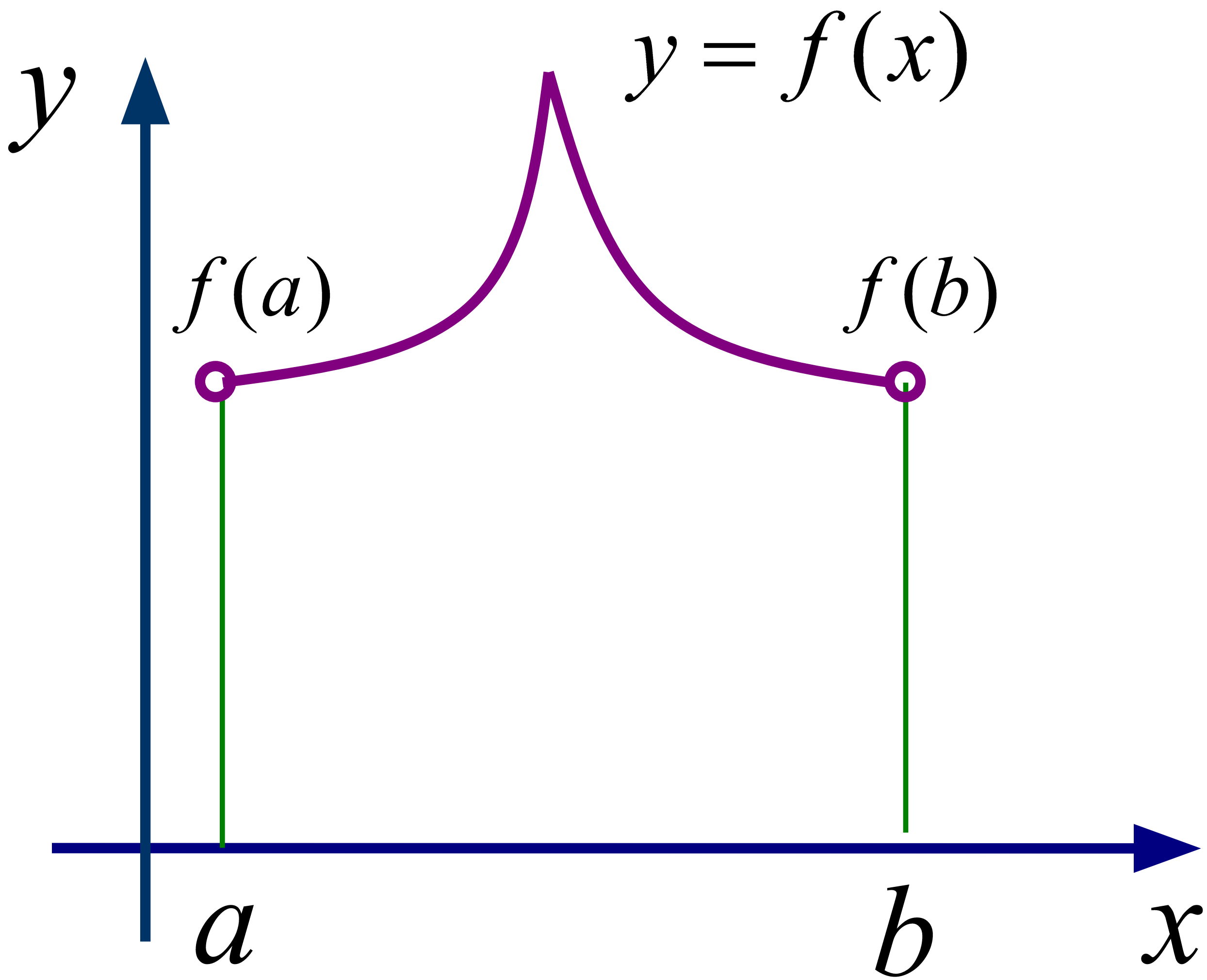
Отсутствует непрерывность на [a,b].



