Уроки геометрии в 7-м классе

Тема уроков:

«Задачи на построение»

План изучения темы:

1. Вступительная лекция:

   - Исторические сведения;

   - Инструменты для построения;

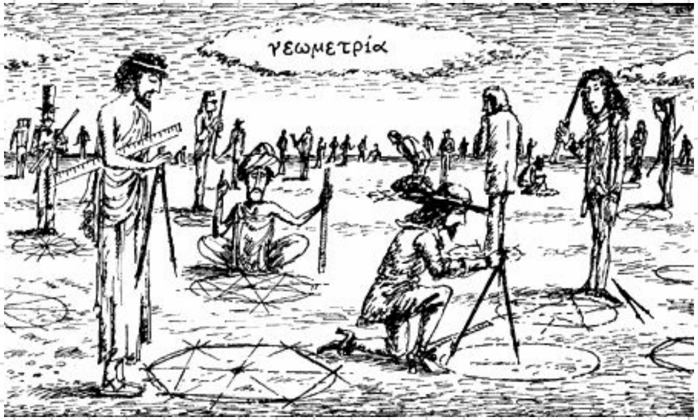
2. План решения задач на построение;

3. Выполнение простейших задачи на построение;

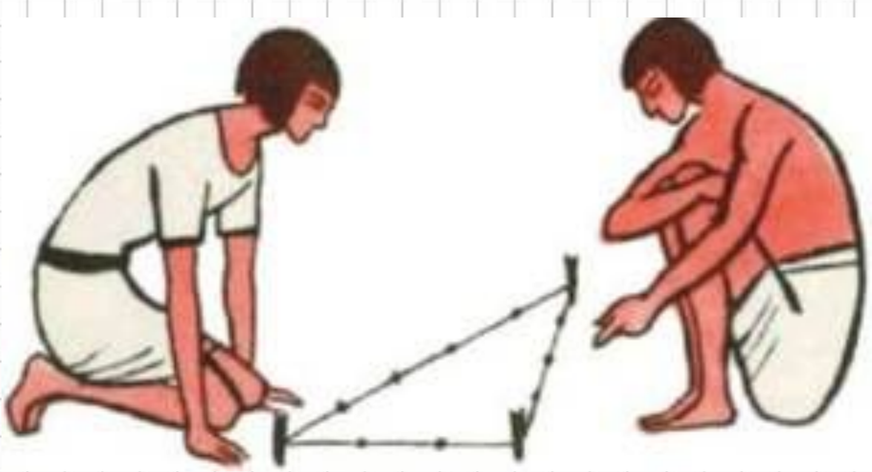
4. Решение задач на построение;

5. Задачи для самостоятельного решения.

Исторические сведения:

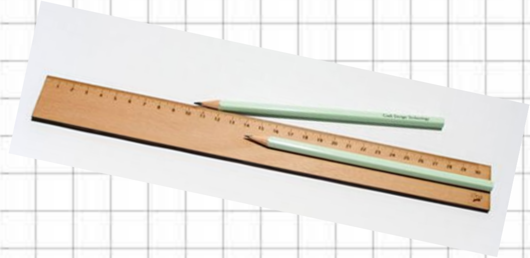


И в Вавилоне, и в Древнем Египте в IV–II тысячелетиях до н.э. уже существовала практическая математика (в виде правил записи чисел, т.е. системы счисления, и правил различных вычислений), и практическая геометрия – геометрия в изначальном смысле слова: измерение земли. Но и при измерениях, и при строительных работах нужны были построения.



Инструменты для построения:

С помощью линейки выделить прямую из множества всех прямых:



1. *произвольную прямую;*
2. *произвольную прямую, проходящую через заданную точку;*
3. *прямую, проходящую через две заданных точки;*

С помощью циркуля выделить окружность из множества всех окружностей:

1. *произвольную окружность;*
2. *произвольную окружность с центром в заданной точке;*
3. *произвольную окружность с радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками;*
4. *окружность с центром в заданной точке и с радиусом, равным расстоянию между двумя заданными точками.*

2. План решения задач на построение

Анализ:

Предположить, что задача решена, сделать примерный чертеж искомой фигуры, отметить те отрезки и углы, которые известны из условия задачи, и стараться определить, к нахождению какой точки (прямой, угла) сводится решение задачи.

Построение:

Описать способ построения.

Доказательство:

Доказать, что множество точек , построенное описанным способом, действительно находится в заданном соотношении с исходным множеством точек.

Исследование:

Выяснить, всегда ли (при любых ли данных) описанное построение возможно, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается или делается невозможным.

3. Выполнение простейших задачи на построение

Построение 1: **построить треугольник по трем сторонам, т.е. построить треугольник, стороны которого равны трем данным отрезкам a, b и c.**

