10 способов решения квадратных уравнений

Подготовил учащийся 8 «А» класса СШ №69 г.Минска

введение

- Теория уравнений занимает одно из ведущих мест в алгебре и математике в целом. Значимость ее заключается в помощи выполнений практических целей, так как большинство жизненных задач сводится к решению различных видов.
- В школьной программе математики рассматривается только 2 способа их решения. Но мне стало интересно, какие ещё способы решения квадратных уравнений ещё существуют. Поэтому я выбрал тему «10 способов решения квадратных уравнений».

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

Цель и задачи

Цель работы: выявить способы решения уравнений второй степени и рассмотреть применение данных способов решения квадратных уравнений на приведённых примерах.

Задачи

1) Проследить историю развития теории и практики решения квадратных уравнений;

2) Описать технологии различных существующих способов решения квадратных уравнений;

3) Выявить достоинства и недостатки каждого способа решения квадратных уравнений;

объект и предмет исследования

Объект исследования: квадратные уравнения.

Предмет исследования: способы решения квадратных уравнений.

история появления квадратных уравнений

Уравнения в алгебре возникли в связи с решением разнообразных задач при помощи этих же уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомых с помощью алгебраических действий над данными величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4200 лет назад в Древнем Вавилоне.

Правило решения этих уравнений, изложенное в дошедших до нас вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила.

Виды квадратных уравнений и основные понятия связанные с ними

Квадра́тное уравне́ние – алгебраичное уравнение общего вида

ax2 + bx + c = 0

где x — неизвестное, **a** , **b** , **c** -- коэффициенты, причём a ≠ 0.

Выражение ax2 + bx + c = 0 называют *квадратным* **трёхчленом**.

Также квадратные уравнения вида **ax2 + bx + c = 0, где b ≠ 0 и c ≠ 0** называют **полными** квадратными уравнениями

Квадратные уравнения, в которых коэффициент **b** или свободный член **c**, или и **b** и **c** равны 0 , называются **неполными квадратными уравнениями.**

Приведенное квадратное уравнение — уравнение вида , первый коэффициент которого равен единице (a = 1) x2 + bx + c = 0

Корень — это значение переменной обращающее *квадратный трёхчлен* в ноль, а *квадратное уравнение* в верное числовое равенство.

Решить квадратное уравнение — это значит найти множество его корней.

решение квадратных уравнений при помощи дискриминаната

Решение квадратных уравнений по формуле: Корни уравнения ax2 + bx + c = 0, a ≠ 0 можно найти по формуле , где выражение

b2 – 4ac = D - это дискриминант. Выделяют 3 случая решения квадратного уравнения через дискриминант

Случай 1:

$D > 0$
$2x^2 + 5x - 7 = 0$
$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 = 81 > 0$

Так-как D > 0, значит в уравнении есть 2 корня, находим корни по формуле:

$X1,2 = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$

$X1 = (-b - \sqrt{D}) / 2a = (-5 - \sqrt{81}) / 2a = -14 / 4 = 3,5$

$X2 = (-b + \sqrt{D}) / 2a = (-5 + \sqrt{81}) / 2a = 4 / 4 = 1$

Ответ: 1 ; 3,5

решение квадратных уравнений при помощи дискриминаната

D = 0

$16x^2 - 8x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0$

Так- как D = 0, значит в уравнении есть только 1 корень, находим корень по формуле:

$X = -b / 2a$

$X = 8 / 16 = 0{,}5$

Ответ: 0,5

решение квадратных уравнений при помощи дискриминаната

D < 0

$9x^2 - 6x + 2 = 0$
$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 36 - 72 = -36 < 0$
Так-как D < 0, значит в уравнении нет корней

Ответ: нет корней.

Главное **преимущество** этого способа заключается в неприхотливости к определённым видам уравнений. **Недостаток** же этого способа – большой объём времени идущий на вычисления дискриминанта и корней.

решение квадратных уравнений при помощи Теоремы Виета

Теорема Виета позволяет находить целые корни квадратного трехчлена.

