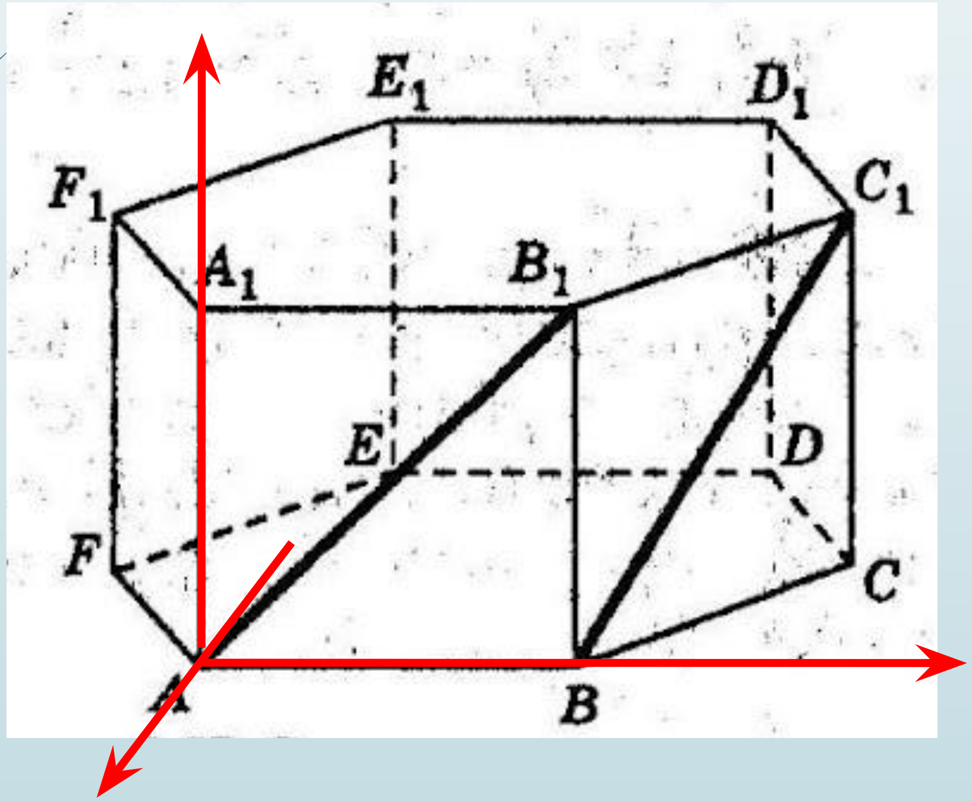
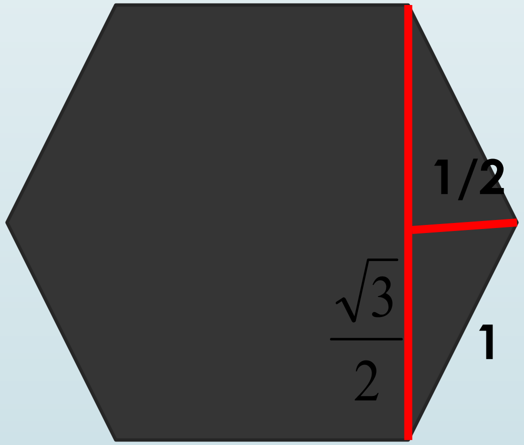
Задача 1 (угол между прямыми)