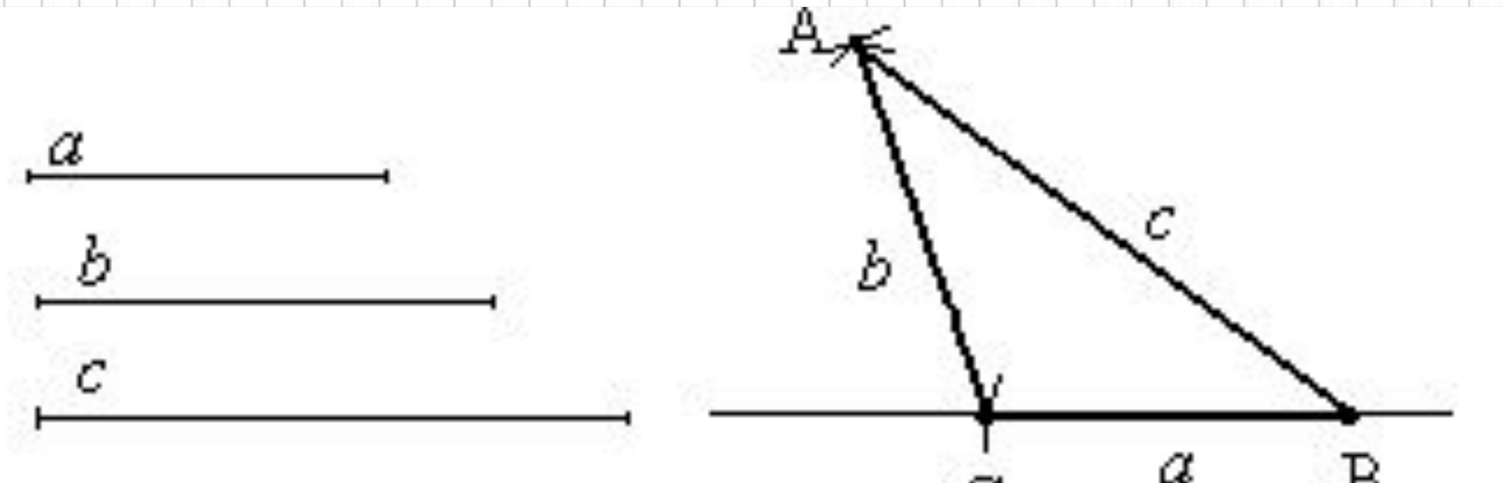


рис. 1

- ✔С помощью линейки проведем произвольную прямую и отметим на ней произвольную точку В.
- ✔Раствором циркуля, равным а, описываем окружность с центром в точке В и радиусом а. Пусть С – точка ее пересечения с прямой.
- ✔Описываем окружность с центром в точке В радиуса с и с центром в точке С радиуса b. Пусть А – точка пересечения построенных окружностей. Треугольник АВС построен.

Построение 2: **построить угол, равный данному, от данной полупрямой в данную полуплоскость.**

Анализ. (рис 2а) Пусть а – данный луч с вершиной А, а угол (ab) искомый. Выберем точки В и С на лучах a и b соответственно. Соединив точки В и С, получим треугольник АВС. В равных треугольниках соответственные углы равны, и отсюда вытекает способ построения. Если на сторонах данного угла каким-то удобным образом выбрать точки С и В, от данного луча в данную полуплоскость построить треугольник АВ1С1, равный АВС (а это можно сделать, если знать все стороны треугольника, см. предыдущую задачу), то задача будет решена.

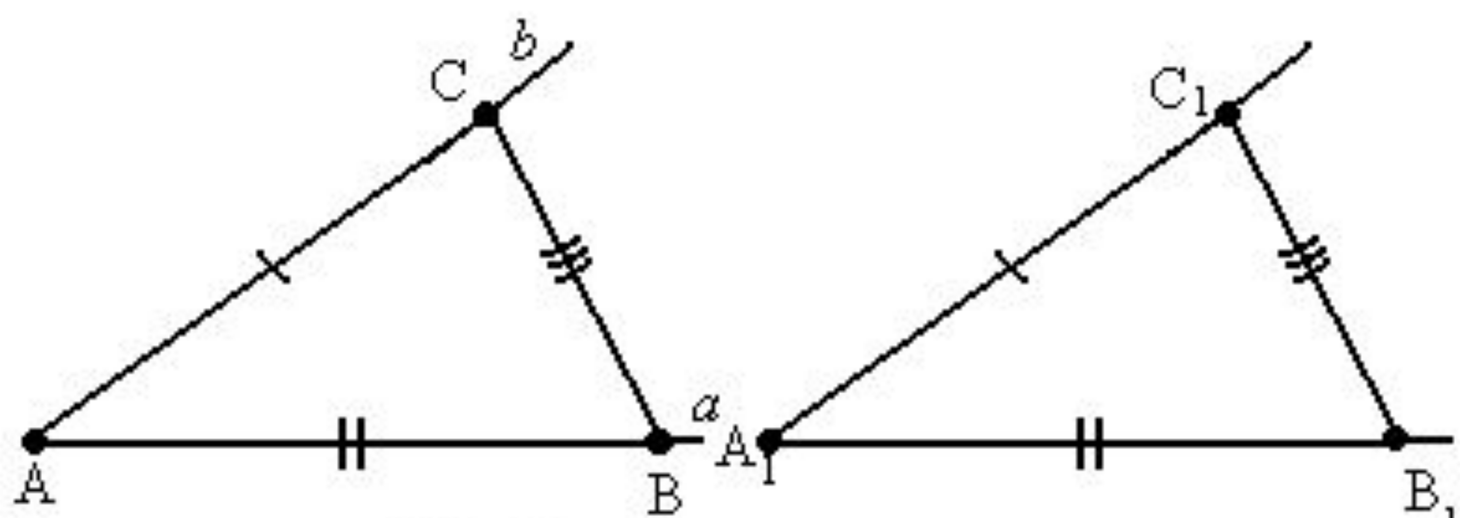


рис. 2а

Построение:

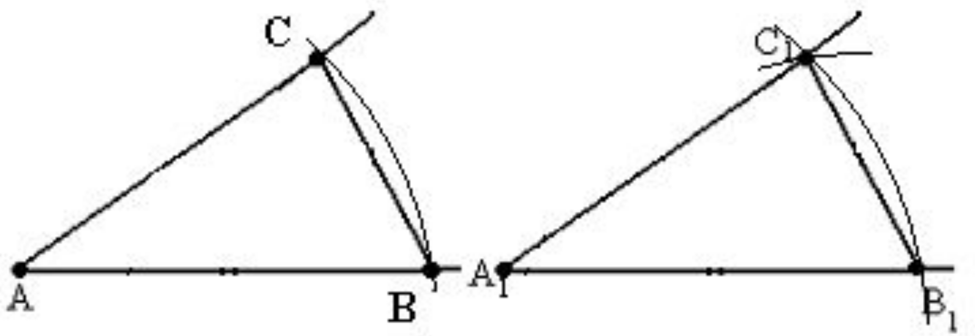


рис. 2b

- ✔ Проведем окружность с центром в вершине данного угла. Пусть B и C – точки пересечения окружности со сторонами угла (рис. 2b).
- ✔ Радиусом AB проведем окружность с центром в точке A1 – начальной точке данного луча. Точку пересечения этой окружности с данным лучом обозначим B1.
- ✔ Опишем окружность с центром в B1 и радиусом BC. Точка пересечения C1 построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

Доказательство:

Треугольники ABC и A1B1C1 (рис.2а) равны по трем сторонам. Углы A и A1 – соответствующие углы этих треугольников. Следовательно, $\angle CAB = \angle C1A1B1$.

