Краткие справочно – информационные сведения

Основные обозначения

$\equiv$ означает «тождественно равно»;

$\cong$ или $\approx$ означает «тождественно равно»;

$\neq$ означает « не равно»;

$\parallel$ означает « параллельно»;

$\perp$ означает « перпендикулярно»;

(a, b) – интервал означает «$a < x < b$»;

$(a,b]$ - полуинтервал означает «$a < x \leq b$»;

$[a, b]$ – сегмент означает «$a < x < b$»;

$[a,b)$ – полусегмент означает «$a \leq x < b$»;

exp x - экспонента означает $exp\ x = e^x$

Математические константы

C = const - обозначение константы - произвольной постоянной;

$\boldsymbol{\pi}$ = **3.14159…** $\approx \mathbf{3.14}$ отношение длины окружности к диаметру;

e = **2.71828…** $\approx \mathbf{2.72}$ основание натурального логарифма.

Числовые множества

R – множество действительных чисел.

C - множество комплексных чисел.

N = $\{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \dots; \boldsymbol{n}; \dots\}$ - множество натуральных чисел.

Z = $\{\dots; \mathbf{-3}; \mathbf{-2}; \mathbf{-1}; \mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \dots\}$ **-** множество целых чисел.

Q = $\left\{\frac{m}{n},\ m \ni Z, n \ni Z, n \neq 0\right\}$ - множество рациональных чисел.

Признаки делимости целых чисел

Число без остатка делится:

на 2 - если его последняя цифра чётная (без остатка делится на 2);

на 3 - если сумма его цифр без остатка делится на 3;

на 5 - если оно оканчивается на 0 или на 5;

на10 - если его последняя цифра 0.

Правила действий с обыкновенными дробями

1. Сложение и вычитание простых дробей

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}=\frac{a^{\backslash f}}{m}+\frac{b^{\backslash q}}{n}-\frac{c^{\backslash r}}{p}=\frac{af+bq-cr}{\beta}$$

$(mnp\beta \neq 0, \quad a > m, \quad b > n, \quad c > p).$

Общий знаменатель β – наименьшее целое число, которое делится на все знаменатели слагаемых дробей без остатка - наименьшее общее кратное чисел m, n, p: β = Н.О.К. (m, n, p). Число β равно произведению наибольшего из этих чисел на простые делители следующего знаменателя, не являющиеся одновременно делителями первого выбранного знаменателя, умноженному на простые делители оставшегося третьего знаменателя, не являющиеся одновременно делителями первых двух знаменателей.

Дополнительные множители

$$f=\beta : m, \qquad q=\beta : n, \qquad r=\beta : p.$$

П р и м е р 1: Вычислить $A = \frac{11}{81} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60}$.

Р е ш е н и е. Разложим знаменатели на простые делители

	81	3		**12**	2		**60**	2
=>	27	3	И	6	2	и	30	2
	9	3		3	3		15	3
	3	3		1			5	5
	1						1	

Общий знаменатель
□□ = Н. О. К. (81,12, 60) =
= 81 x (2x2) x 5 = 1620.

Дополнительные множители
f = 1620 : 81 = 20, q = 1620: 12 = 135, r = 1620 : 60 = 27 =>

$$A = \frac{11}{81} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60} = \frac{11^{\backslash 20}}{81} - \frac{5^{\backslash 135}}{12} + \frac{7^{\backslash 27}}{60} = \frac{11x20 - 5x135 + 7x27}{1620} =$$

$$= \frac{220 - 675 + 189}{1620} = -\frac{266}{1620} = -\frac{133x2}{810x2} = -\frac{133}{810}.$$

О т в е т: $A = -\frac{133}{810}$.