Теорема Виета: ax2 + bx + c = 0, где –b = x1+ x2 и c = x1 * x2

Используя теорему Виета, найдём корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$

Согласно теореме Виета, имеем, что

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 x_2 = 6$$

Подбираем значения x_1 и x_2, которые удовлетворяют этим равенствам. Легко видеть, что им удовлетворяют значения

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 3$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Главное **преимущество** этого способа – экономия времени решения. **Недостаток** же этого способа – возможность использовать этот способ только в **приведённых** квадратных уравнений.

решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата

Метод выделения полного квадрата для разложения трёхчлена (ax2 + bx + c) на множители основан на использовании формул:

$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ – (1), $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ – (2), $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ – (3).

Разложим многочлен на множители методом выделения полного квадрата:

$x^2 - 10x - 11$, это выражение одновременно является и квадратным уравнением $x^2 - 10x - 11 = 0$

для применения формулы (2) нам необходимо выражение

$x^2 - 10x + 5^2$, значит прибавеми отнимем от нашего трёхчлена 5^2 ;

$x^2 - 10x + 5^2 - 5^2 - 11 = (x^2 - 10x + 5^2) - 36 = (x - 5)^2 - 6^2 =$

теперь применим формулу разность квадратов (3) ;

$(x - 5 - 6)(x - 5 + 6) = (x - 11)(x + 1)$.

В полученном выражении числа: -11 и 1 являются корнями уравнения

$x^2 - 10x - 11 = 0$

решение квадратных уравнений при помощи раскладывания левой части на множители

Заключается в разложении квадратного трёхчлена на несколько двухчленов, вынесению общей части за скобки и решению получившегося неполного квадратного уравнения

$x_2 + 10x – 24 = 0$

$x_2 + 12x – 2x – 24 = 0$

$(x_2 – 2x) + (12x – 24) = 0$

$x * (x – 2) + 12 * (x – 2) = 0$

$(x – 2) * (x + 12) = 0$

0 может получиться, если $x – 2 =0$ либо $x + 12 = 0$

$x – 2 = 0$ $\qquad$ $x + 12 = 0$

$x = 2$ $\qquad$ $x = -12$

Ответ: 2 и 12

Плюс: Дает возможность сразу увидеть корни уравнения.

Минус: Нужно правильно вычислить слагаемых для группировки.

решение квадратных уравнений методом переброски

Способ 5: Решение квадратных уравнений методом переброски

Метод «переброски» позволяет сводить решение неприведённых и непреобразуемых к виду приведённых с целыми коэффициентами путём их деления на старший коэффициент уравнений к решению приведённых с целыми коэффициентами.

1) Все части выражения $ax^2 + bx + c = 0$ умножаем на a

$(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$

2) вводим новую переменную $y = ax$.

3) $y^2 + by + ac = 0$

Далее уравнение решают при помощи теоремы виета описанным выше способом, затем возвращаются к исходной переменной и находят корни уравнений y1 = ax1 и y2 = ax2.

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

$(3x^2 - 5x - 2) * a = (3x)^2 - 5 * 3x - 6$

Пусть: $y = 3x$

$y2 - 5y - 6 = 0$

Находим y при помощи теоремы Виета

$-5 = y1 + y2$

$-6 = y1 * y2$

$y1 = 6;\ y2 = -1$

Находим x

$x1 = 6 / 3 = 2;\ x2 = -1 / 3$

Ответ: 2, -1 / 3

Плюс: За минимальное количество действий можно найти корни уравнения, применяется совместно со способом теоремы Виета.

Минус: легко найти только целые корни.