Построение 3: **построить биссектрису данного угла.**

Анализ (рис. 3b). Пусть луч AD – биссектриса данного угла A. Для построения биссектрисы нам необходимо построить точку D на ней, отличную от A. Выберем на разных сторонах угла точки C и B. Соединим их с точкой D. Если отрезки AB и AC равны, т.е. AB = AC, то Δ ABD = Δ ACD и, следовательно, ∠BAD = ∠CAD и луч AD – биссектриса.

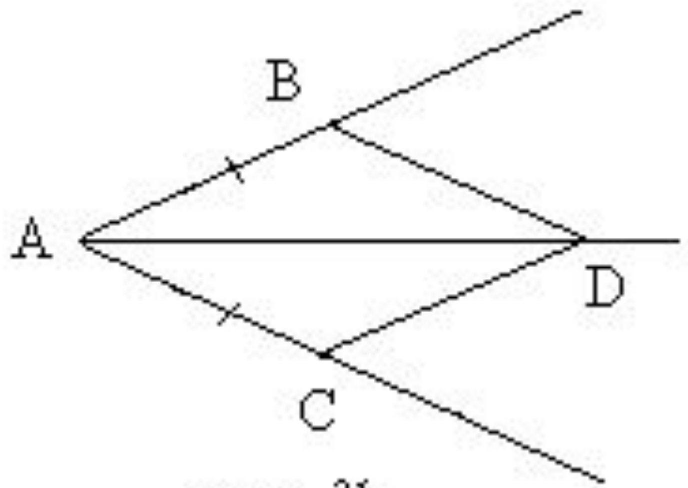


рис. 3b

Построение:

✔Из вершины А данного угла, как из центра, опишем окружность произвольного радиуса. Пусть В и С – точки пересечения ее со сторонами угла (рис. 3).

✔Построим еще две окружности с тем же радиусом с центрами в В и С. Пусть D – точка их пересечения. Тогда луч AD – искомая биссектриса угла А.

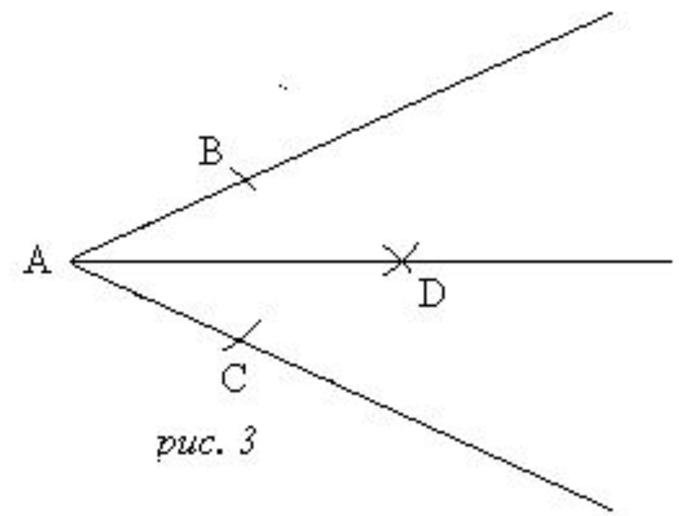


рис. 3

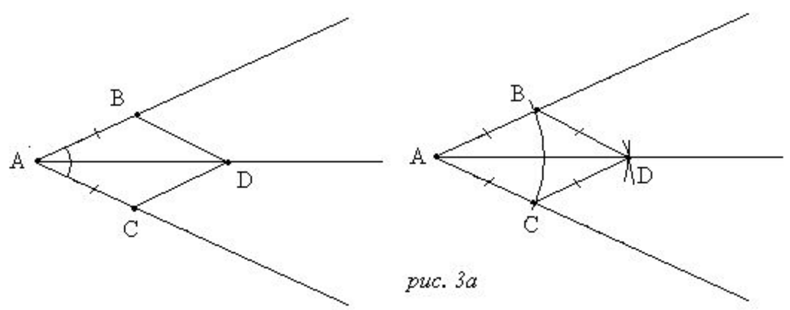


рис. 3а

Доказательство: (рис.3а)

Соединим точку D с точками В и С. Полученный четырехугольник ABDC – ромб. AD – его диагональ. По свойству диагоналей ромба луч AD – биссектриса данного угла А.

Построение 4: **деление отрезка пополам (одновременное построение серединного перпендикуляра данного отрезка).**

Анализ. Пусть АВ – данный отрезок, точка О – его середина, прямая а – серединный перпендикуляр к отрезку АВ. Выберем произвольную точку С на прямой а, отличную от точки О. В Δ АСВ СО – одновременно медиана и высота. Следовательно, Δ АСВ равнобедренный, и АС = ВС. Отсюда возникает следующий способ построения точки О – середины отрезка АВ.