Умножение и деление

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a \cdot b}{m \cdot n} \quad (mn \neq 0),$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} = \frac{a \cdot n}{m \cdot b} \ (mnb \neq 0)$$

- **1. Модуль действительного числа и его свойства.**

$$|a| = \begin{bmatrix} a & \text{при} & a \geq 0, \\ -a & \text{при} & a < 0. \end{bmatrix}$$

$$|a| \geq 0, \qquad |ab| = |a| \cdot |b|, \qquad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$|-a| = |a|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0), \qquad a^2 + b^2 \geq 2|ab|.$$

* Арифметический корень $|a| = \sqrt{a^2}$

Умножение и деление

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a \cdot b}{m \cdot n} \quad (mn \neq 0),$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} = \frac{a \cdot n}{m \cdot b} \quad (mnb \neq 0)$$

- **1. Модуль действительного числа и его свойства.**

$$|a| = \left[\begin{array}{lll} a & \text{при} & a \geq 0, \\ -a & \text{при} & a < 0. \end{array}\right]$$

$$|a| \geq 0, \qquad |ab| = |a| \cdot |b|, \qquad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$|-a| = |a|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0), \qquad a^2 + b^2 \geq 2|ab|.$$

* Арифметический корень $|a| = \sqrt{a^2}$

2. Определение и свойства степени

1. $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$, 2. $a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n}$,

3. $a^n a^m = a^{n+m}$, 4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

5. $$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} \dfrac{a^{n-m}}{1} = a^{n-m}, & \text{при} \quad n > m \quad (n - m > 0), \\ \dfrac{1}{a^{m-n}}, & \text{при} \quad m > n \quad (m - n > 0); \end{cases}$$

6. $\frac{1}{a^c} = a^{-c} \ (a \neq 0)$, 7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$,

8. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0)$, 9. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

10. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($\sqrt[2]{a}$ обозначают $\sqrt{a}$, $a \geq 0$)

11. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, 12. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, 13. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{m \cdot k}}$.

* $\sqrt{a^2} = \sqrt[2]{a^2} = \sqrt[2]{(-a)^2} = |a|$ — арифметический корень

3. Формулы сокращённого умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы;

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности;

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ – разность квадратов;

4. $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$ – сумма квадратов

5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы;

6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности;

7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов;

8. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов..

4. Арифметическая прогрессия

- Последовательность чисел вида $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{2d},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{3d},\ \ldots\}$ называется *арифметической прогрессией.*

Константа $d \neq 0$ называется *разностью арифметической прогрессии.*

$\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1}) \cdot \boldsymbol{d},\quad n = 1; 2; 3; \cdots$ - *общий член прогрессии.*

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{\boldsymbol{a_{n-1}} + \boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{2}}$$ - *характеристическое свойство прогрессии.*

Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

$$\boxed{\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n} = \frac{(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_n})\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} = \frac{[\boldsymbol{2a_1}+(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{d}]\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}}.$$

5. Геометрическая прогрессия

- последовательность чисел $\{b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3, \dots\}$

- $q \neq 0$ - *знаменатель геометрической прогрессии.*

$b_n = b_{n-1} \cdot q, b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ n = 1; 2; 3; \dots$, - *общий член прогрессии.*

Геометрическая прогрессия называется:

возрастающей, если $|q| > 1$; *убывающей*, если $0 < |q| < 1$;

знакочередующейся, если $q < 0$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q}}\ .$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\boxed{S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \cdots b_1 q^n + \cdots = \frac{b_1}{1-q}}\ .$$

6. Логарифмы и их свойства

При $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ $\boxed{a^c = b \quad <=> \quad log_a b = c.}$

В переводе с французского слово «*логарифм*» означает *показатель*. Обозначают :

$\boxed{log_{10} a = lg\ a}$ - десятичный логарифм,

$\boxed{log_e b = ln\ b}$ – *натуральный логарифм*, основание которого - трансцендентное число $e = 2.71828... \approx 2.72.$

Основные свойства логарифмов

$\boxed{a^{log_a b} = b}$ - основное логарифмическое тождество.