y
$y = f(x)$
$f(a)$
$f(b)$
a
b
x

2

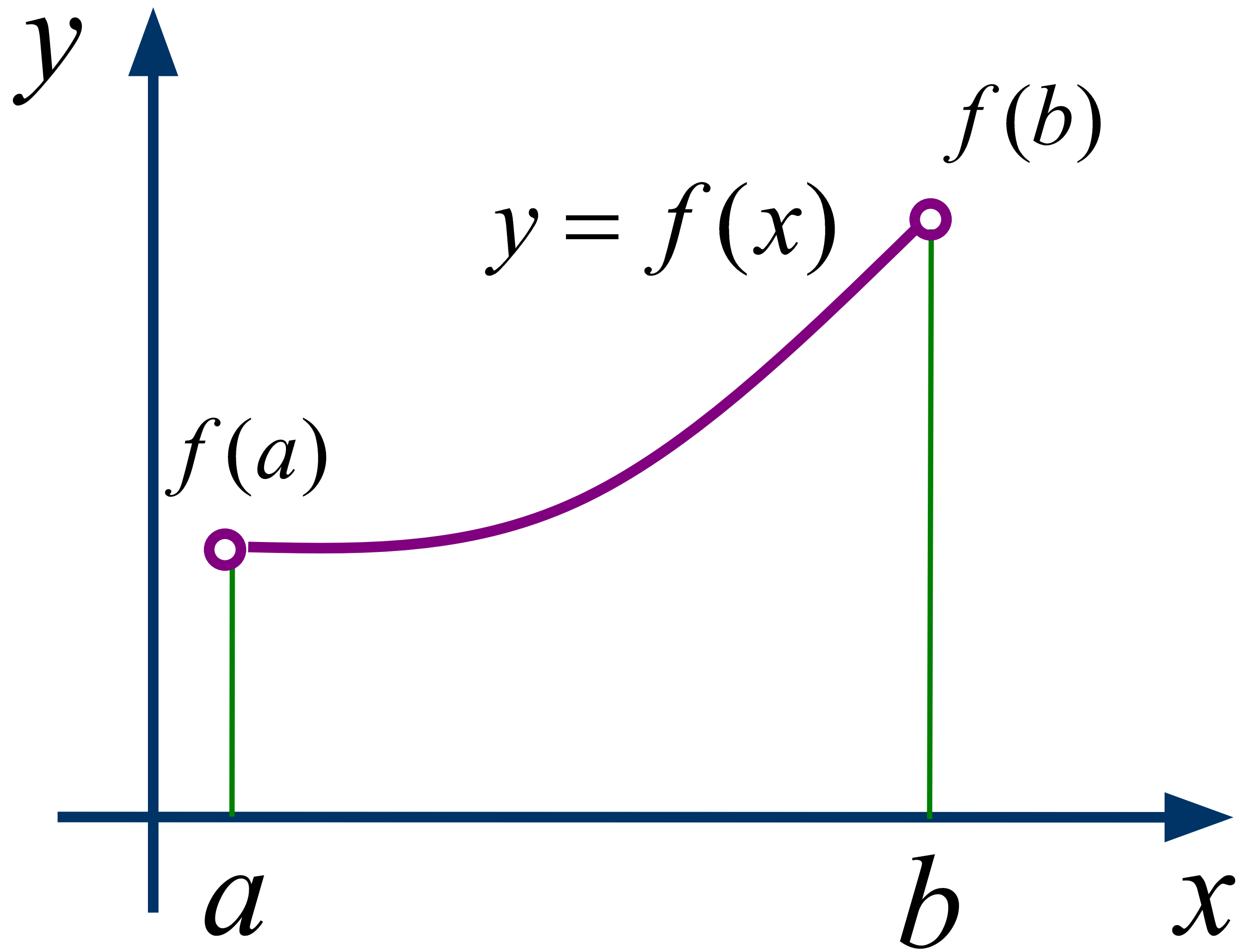
Отсутствует дифференцируемость на (a,b).



$y = f(x)$
y
$f(a)$
$f(b)$
a
b
x

3

$$f(a) \neq f(b)$$



y
$f(b)$
$y = f(x)$
$f(a)$
a
b
x

Теорема Лагранжа

Пусть функция y=f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1. ***Непрерывна на отрезке [a,b].***
2. ***Дифференцируема на интервале (a,b).***

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ, в которой производная функции равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доказательство:

Введем новую функцию *g(x)*:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

Она непрерывна на *[a,b]*, дифференцируема на *(a,b)* и на концах отрезка принимает равные значения:

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cdot\cancel{(b-a)}$$

$$\underline{g(b)}=f(b)-f(b)+f(a)=\underline{f(a)}$$

$$g(a)=f(a)-\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad g(a)=f(a)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{g(a) = g(b)}$$