Построение:

Из точек А и В циркулем описываем окружность радиусом АВ. Пусть С и С1 – точки пересечения этих окружностей. Они лежат в разных полу плоскостях относительно прямой АВ. (рис. 4а)

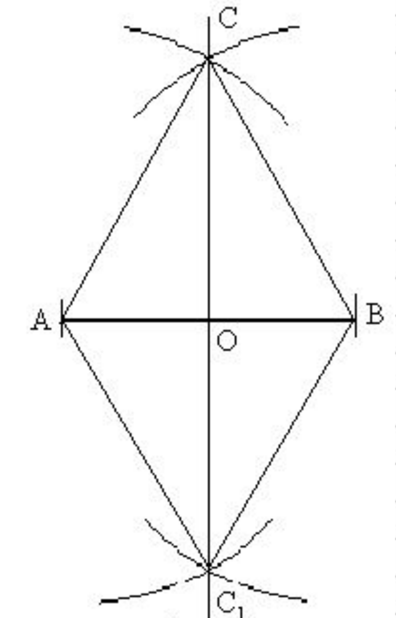


рис. 4а

Доказательство:

Соединим точки С и С1 с концами отрезка АВ. По построению АС1 = АС = С1В = СВ. Поэтому равнобедренные треугольники САС1 и СВС1 равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство углов АСО и ВСО. В равнобедренном треугольнике АВС СО – биссектриса, проведенная к основанию, следовательно, она медиана и высота. Отсюда АО = ОВ, и точка О – середина отрезка АВ.

***Построение 5*: через точку О провести прямую, перпендикулярную данной прямой а.**

Возможны два случая:

- ✔точка О лежит на прямой а;
- ✔точка О не лежит на прямой а.

Случай 1.

Анализ. Пусть а – данная прямая, О – данная точка на ней, b – искомая прямая, перпендикулярная прямой а и проведенная через точку О. Из предыдущей задачи нам известен способ построения серединного перпендикуляра к отрезку АВ. Тогда, если точка О – середина некоторого отрезка, то b – серединный перпендикуляр к этому отрезку и проходит через точку О.

Построение: (рис. 5)

- ✔Отложим от точки О по разные стороны от нее на прямой а одинаковые отрезки ОА, ОВ.
- ✔Проведем две окружности одинакового радиуса АВ с центром в точках А и В соответственно. Они пересекаются в точке С.
- ✔Проведем прямую ОС. Она перпендикулярна прямой а.

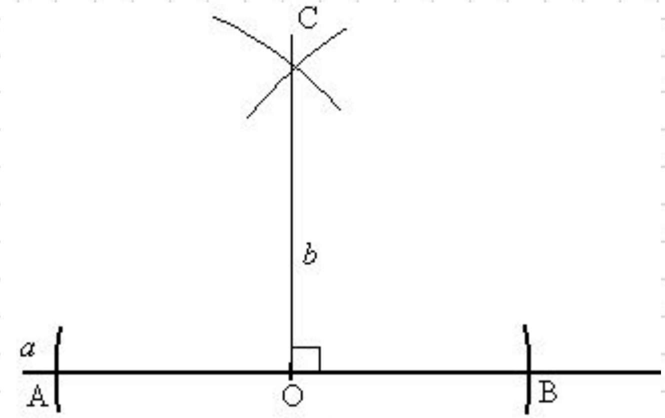


рис. 5

Доказательство: (рис.5а)
Треугольник ABC – равнобедренный по построению: AC = BC = AB. CO – медиана по построению: AO = OB. Следовательно, CO ⊥ AB.

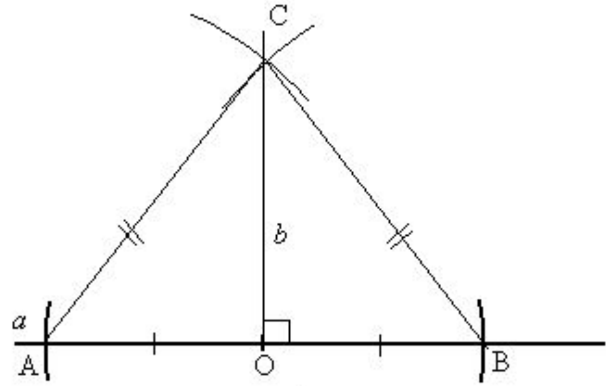


рис. 5а

Случай 2.

Анализ. (рис. 5b) Пусть O – данная точка, лежащая вне данной прямой a, b – прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная прямой a. Чтобы построить прямую, нам необходимо указать (построить) еще какую-либо ее точку. Для этого проанализируем: какими свойствами обладают точки прямой b ⊥ a? В частности, любые две равные наклонные к прямой a, проведенные из точки O, имеют одинаковые проекции. Поэтому, если OA = OB – такие наклонные, то должно быть AC = CB, где C – точка пересечения прямых a и b.

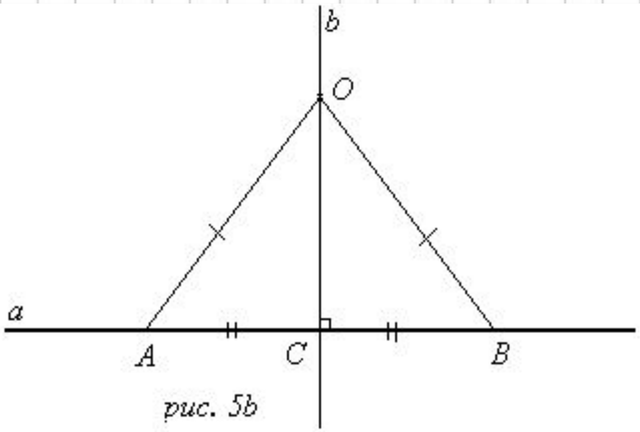


рис. 5b

Построение: (рис. 5с)

Проведем окружность с центром в точке О, пересекающую прямую а в двух точках А и В.

