Системы счисления

учитель:
Михайлова Ольга Михайловна

*

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, …   I, V, X, L, …

Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

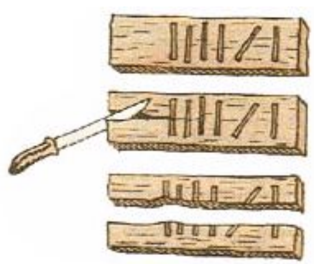
Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места *(позиции)* в записи числа;
- **позиционные** – зависит…

*

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, …)



Десятичная египетская система счисления:

чёрта – 1

хомут  – 10

верёвка  – 100

лотос  – 1000

палец  – 10000

лягушка  – 100000

человек  – 1000000

 = ?

*

Непозиционные системы

Римская система счисления:

I – 1 (палец),

V – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),

X – 10 (две ладони),

L – 50,

C – 100 (*Centum*),

D – 500 (*Demimille*),

M – 1000 (*Mille*)

*

Римская система счисления

Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна**!) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

MDC**X**L**I**V = 1000 + 500 + 100 **– 10** + 50 **– 1** + 5 = 1644

2389 = 2000 + 300 + 80 + 9

M M **CCC** **LXXX** **IX**

2389 = M M C C C L X X X I X

*

Римская система счисления

Недостатки:

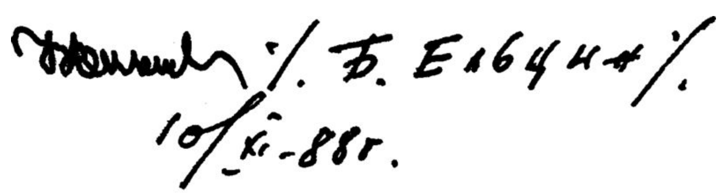
- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (**V**, **X**, **L**, **C**, **D**, **M**)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
  CCCLIX + CLXXIV =?

Где используется:


ГЛАВА V.
Изслѣдованіе истоковъ Желтой рѣки. (прод.).

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «***Пираты XX века»***
- циферблат часов

- номера месяцев



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

Часы Суздальского Кремля

*

Позиционные системы

СМ. ТАБЛИЦА 1.

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): **10**

сотни десятки единицы

2 1 0 **разряды**

$$3\ 7\ 8 = 3\cdot10^2 + 7\cdot10^1 + 8\cdot10^0$$

300 70 8

Другие позиционные системы:

- **двоичная**, восьмеричная, **шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

$2 \rightarrow 10$

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

$8 \rightarrow 10$

2 1 0 разряды

$$144_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$$

$$= 64 + 32 + 4 = 100$$

$16 \rightarrow 10$

C

2 1 0 разряды

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

Задача 1: в какой системе счисления число 58 записывается как «46_x»? Определите основание системы счисления X.

$$58 = 46_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому **x > 6**
- переводим правую часть в десятичную систему

$$58 = \overset{1\ 0}{46}_x = 4 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0 = 4 \cdot x + 6$$

- решаем уравнение

$$58 = 4 \cdot x + 6$$

$$x=(58-6):4$$

Ответ: x = 13

Задача 2: найдите основание системы счисления, в которой выполняется равенство

$$16_x + 33_x = 52_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому $x > 6$
- переводим в десятичную систему

$$\overset{1}{1}\overset{0}{6}_x = x + 6 \qquad \overset{1}{5}\overset{0}{2}_x = 5 \cdot x + 2$$

$$33_x = 3 \cdot x + 3$$

- решаем уравнение

$$4 \cdot x + 9 = 5 \cdot x + 2$$

$$x = 7$$

Ответ: x = 7

Задача 3 **(Задание 12. (1 балл) ИЗ ОЛИМПИАДЫ БАЗОВОГО КУРСА ШКОЛЬНОГО ТУРА 2017 ГОДА. 7-9 КЛАССЫ.) :**

Было 53_x груши. После того как каждую из них разделили пополам, стало 126_x половинок. В системе счисления с каким основанием вели счет?
В ответе укажите только число.

$$53_x \cdot 2_x = 126_x, \text{ где } x>6$$

$$(5 \cdot x+3) \cdot 2 = 1 \cdot x^2+2 \cdot x+6$$

$$10x+\cancel{6} = x^2+2x+\cancel{6}$$

$$8x = x^2$$

$$x = 8$$

Ответ: 8

Задача 4

Задание 12. (1 балл)