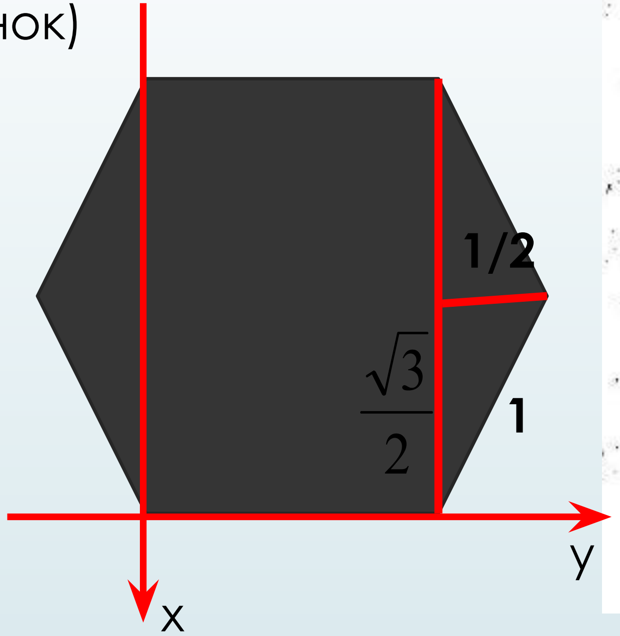
- В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой раны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1

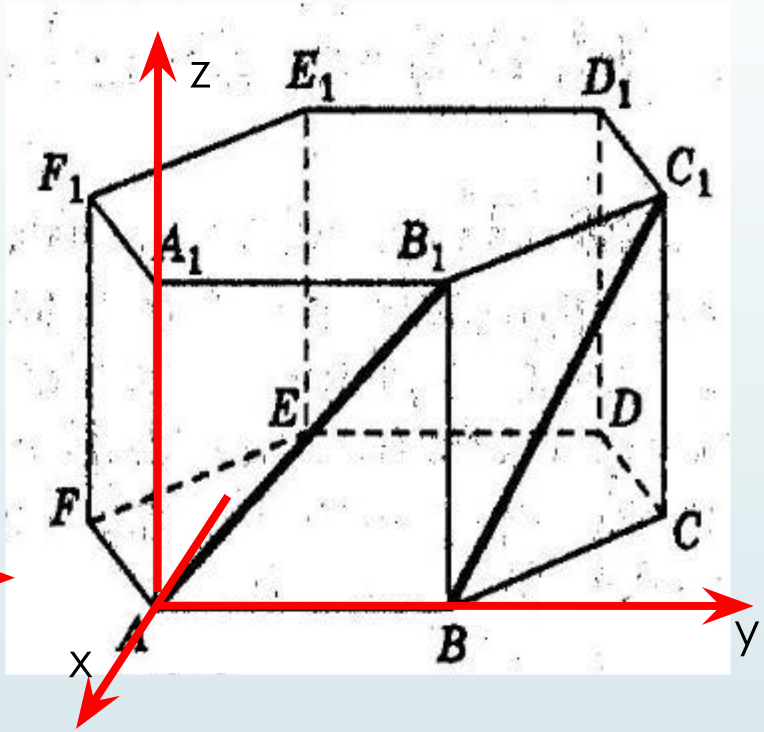




Решение задачи 1

Введем прямоугольную систему координат (см. рисунок)





$A(0;0;0)$

$B(0;1;0)$

$B_1(0;1;1)$

$C_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1)$

$\overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}$

$\overrightarrow{BC_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right\}$

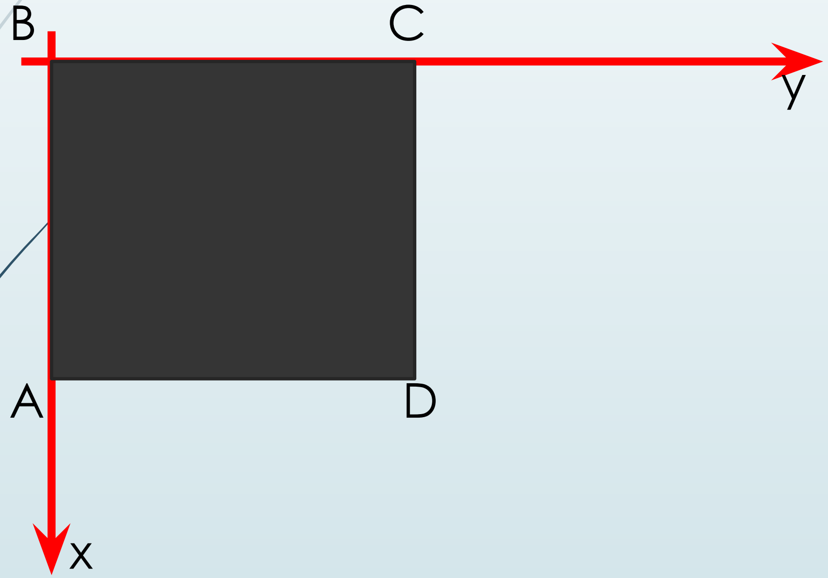
$$\cos\alpha=\left|\frac{0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}+1}{\sqrt{0+1+1}\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+1}}\right|=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