1. $log_a a = 1;$
2. $log_a 1 = 0:$
3. $log_a (b \cdot c) = log_a b + log_a c;$
4. $c \cdot log_a b = log_a (b^c);$
5. $log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot log_a b;$
6. $log_a \left(\frac{b}{c} \right) = log_a b - log_a c$
7. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a};$
8. $log_a b = \frac{1}{log_b a}.$

7. Решения квадратного уравнения

7.1 Полное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

с действительными (вещественными) коэффициентами $a \neq 0,\ b,\ c$

и **дискриминантом** $D = b^2 - 4ac$ *имеет*:

при $D > 0$ – *два различных действительных корня* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

при $D = 0$ – *один двукратный действительный корень* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;

при **D** < 0 – *два различных мнимых корня* (пара комплексно – сопряжённых чисел)

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{-D}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{-D}}{2a}.$$

З а м е ч а н и е .

- Действительные (вещественные) числа изображаются десятью арабскими знаками - цифрами 0;1;2; … ; 9. Вводится ещё один знак – так называемая ***мнимая единица***, которая обозначается символом «i» (в технической литературе «**j** »), и удовлетворяет условию $\boxed{i^2 = -1.}$
Выражение $z = \alpha + i\,\beta$ с действительными (вещественными) числами α и β называется ***комплексным или мнимым числом***.
Число $\bar{z} = \alpha - i\,\beta$ называется комплексно-сопряжённым числу z.

П р и м е р. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Р е ш е н и е. Так как $a = 1$, $b = -4$, $c = 13$, $D = -36$, $D < 0$, имеем $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$.

О т в е т: корнями квадратного уравнения являются комплексно – сопряжённые числа $x_1 = 2 + 3i$ и $x_2 = 2 - 3i$.

7.2. П р и в е д ё н н о е к в а д р а т н о е у р а в н е н и е

$$x^2+px+q=0$$

- Коэффициенты p, q – действительные (вещественные числа).

Корни определяются по формуле $\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$

7.3. Т е о р е м а В и е т а

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту p с обратным знаком, а произведение - свободному члену q:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

П р и м е р. В уравнении $x^2-6x+8=0$ имеем $p=-6$, $q=8$, корни

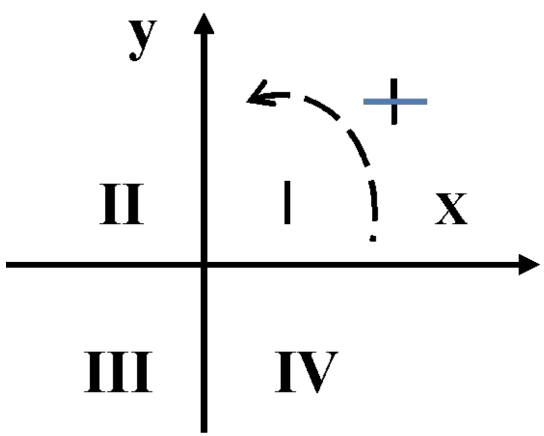
$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1=\{3-1;3+1\}=\{2;4\},\qquad \begin{cases} 2+4=6=-p, \\ 2\cdot4=8=q/ \end{cases}$

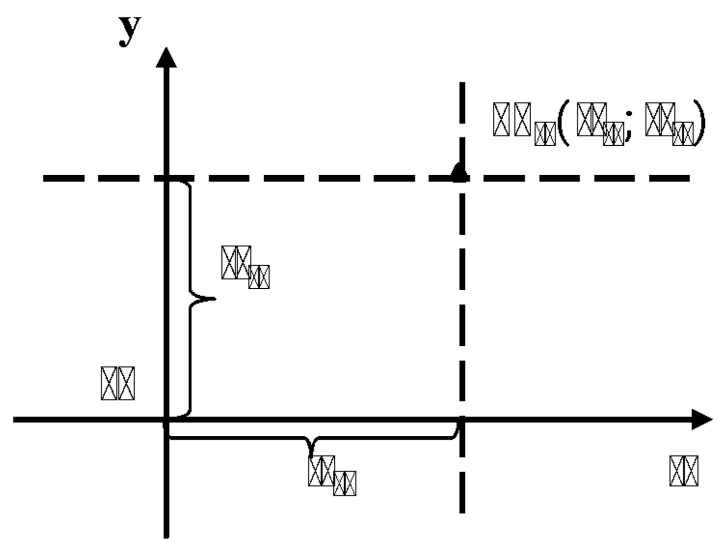
8.1. *Декартова система координат на плоскости* –