ИЗ ОЛИМПИАДЫ БАЗОВОГО КУРСА ШКОЛЬНОГО ТУРА 2017 ГОДА

Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления Y, при котором $225_X=14_Y$? записать в виде целого числа.

$$225_x=14_y \text{ , } x>5 \text{ и } y>4$$

$$2\bullet x^2+2\bullet x+5=1\bullet y+4$$

$$2x^2+2x+5=y+4$$

$$y=2x^2+2x+1$$

Наименьшее значение **y** будет при наименьшем значении **x**

Если $x=6$, то $y=2\bullet 6^2+2\bullet 6+1=85$

Ответ: 85

Задача 5

ЗАДАНИЯ ИЗ РЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ БАЗОВОГО КУРСА 2017 ГОДА.
Пробный вариант.

13
Баллов: 1

Укажите основание позиционной системы счисления X, в которой будет справедливо следующее равенство:

$$13_X+31_X=110_X$$

$x>3$

$x+3+3x+1 = x^2+x;$

$x^2-3x-4=0;$

$x_1= 4,\ x_2= -1$ (не подходит)

Внимание! В ответе вводится только целое числовое значение.

Ответ: 4

Задача 6

ЗАДАНИЯ ИЗ РЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ БАЗОВОГО КУРСА 2017 ГОДА.
Пробный вариант.

20

Баллов: 1

Какие из предложенных чисел, записанных в различных системах счисления, являются нечетными?

1. 100010_2 $=1 \cdot 2^5+1 \cdot 2^1= 32+2= 34$
2. AD_{16} $=10 \cdot 16^1+13 \cdot 16^0= 173$
3. $1A_{12}$ $=1 \cdot 12^1+10 \cdot 12^0= 22$
4. 32_5 $=3 \cdot 5^1+ 2 \cdot 5^0= 17$
5. 35_7 $=3 \cdot 7^1+ 5 \cdot 7^0= 26$

Внимание! В ответе укажите через пробел в порядке возрастания номера в списке, соответствующие нечетным числам.

Ответ: 2 4

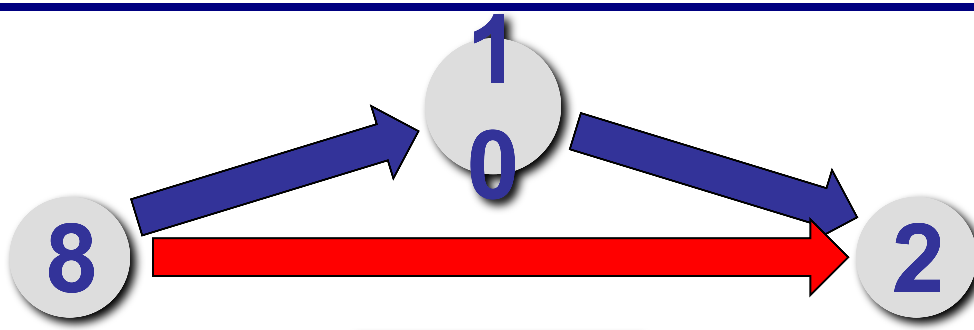
Задача 7

Дано: $a = F7_{16}$ и $b = 371_8$

Какое из чисел C, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?

1) 11111001_2 2) 11011000_2 3) 11110111_2 4) 11111000_2

Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$$8 = 2^3$$

! Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_{1}\;\underbrace{111}_{7}\;\underbrace{010}_{2}\;\underbrace{101}_{5}{}_{2}$$

$$1725_8 = 1111010101_2$$

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

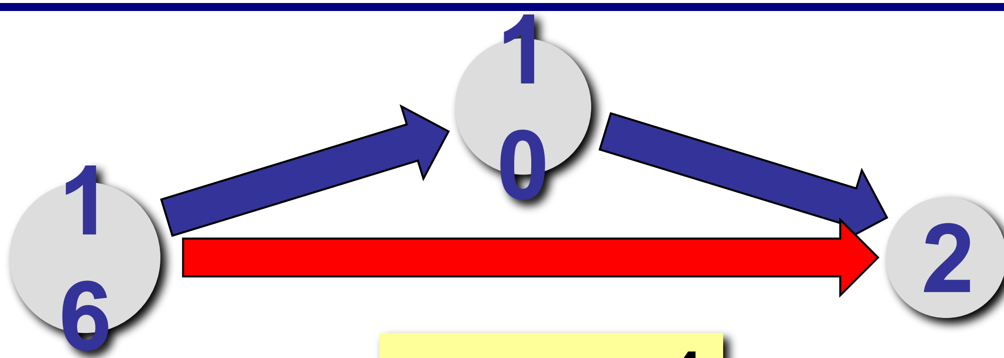
Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