решение квадратных уравнений при помощи свойств коэффициентов

1 свойство:

Дано квадратное уравнение $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Если $\mathbf{a + b + c = 0}$ (сумма коэффициентов), то $\mathbf{x_1 = 1,\ x_2 = c/a}$

<u>**Пример:**</u>

$$19x^2 + 15x - 34 = 0$$

Решение:

Здесь, $a = 19, b = 15, c = 34$

Проверим будет ли $a + b + c = 0$.

$$a + b + c = 19 + 15 - 34 = 0.$$

Можем применить свойство 1:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = \frac{-34}{19} = -1\frac{15}{19}$$

Ответ: $-1\frac{15}{19}$; 1.

решение квадратных уравнений при помощи свойств коэффициентов

2 свойство:

Дано квадратное уравнение $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Если $\mathbf{a - b + c = 0}$ (сумма коэффициентов), когда b взято с противоположным знаком или a + c = b, то $\mathbf{x_1 = -1,\ x_2 = -c/a}$

Пример

$341x^2 + 290x - 51 = 0$

Решение:

Здесь, a = 341, b = 290, c = -51.

Проверим удовлетворяют ли коэффициенты условию

свойства 2

341 - 51 = 290. Получим a + c = b. Следовательно, мы

можем воспользоваться свойством 2.

$x_1 = -1$ и $x_2 = 51/341$

Ответ: -1; 51/341.

решение квадратных уравнений при помощи свойств коэффициентов

3 свойство:

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$. Коэффициент b представлен в виде 2k, т.е. является четным числом, то формулу корней уравнения можно переписать в более простом виде

D = (b/2)2 + a*c

$$x_{1,2} = \frac{\frac{-b}{2} \pm \sqrt{D}}{a}$$

Пример:

$3x^2 + 2{,}2x - 0{,}16 = 0$

Решение:

Коэффициент b = 2,2

$D = 1{,}1^2 + 3 * (-0{,}16) = 1{,}69$

$x_{1,2} = (-1{,}1 \pm 1{,}3)/3$

Плюс: Не требует особых усилий.

Минус: Подходит только к некоторым уравнениям.

решение квадратных уравнений при помощи Теоремы Безу

Способ 7: Решение квадратных уравнений при помощи теоремы Безу

Теорема Безу: Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен $P(a)$.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ

1. Число a - корень многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится без остатка на двучлен $x-a$.

   Отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена $P(x)$ тождественно множеству корней соответствующего уравнения $P(x)=0$.

2. Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).
3. Пусть a - целый корень приведенного многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число $P(k)$ делится на $a-k$.

Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать далее корни многочлена, степень которого уже на единицу меньше: если $P(a)=0$, то заданный многочлен $P(x)$ можно представить в виде:

$$P(x)=(x-a)Q(x)$$

Таким образом, один корень найден и далее находятся уже корни многочлена $Q(x)$, степень которого на единицу меньше степени исходного многочлена. Иногда этим приемом - он называется понижением степени - можно найти все корни заданного многочлена.

решение квадратных уравнений при помощи Теоремы Безу

Найти остаток от деления многочлена $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ на двучлен $(x-1)$

Согласно теореме Безу искомый остаток равен значению многочлена в точке $a = 1$. Найдем тогда $f(1)$, для этого значение $a = 1$ подставим в выражение для многочлена $f(x)$ вместо x. Будем иметь:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 3 - 4 + 6 = 5$$

Ответ. Остаток равен 5

Плюс: За минимальное количество действий можно найти корни уравнений.

Минус: Подходит только к некоторым уравнениям.