в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^2 = \{-\infty < \boldsymbol{x} < +\infty;\ -\infty < \boldsymbol{y} + \infty\}$:

пара взаимно ортогональных ориентированных против часовой стрелки

четверти или квадранты



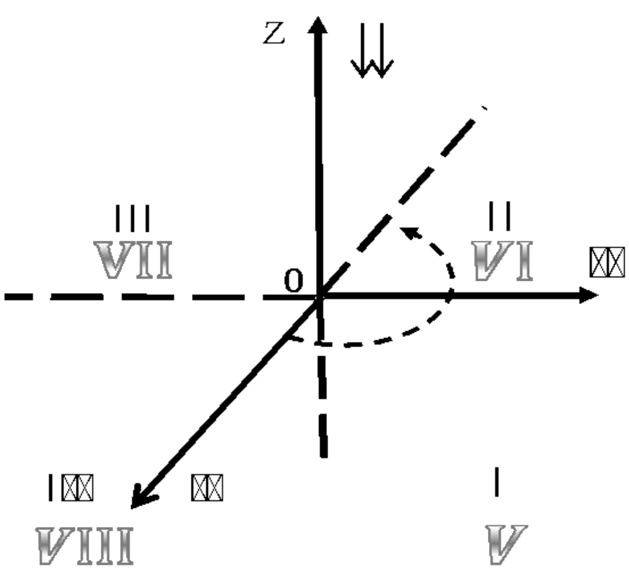


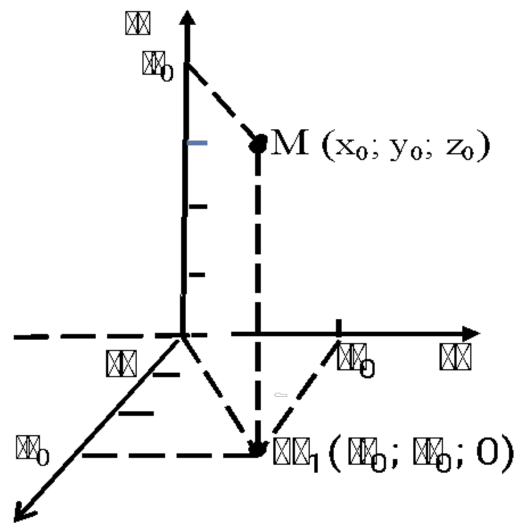
8.2. Декартова система координат

в евклидовом пространстве $R^3 = \{x; y; z\}$:

x – а б с ц и с с а, y – о р д и н а т а, z – а п п л и к а т а

о к т а н т ы I – VIII





З а м е ч а н и е. Единица масштаба по оси OX по длине составляет примерно 0.8 от одинаковых единиц масштаба по осям OY и OZ.

9. Тригонометрия

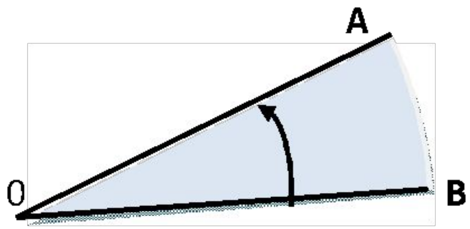


Рис. 1

Плоский угол - часть плоскости между двумя лучами, выходящими из одной точки (вершины).