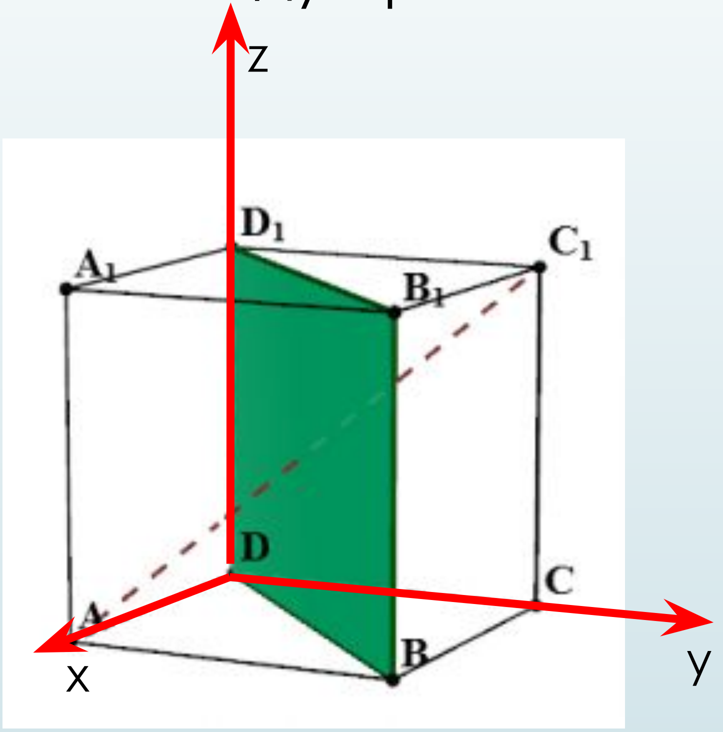
Ответ: 0,75

Посмотреть формулу

Задача 2 (угол между прямой и плоскостью).

В кубе A...D1 найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BDD_1.





$$AC \perp DB(\textit{диагонали\_квадрата})$$

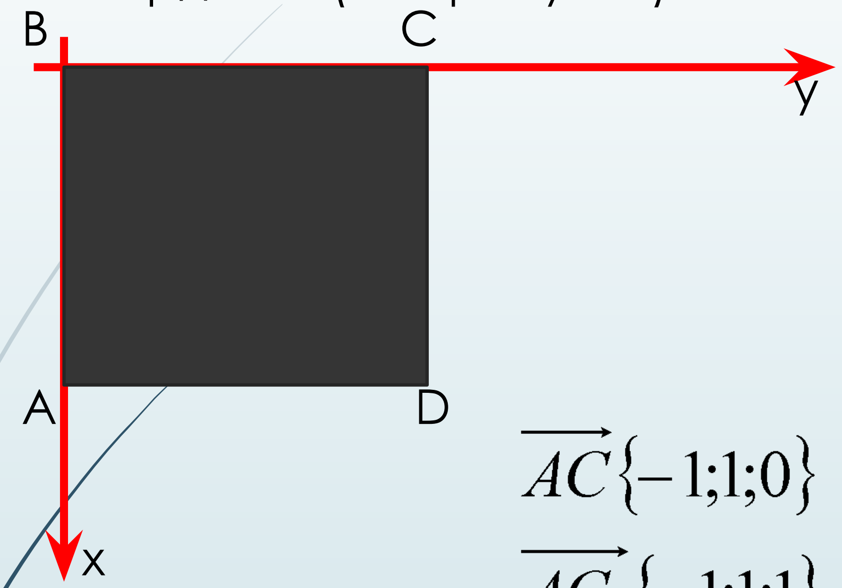
$$AC \perp BB_1(\textit{т.к.} BB \perp ABC)$$