1 1 3 5 7

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

$$16 = 2^4$$

! **Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!**

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}{}_{2}$$

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

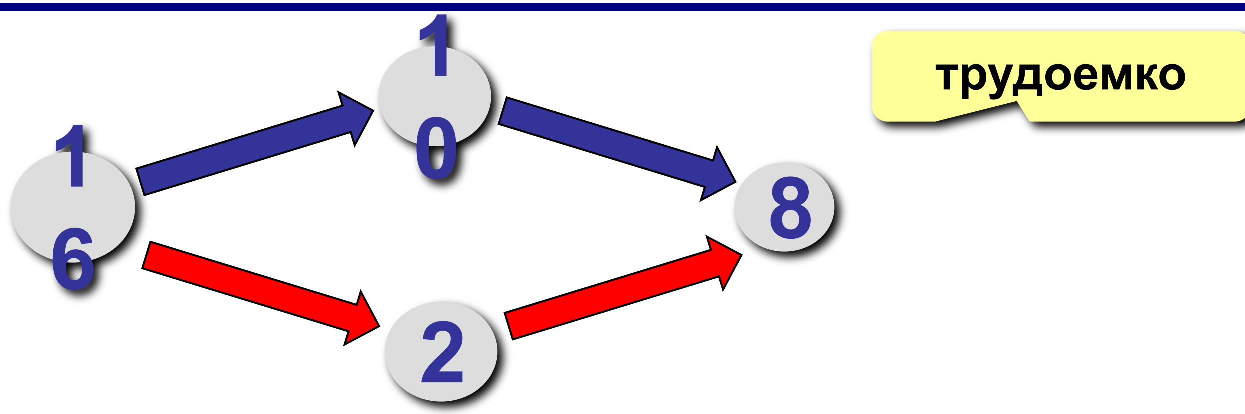
Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

1 2 E F

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Задача 7

Дано: $a = F7_{16}$ и $b = 371_8$

Какое из чисел C, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?

1)11111001_2 2)11011000_2 3)11110111_2 4)11111000_2

$$a = F7_{16} = 11110111_2$$

$$b = 371_8 = 11111001_2$$

Ответ: 4

Задача 8

(Задание 12. (1 балл) **ИЗ ОЛИМПИАДЫ БАЗОВОГО КУРСА ШКОЛЬНОГО ТУРА 2017 ГОДА. 10-11 КЛАССЫ.)**

Однажды учитель обнаружил, что кто-то испортил ответ ученика. Работа была выполнена в различных системах счисления. Но что интересно, восстановить исходные цифры не сложно.

1/0 1/0 x y <=7

$$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,01\boxed{}\,\boxed{}_2=\boxed{}\,31=E\boxed{}_{16}$$

Задача 9

Задание 5. (1 балл) **ИЗ ОЛИМПИАДЫ БАЗОВОГО КУРСА ШКОЛЬНОГО ТУРА 2013 ГОДА.)**

Восстановите цифры двоичных чисел, на месте которых в приведенном примере стоит знак «**х**»:

$\mathbf{1x01_2+1xx_2=1x100_2}$

$$
\begin{array}{r}
 1\,x\,0\,1 \\
+\quad 1\,x\,x \\
\hline
1\,x\,1\,0\,0
\end{array}
$$

Задача 10

Задание 1. (1 балл) ИЗ ОЛИМПИАДЫ БАЗОВОГО КУРСА ШКОЛЬНОГО ТУРА 2013 ГОДА.)

Школьный калькулятор работает в троичной системе счисления и для вывода чисел имеет только четыре знакоместа. С каким самым большим десятичным числом, переведенным конечно в троичную систему счисления, мы можем работать?

Примеры:

$$1010101101010110_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

Благодарю за внимание!

Желаю удачи на олимпиаде!!!

В презентации были использованы слайды из презентации *К.Ю. Поляков, 2007-2012*