1 - один градус – центральный угол [illegible] AOB, опирающийся на дугу длиной [illegible] $= \frac{[illegible]}{360}$, где C - длина окружности;

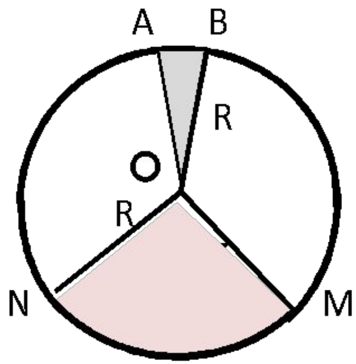


Рис. 2

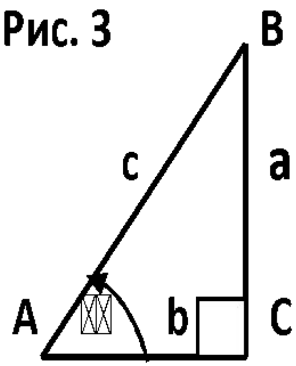
1- один радиан – центральный угол [illegible] MON, опирающийся на дугу длиной [illegible] = R.

$C \sim 360^0 \sim 2$ [illegible] =>

[illegible]° $= \frac{[illegible]}{180}$ *рад.* ≈ [illegible], [illegible] ***рад.***, [illegible] ***рад.*** $= \frac{180^\circ}{[illegible]} = 57^\circ 17'... \approx$ [illegible]°

9.1. Тригонометрические функции острого угла

Рис. 3



$\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$

Синус: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{длина противолежащего } \alpha \text{ катета}}{\text{длина гипотенузы}}$

Косинус: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{длина прилежащего к } \alpha \text{ катета}}{\text{длина гипотенузы}}$

Тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{длина противолежащего катета}}{\text{длина прилежащего катета}}$;

Котангенс: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{длина прилежащего катета}}{\text{длина противолежащего катета}}$

Секанс: $\sec\alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{длина гипотенузы}}{\text{длина прилежащего катета}}$;

Косеканс: $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{длина гипотенузы}}{\text{длина противолежащего катета}}$

9.2 Таблица значений тригонометрических функций «острого» угла

Угол [illegible] (радиан/ градус)	0 / 0^0	[illegible] / [illegible] 30^0	[illegible] / [illegible] 45^0	[illegible] / [illegible] 60^0	[illegible] / [illegible] 90^0
sin [illegible]	ξ $\overline{0}$ [illegible] 2 [illegible]	ξ $\overline{1}$ [illegible] 2 [illegible]	ξ $\overline{2}$ [illegible] 2 ξ [illegible]	ξ $\overline{3}$ [illegible] 2 ξ [illegible]	ξ $\overline{4}$ [illegible] 2 [illegible]
cos [illegible]	ξ $\overline{4}$ [illegible] 2 [illegible]	ξ $\overline{3}$ [illegible] 2 ξ [illegible]	ξ $\overline{2}$ [illegible] 2 ξ [illegible]	ξ $\overline{1}$ [illegible] 2 [illegible]	ξ $\overline{0}$ [illegible] 2 [illegible]
tg [illegible]	0	ξ [illegible]	1	ξ [illegible]	[illegible] $+\infty$
ctg [illegible]	[illegible] $+\infty$	ξ [illegible]	1	ξ [illegible]	0

9.3 Тригонометрические функции произвольного угла

$$\mathbf{0 + 2\pi k \le \alpha \le \pi/2 + 2\pi k,\quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots}$$