Проведем две окружности с центрами в точках А и В и радиусом, равным ОА. Пусть О1 – точка пересечения, отличная от точки О, (О и О1 лежат в разных полуплоскостях). Тогда прямая (ОО1) перпендикулярна данной прямой а.

- Через точку О проведем прямую, перпендикулярную данной.

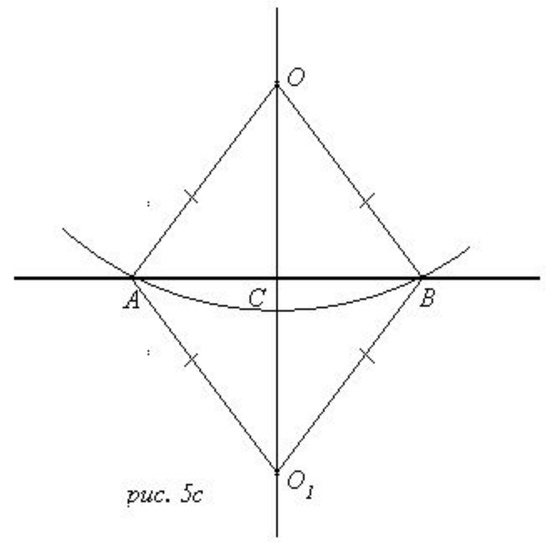


рис. 5с

Доказательство:

По построению АО = ОВ = ВО1 = АО1. Четырехугольник АОВО1 – ромб. ОО1и АВ – его диагонали. По свойству диагоналей ромба ОО1 ⊥ АВ.

Построение 6: построение прямой , проходящей через данную точку А параллельно данной прямой а.

Анализ. Если точка А лежит на прямой а, то задача не имеет решения, поэтому, пусть А лежит вне прямой а, и b || а – искомая прямая. Через точку А проведем секущую АВ, В ∈ а. По свойству параллельных прямых внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей равны. Верно и обратное: если внутренние накрест лежащие углы при прямых а и b и секущей АВ равны, то а || b. Отсюда способ построения.

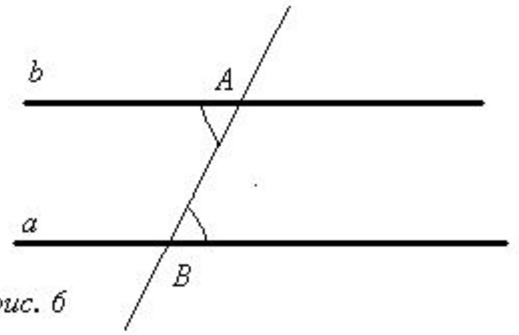


рис. 6

Построение. (рис. 6)

- Через заданную точку А и произвольную точку В прямой а проведем прямую АВ.
- Пусть С – произвольная, отличная от В точка прямой а. Построим от луча АВ в полуплоскость, не содержащую точку С, угол, равный углу АВС. Пусть AD – сторона построенного угла. Тогда прямая AD || а.
- Через точку А проведем прямую, параллельную данной.

Доказательство: (рис. 6) Доказательство следует из признака параллельности прямых (теорема: Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.), ввиду равенства углов АВС и BAD как внутренних накрест лежащих при прямых а, AD и секущей АВ.

4. Решение задач на построение

Задача 1. **Построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на основание.**