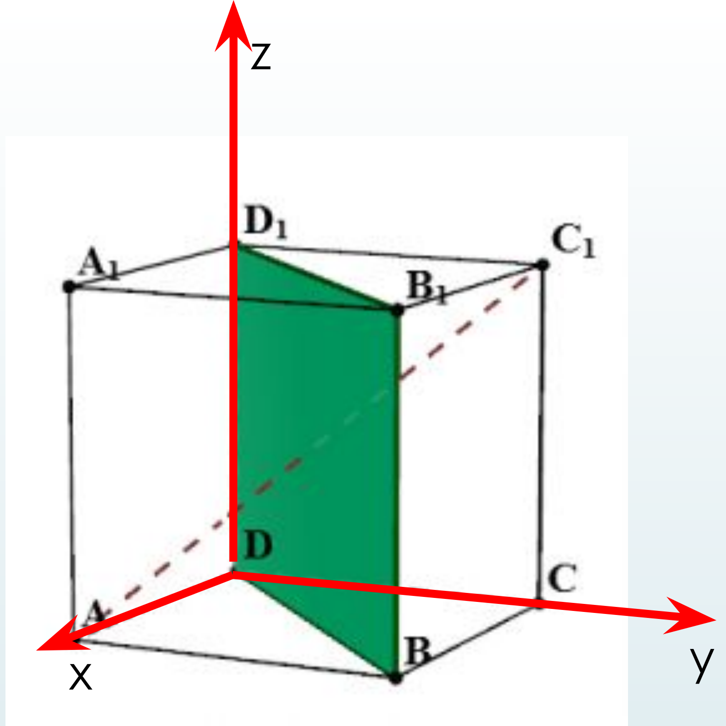
$$\textit{значит}, AC \perp BB_1D_1D(\textit{признак\_перпенд.\_прямой}$$

$$\textit{и\_плоскости})$$

Решение задачи 2

Введем прямоугольную систему координат (см. рисунок)





Пусть α – искомый угол)

$$\overrightarrow{AC}\{-1;1;0\}$$

$$\overrightarrow{AC_1}\{-1;1;1\}$$

A(1;0;0)
C(0;1;0)
C_1(0;1;1)

$$\sin\alpha = \cos(\overrightarrow{AC}\hat{;}\,\overrightarrow{AC_1}) = \frac{|1+1+0|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