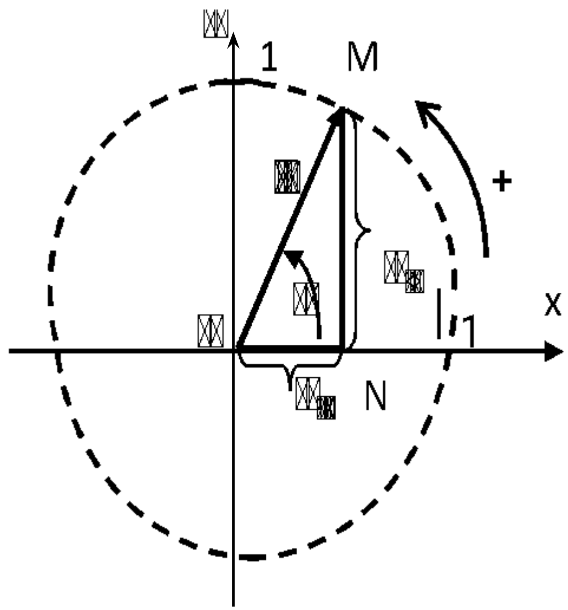


Рис. 4

$\bar{e} = \overrightarrow{OM}$ - единичный радиус - вектор

$|\bar{e}| = |\overrightarrow{OM}| = 1.$ Из $\triangle OMN$ =>

$\cos\alpha = x_M/1,\ \sin\alpha = y_M/1.$

=> $\overrightarrow{OM} = \{x_M; y_M\} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$

Синусом и косинусом угла, образованного единичным радиус - вектором с положительным направлением оси абсцисс, являются соответственно ордината и абсцисса этого вектора.

При $x_M \ne 0$: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y_M}{x_M}$, $\sec\alpha = \dfrac{1}{x_M}$; при $y_M \ne 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{x_M}{y_M}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{y_M}$.

9.4 Формулы приведения

	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=2\pi\pm\alpha$
sinβ	cosα	∓sinα	-cosα	±sinα
cosβ	∓sinα	-cosα	±sinα	cosα
tgβ	∓ctgα	±tgα	∓ctgα	±tgα
ctgβ	∓tgα	±ctgα	∓tgα	±ctgα

Пример 3. $$\sin 300^0 = \begin{cases} \sin(270^0 + 30^0) = -\cos 30^0 = -\sqrt{3}/2, \\ \sin(360^0 - 60^0) = -\sin 60^0 = -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Значение тригонометрической функции

$$f(360^0 k \pm \beta) = \pm f(\beta), \qquad k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots .$$

Пример 4.

$$\mathrm{tg}\,585^0 = \begin{cases} \mathrm{tg}(360^0 + 225^0) = \mathrm{tg}\,225^0 = \mathrm{tg}(180^0 + 45^0) = \mathrm{tg}\,45^0 = 1, \\ \mathrm{tg}(720^0 - 135^0) = -\mathrm{tg}\,135^0 = -\mathrm{tg}(180^0 - 45^0) = \mathrm{tg}\,45^0 = 1. \end{cases}$$

9.5 Основные тригонометрические формулы

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha,$$

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$$

9.6. Тригонометрические функции двойного аргумента

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$$

$$tg\, 2x = \frac{2tg\, x}{1 - tg^2 x}$$

$$\sin 2x = \frac{2\, tg\, x}{1 + tg^2 x}$$

$$ctg\, 2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctg\, x}$$

9.7 Универсальные тригонометрические подстановки

(выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла при $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$)

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad tg\,\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}};$$

9.8 Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \;\Leftrightarrow\; \boxed{1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \;\Leftrightarrow\; \boxed{1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}$$

9.9. Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

9.10. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}$$

9.11. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x + y) + \sin(x - y)\right]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$$

[illegible]

Пифагор
родился в 580 г.
умер в 500 г. до н.э.

Преклонение перед числом в пифагорейском союзе сопровождалось мистическими измышлениями, зачатки которых были заимствованы совместно с началами математических знаний из стран Ближнего Востока… .

Космос (понятие, введенное пифагорейцами) - это гармония, совершенство, строй, мера. Вселенная, созданная числом и противоположными принципами (конечность - бесконечность), ведет себя логически, соразмерно необходимости и меры… .