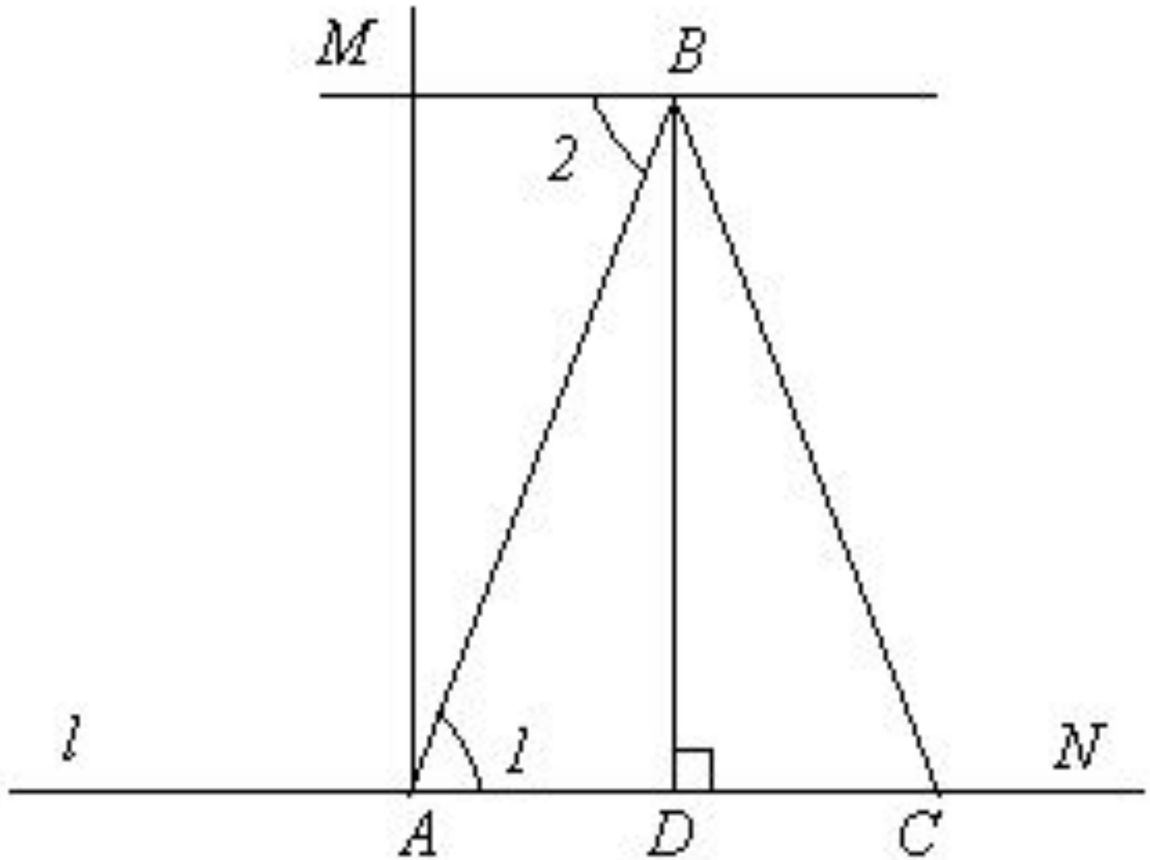


рис. 7а

Задача 2. **Построить треугольник по данному периметру и двум углам. По данному отрезку Р и двум углам требуется построить треугольник, периметр которого равен Р, и два его угла равны двум данным углам.**

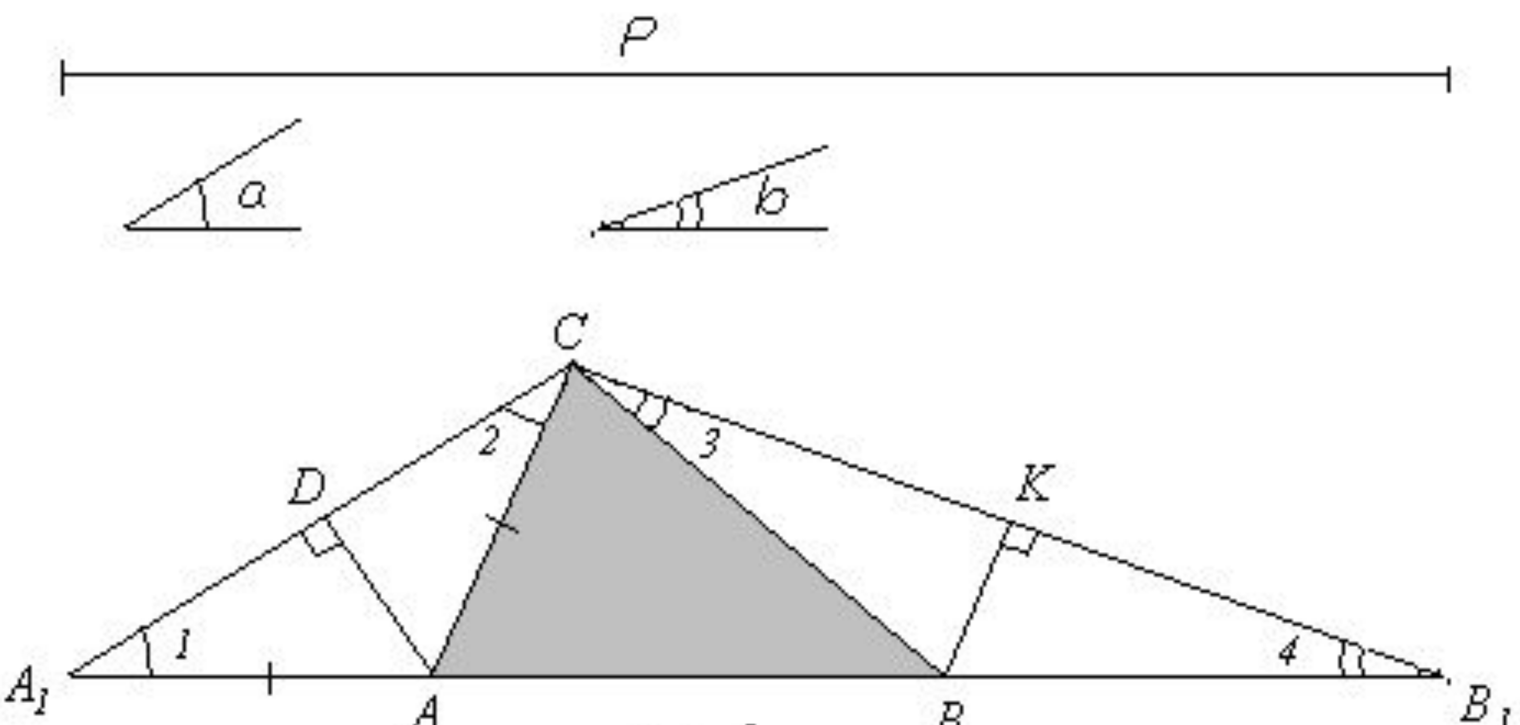


рис. 8

Задача 3. **Дан отрезок m и острый угол α. Построить прямоугольный треугольник с углом α, в котором разность катетов равна m.**