Решение квадратных уравнений графическим способом

Способ 8: Решение квадратных уравнений графическим способом

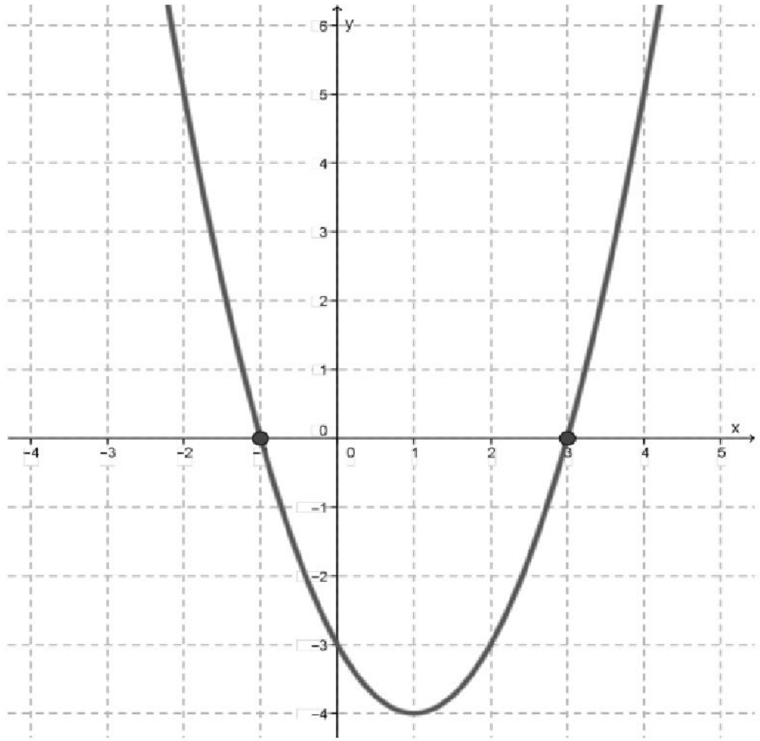
Построим график функции $x_2-2x-3=0$.

1. Имеем: $a = 1$, $b = -2$, $x0= -b2a = 1,y0 = f(1) = 12-2-3 = -4$. Значит, вершиной параболы служит точка $(1;-4)$, а осью параболы — прямая $x=1$.

2. Возьмём на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, например, точки $x = -1$ и $x = 3$. Имеем $f(-1)=f(3)=0$. Построим на координатной плоскости точки $(-1;0)$ и $(3;0)$.

3. Через точки $(-1;0)$, $(1;-4)$, $(3;0)$ проводим параболу.

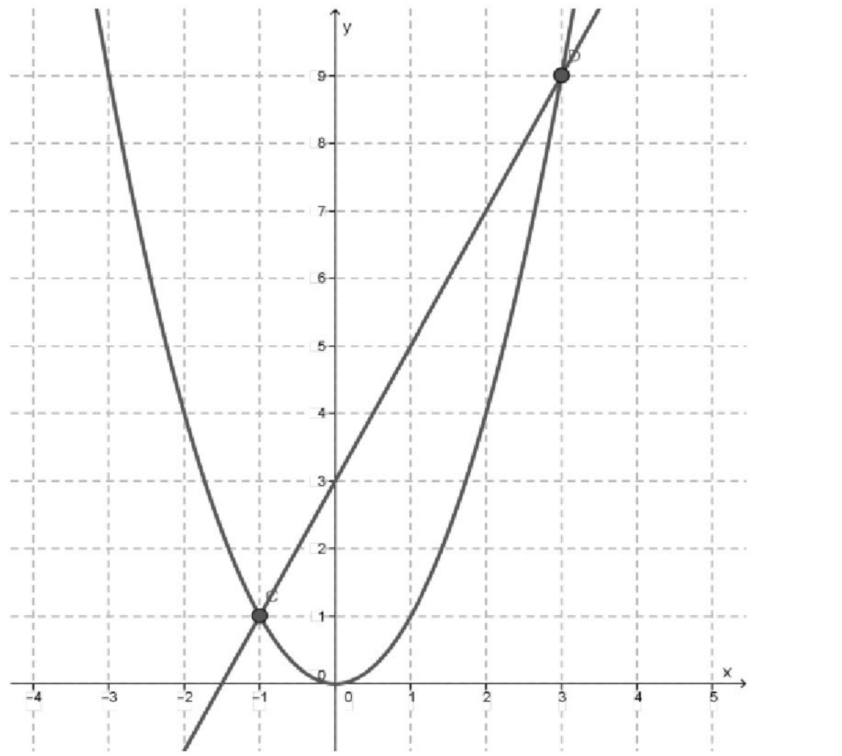
Решение квадратных уравнений графическим способом



Корнями уравнения $x_2 - 2x - 3 = 0$ являются абсциссы точек пересечения параболы с осью *x*; значит, корни уравнения таковы: $x1 = -1$; $x2 = 3$.