9.12. Обратные тригонометрические функции

-

$Arcsin$ x - («арка», дуга) - это величина, синус которой равен x.

$Arccos\ x$ - это величина («арка», дуга), косинус которой равен x, и т. д.

$$\sin(Arcsin\ x) = x, \quad \cos(Arccos\ x) = x, \quad tg(Arctg\ x) = x, \quad \ldots$$

Функция	Область определения	Область изменения	Главное значение
$y = Arcsin\ x = (-1)^n \arcsin x + \pi n.$	$-1 \le x \le 1,$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2},$	$\arcsin x.$
$y = Arccos\ x = \pm \arccos x + 2\pi n.$	$-1 \le x \le 1,$	$0 \le y \le \pi,$	$\arccos x.$
$y = Arctg\ x = arctg\ x + \pi n.$	$-\infty < x < +\infty,$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$	$arctg\ x,$
$y = Arcctg\ x = arcctg\ x + \pi n$	$-\infty < x < +\infty,$	$0 < y < \pi,$	$arcctg\ x.$

9.13. Решения тригонометрических уравнений

- $\sin x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$

$\cos x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$tg\, x = a, \quad x = arctg\; a + \pi n, \quad n \in Z$

$ctg\; x = a, \quad x = arcctg\; a + \pi n, \quad n \in Z$

Частные случаи

1) $sin\, x = 0, \quad x = \pi n;$

2) $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

3) $\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

4) $cos\, x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

5) $\cos x = 1, \quad x = 2\pi n\;;$

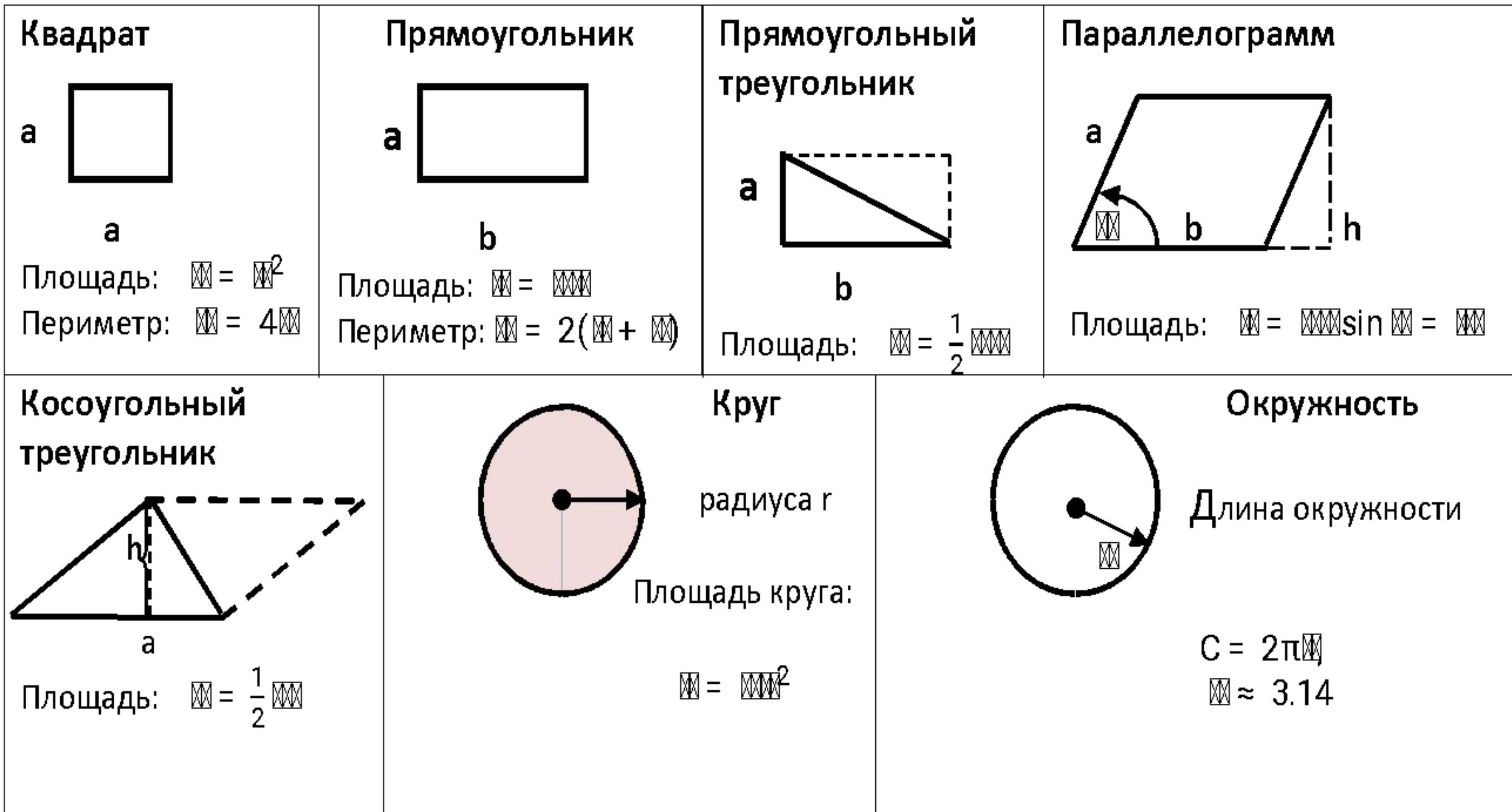
6) $\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n$