Следовательно, по теореме Ролля существует точка

$$\xi \in (a,b)$$

такая, что

$$g'(\xi) = 0$$

или

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (\xi - a)' = 0$$

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

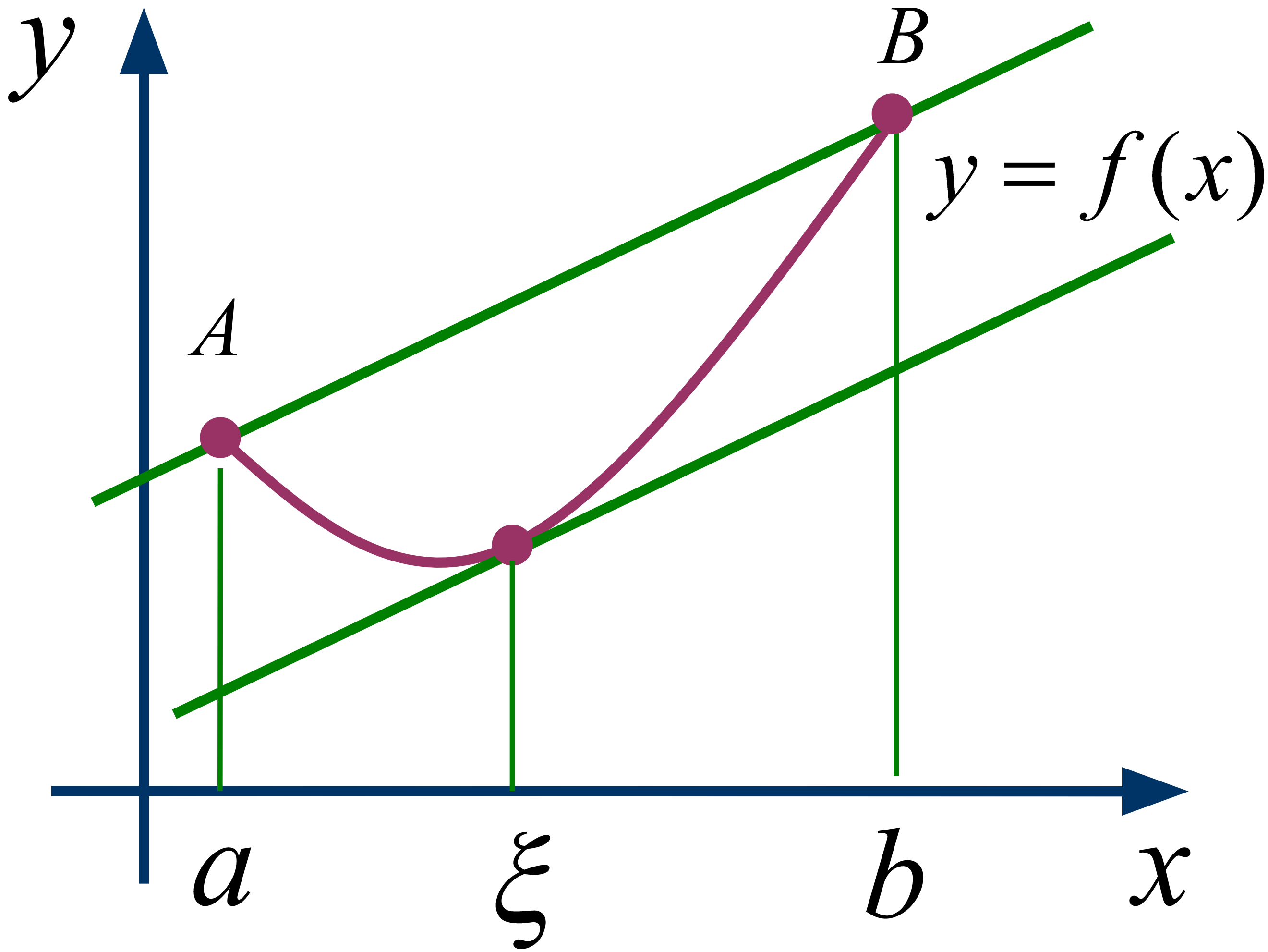
отсюда

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Эту теорему часто записывают в виде:

$$f'(\xi)\cdot(b-a)=f(b)-f(a)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



Если перемещать прямую АВ параллельно начальному положению, то найдется хотя бы одна точка

$$\xi \in (a,b)$$

в которой касательная к графику функции y=f(x) и хорда АВ, проведенная через концы дуги АВ будут параллельны.

Следствие

Если производная функции $y=f(x)$ равна 0 на некотором промежутке X, то эта функция постоянна на всем этом промежутке.

Доказательство:

Возьмем на промежутке X *[a,x]*, тогда по теореме Лагранжа

$$f'(\xi)\cdot(x-a)=f(x)-f(a)$$

По условию теоремы

$$f'(\xi)=0$$

$$\Rightarrow \quad 0\cdot(x-a)=f(x)-f(a)$$

$$0 = f(x) - f(a)$$

То есть

$$\boxed{f(x) = f(a)}$$