Ещё можно преобразуем уравнение к виду $x_2 = 2x+3$. Построим в одной системе координат графики функций: $y = x2$;$y = 2x+3$.

Решение квадратных уравнений графическим способом



Они пересекаются в двух точках: C (−1;1) и D (3;9). Корнями уравнения служат абсциссы точек C и D, значит, x1 = −1; x2 = 3.

Плюс: Наглядный способ.

Минус: Могут быть не точности при составлении графиков и нахождении конечных ответов.

Решение квадратных уравнений при помощи циркуля и линейки

Заключается в построении окружности с определённым центром и радиусом и нахождении точек пересечения окружности и оси абсцисс

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Определяем координаты точки центра окружности

$X = -b / 2a = 2 / 2 = 1$

$Y = (a + c) / 2a = (1 - 3) / 2 = -1$

O (1; -1)

строим на координатной плоскости окружность радиусом OA, где A(0; 1)

Точки пересечения окружности с осью абсцисс и есть корни уравнения

Пример построения обозначен на рисунке 7

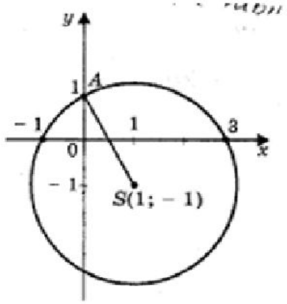


Рис. 7

Плюс: Наглядный способ.

Минус: Могут быть не точности

Решение квадратных уравнений при помощи номограммы

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициен там определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена

$$OB = \frac{a}{1+z},\ AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

(**z** в дальнейшем заменяется на **x**) по формулам:

Полагая OC = p, ED = q, OE = a (все в см.), из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение

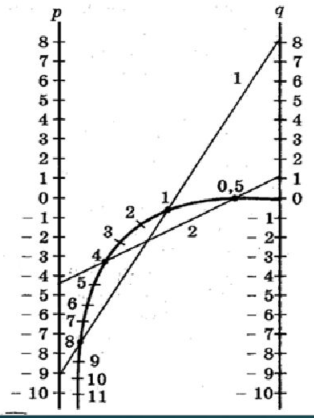
$x^2 + px + q = 0,$

причем буква **x** означает метку любой точки криволинейной шкалы.

Примеры.

1) Для уравнения $x^2 - 9x + 8 = 0$ номограмма дает корни

$x_1 = 8{,}0$ и $x_2 = 1$



Заключение

Квадратные уравнения находят необычайно широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств.

Изложенные в моей работе способы имеют, как плюсы, так и недостатки. Достоинства способов решения квадратных уравнений при помощи Теоремы Виета и свойств коэффициентов заключается экономии колоссального количества времени при решении уравнений, но использовать их можно только при определённом виде уравнений.

Решение квадратных уравнений через дискриминант – это самый общий способ решений уравнений, подходящих под любые виды уравнений, но требующий немалых вычеслений. Главные недостатки это неточные результаты, получаемые решением некоторых уравнений графическим способом, но дающие приблизительное представление о правильном ответе.

Хочется отметить и то, что излагаемая тема в этой работе еще мало изучена вообще, поэтому она таит в себе много скрытого и неизвестного, что дает прекрасную возможность для дальнейшей работы над ней.

Так как эти методы решения квадратных уравнений просты в применении, то они, безусловно, должно заинтересовать увлекающихся математикой учеников. Моя работа дает возможность по-другому посмотреть на те задачи, которые ставит перед нами математика.

Спасибо за внимание!

10 способов решения квадратных уравнений

ПОДГОТОВИЛ УЧАЩИЙСЯ 8 «А» КЛАССА СШ №69 Г.МИНСКА