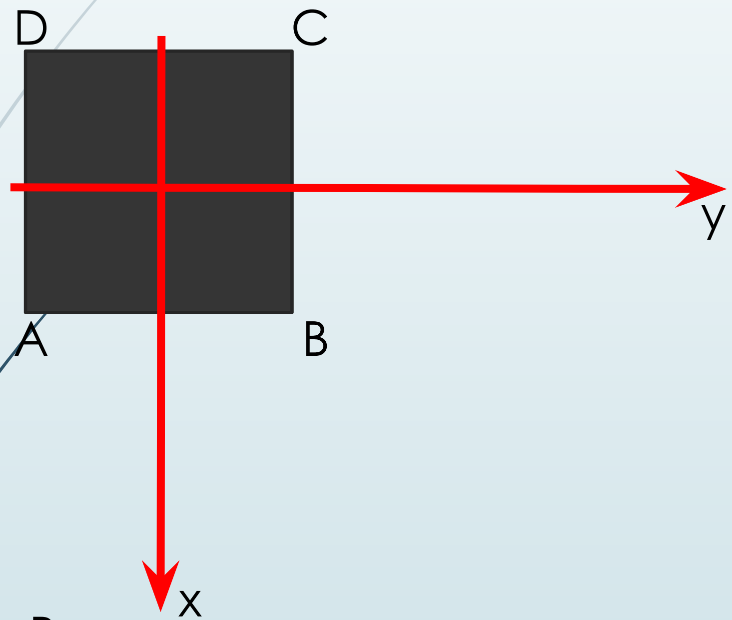
$$tg\alpha = \sqrt{2}$$

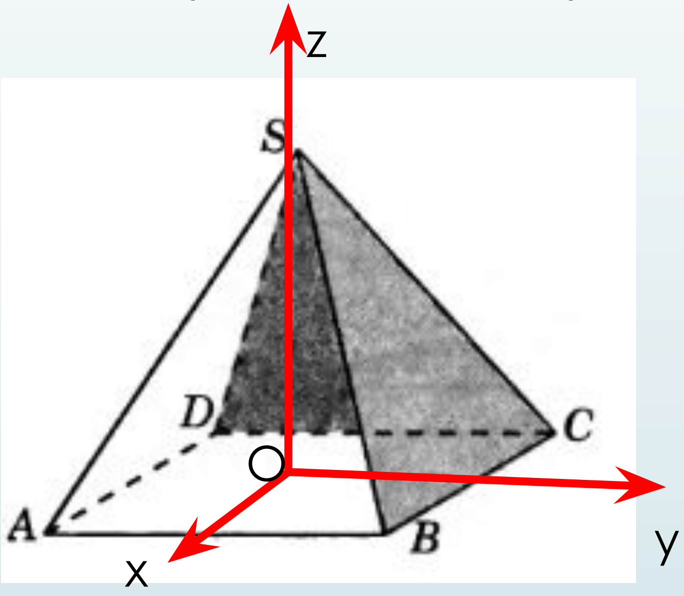
Ответ: $\sqrt{2}$

[Посмотреть формулу]

Задача 3.Угол между плоскостями

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SBC и SCD.



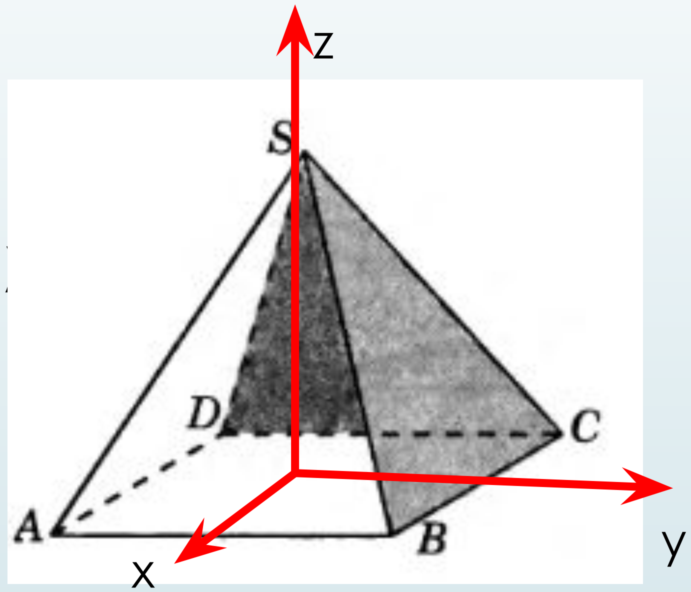


Введем прямоугольную систему координат (см.рис.)
Найдем угол между перпендикулярами к плоскостям SBC и SCD. Обозначим искомый угол a.
Составим уравнения плоскостей.