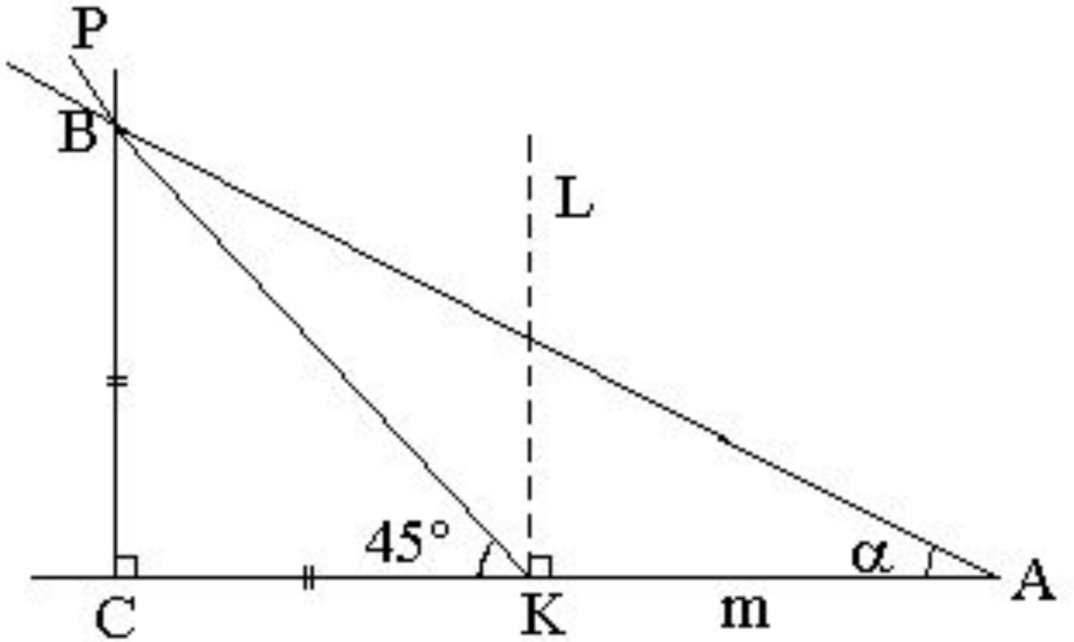


рис. 9а

Задача 4. **Даны два отрезка а и m. Построить равнобедренный треугольник с основанием а и медианой к боковой стороне m.**

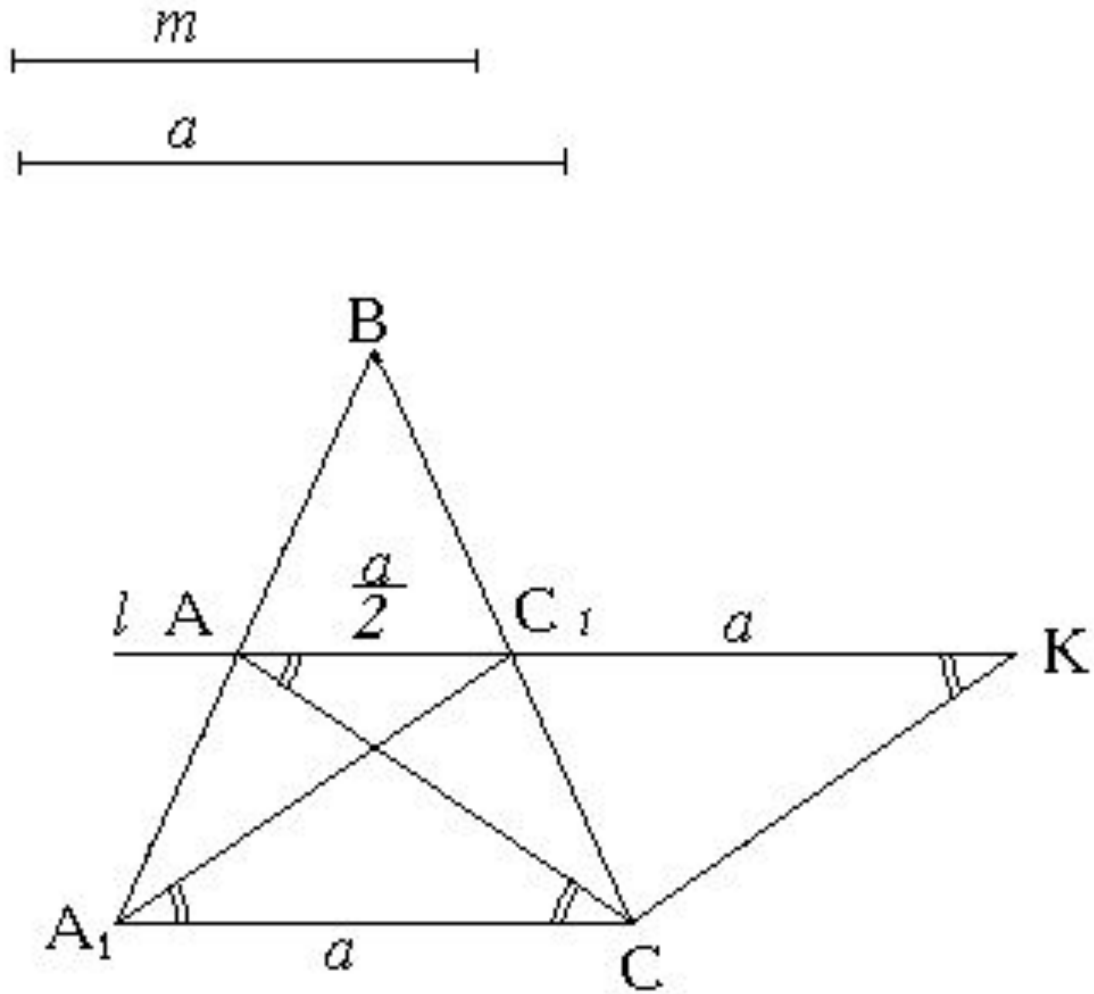


рис. 10

5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. **Через данную точку провести прямую под данным углом к данной прямой.**

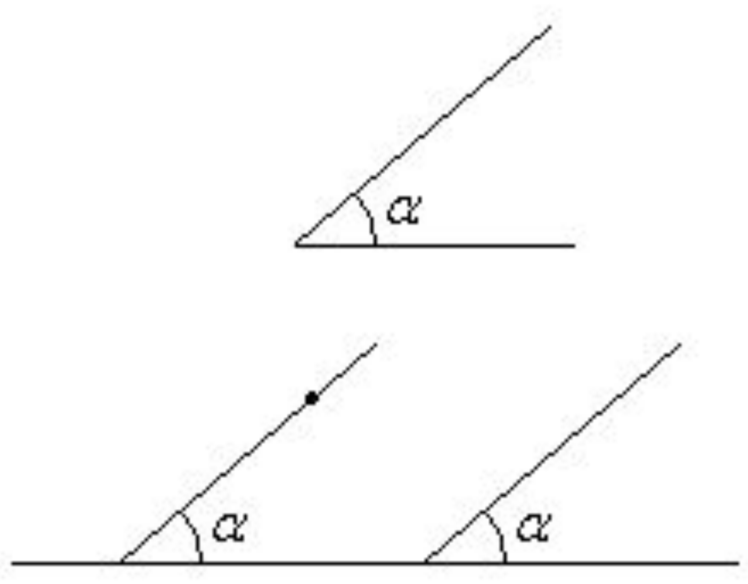


рис. 13

Указание к решению задачи **(рис. 13):** Построить угол, равный данному в произвольной точке данной прямой, одна из сторон которого лежит на этой прямой; затем через данную точку провести параллельную прямую.