7) $tg = 0, \quad x = \pi n\;;$

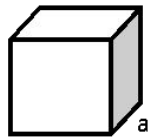
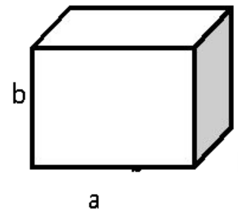
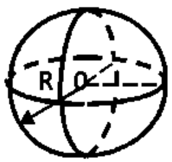
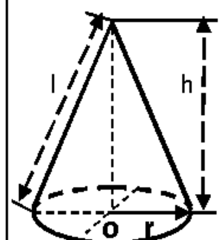
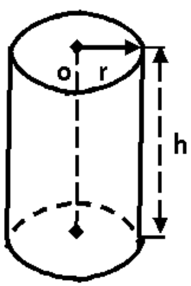
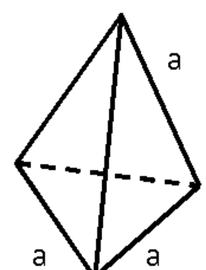
8) $ctg\; x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

10. Геометрия

10.1 Некоторые из основных геометрических фигур на плоскости



10.2 Некоторые из основных геометрических фигур в пространстве

Куб **(гексаэдр)**  Объём: $V = a^3$ $L = 12a$ Длина каркаса: Площадь поверхности: $S = 6a^2$	**Параллелепипед**  Объём $V = abc$ Длина каркаса $L = 4(a + b + c)$ Площадь поверхности: $S = 2(ab + bc + ac)$
Шар  Объём $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Площадь поверхности Место для фшара (площадь сферы): $S=4\pi R^2$	**Прямой круговой конус**  Объём $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Площадь поверхности: полной $S_{пол} = \pi r l + \pi r^2$; боковой $S_{бок} = \pi r l$
Прямой круговой цилиндр  Объём $V = \pi r^2 h$ Площадь поверхности: боковой $S = 2\pi r h$; полной $S = 2\pi r(r + h)$	**Правильная четрёхугольная пирамида (тетраэдр)**  Объём $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \approx 0.1179\, a^3$ Площадь полной поверхности $S = a^2\sqrt{3} \approx 1.7321\, a^2$