Решение задачи 3

(1) ax+by+cz+d=0 – общий вид уравнения плоскости

$$вектор\_\vec{n}\{a;b;c\}\perp плоскости$$



Т.к. точки S,B,C принадлежат плоскости SBC, то их координаты удовлетворяют уравнению (1)

Составим и решим систему уравнений

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+d=0;\\ -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+d=0;\\ \frac{\sqrt{2}}{2}c+d=0\end{cases}$$

Неизвестных 4, уравнений 3

Пусть d=1

Решение задачи 3(продолжение)

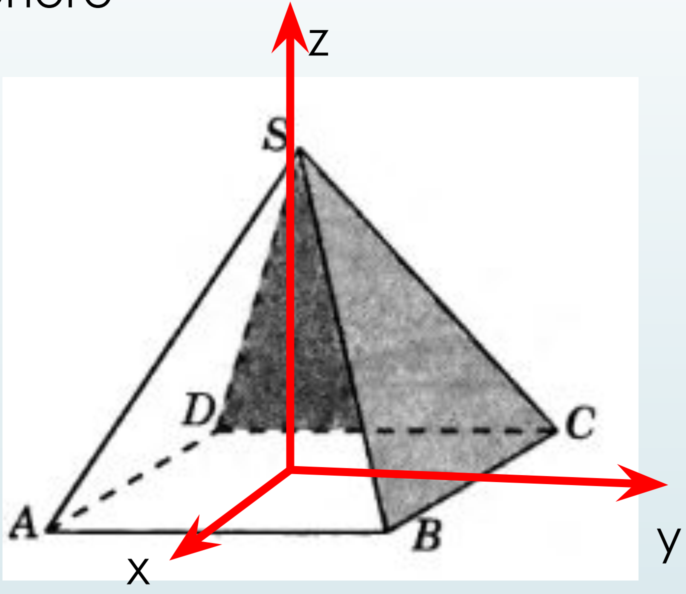
Аналогично найдем координаты
Вектора, перпендикулярного
плоскости SCD

$$\begin{cases} a=0; \\ b=-2; \\ c=-\sqrt{2}; \\ d=1. \end{cases}$$

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$D\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$



$$\vec{n}\{0;-2;-\sqrt{2}\}\perp SBC$$

$$\vec{m}\{2;0;-\sqrt{2}\}\perp SCD$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}c+d=0; \\ -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+d=0; \\ -\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=d=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2; \\ b=0; \\ c=-\sqrt{2}; \\ d=1. \end{cases}$$

$$\cos\alpha=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{4+2}\sqrt{4+2}}=\frac{1}{3}$$

$$Ответ:\frac{1}{3}$$

Задача 4 (Расстояние от точки до прямой)

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до Прямой BG, где G – середина ребра SC

$$SO=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

$$S(0;0;\sqrt{3})$$

$$C(0;1;0)$$

$$G\left(0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$F(0;-1;0)$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$\Delta FBG$$

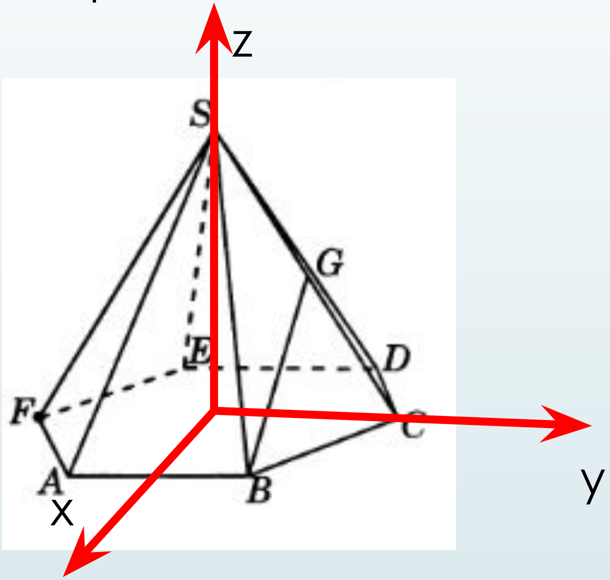
$$FB=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+0}=\sqrt{3}$$

$$FG=\sqrt{0+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

$$BG=\sqrt{\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Delta BFG-\textit{равнобедренный}$$