Задача 2. **описать окружность, которая проходила бы через данную точку А и касалась бы данной прямой в данной на ней точке В.**

Указание к решению задачи (рис. 14):

К данной прямой восстановить перпендикуляр из данной точки В, построить серединный перпендикуляр к отрезку АВ (А – другая данная точка). Их пересечение – точка О – центр искомой окружности, ОВ – радиус.

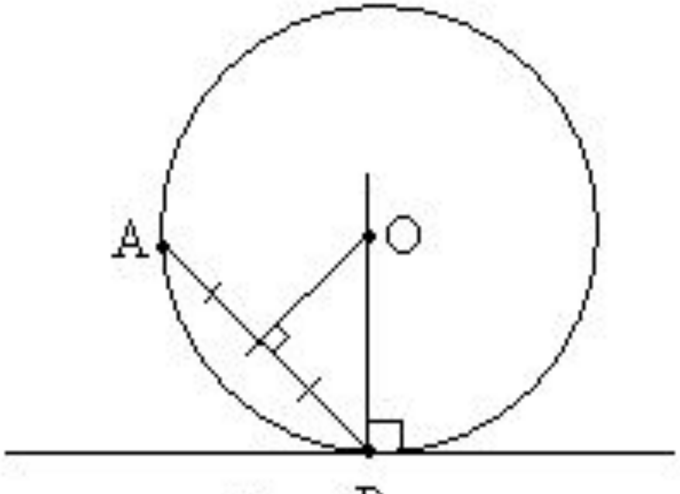


рис. 14

Задача 3. **Провести в треугольнике прямую, параллельную основанию так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами был равен сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.**

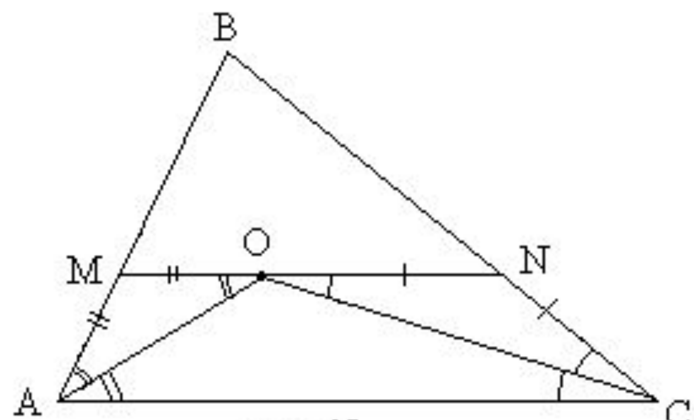


рис. 15

Указание к решению задачи (рис. 15): Через точку пересечения биссектрис провести прямую MN, параллельную основанию. Получим равнобедренные треугольники ONC и OMA (теорема о накрест лежащих углах при параллельных прямых, свойства сторон и углов в равнобедренном треугольнике).

Задача 4. **На прямой AB найти такую точку C, чтобы лучи CM и CN, проведенные из C через данные точки M и N, расположенные по одну сторону от AB, составляли с лучами CA и CB равные углы.**

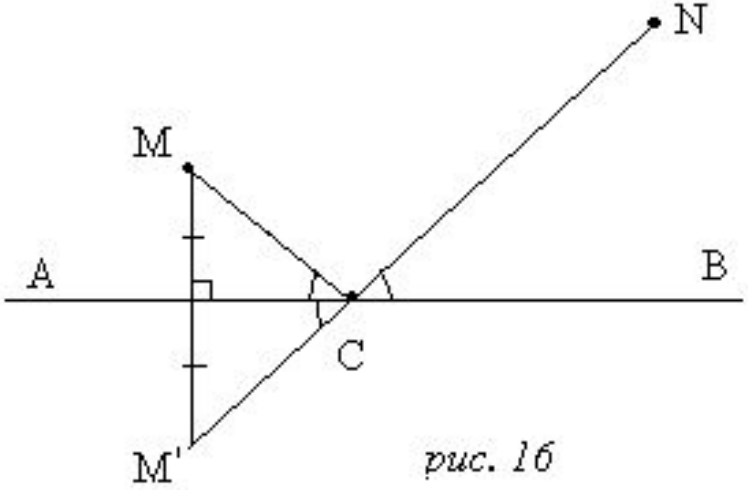


рис. 16

Указание к решению задачи (рис. 16):

Точка C – пересечение прямых M'N и AB, где M' – точка, симметричная M относительно AB.

Список литературы:

1. Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др., Геометрия 7-9, учебник для общеобразовательных учреждений, «Просвещение», М., 2009;
2. Р.С. Сазоненко, Теоремы и задачи по планиметрии с перекрестными ссылками 7-9 классы, Издательство института математики СО РАН, Новосибирск, 1998;
3. Т.С. Пиголкина, Математика, задание № 2 для 8-х классов ЗФТШ МФТИ, Долгопрудный, 2005;
4. http://www.college.ru/mathematics/courses/planimetry/content/chapter8/section/paragraph4/theory.html;
5. http://www.math.ru/lib/i/20/index.djvu?djvuopts&page=5.