$$FH=\sqrt{3-\frac{6}{16}}=\sqrt{\frac{21}{8}}=\frac{\sqrt{42}}{4}$$



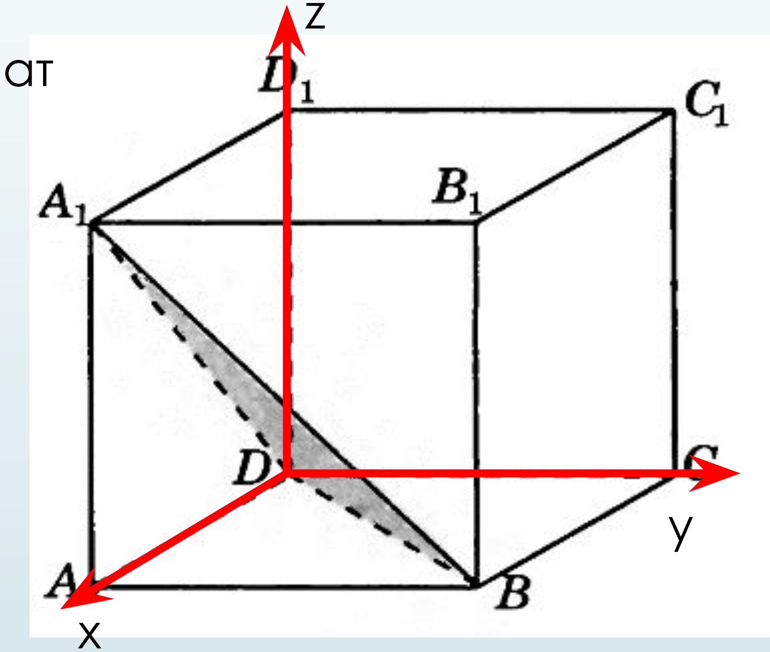
$$\textit{Ответ}:\frac{\sqrt{42}}{4}$$

Задача 5 (Расстояние от точки до плоскости)

В единичном кубе A…D_1 найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1

<u>Решение:</u>

Введем прямоугольную систему координат



$A_1(1;0;1)$

$D(0;0;0)$

$B(1;1;0)$

$A(1;0;0)$

$$\begin{cases} a+c+d=0 \\ d=0 \\ a+b+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases}$$

$$\rho=\frac{|1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$Ответ: \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Задача 6 (Расстояние от точки до плоскости)

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$C(0;1;0)$$

$$SO=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

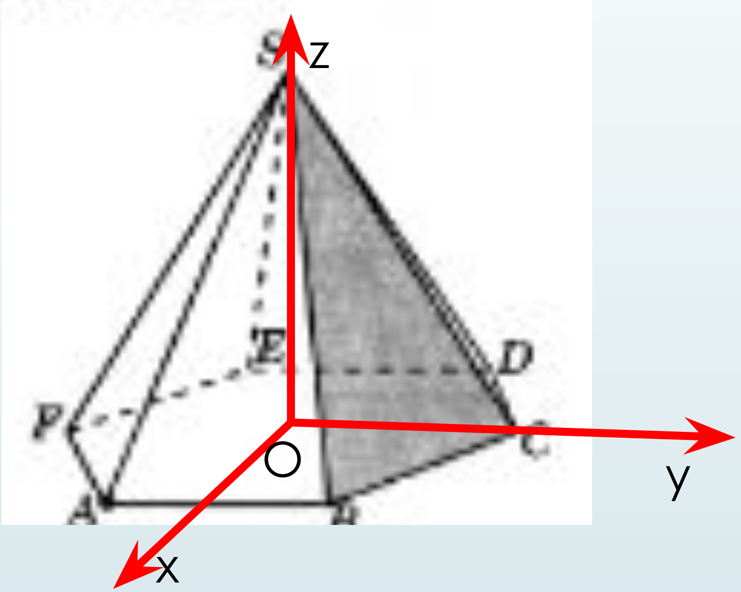
$$S(0;0;\sqrt{3})$$

Уравнение _ плоскости

$SBC:$

$$\begin{cases}\sqrt{3}c+d=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}b+d=0\\ b+d=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=3\\ c=\sqrt{3}\\ d=-3\end{cases}$$



$$\rho=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-3\right|}{\sqrt{3+9+3}}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Ответ : $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$