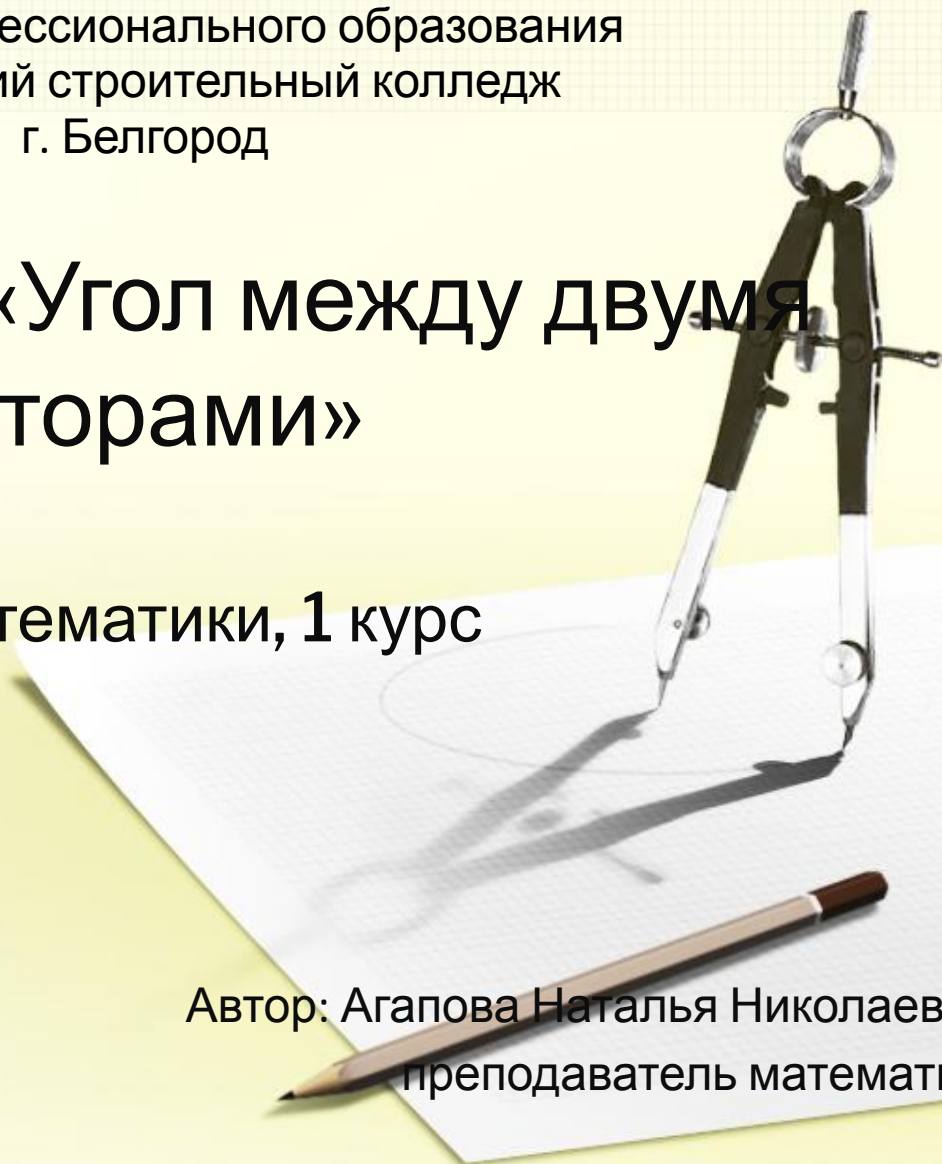


Областное государственное автономное образовательное
учреждение
среднего профессионального образования
Белгородский строительный колледж
г. Белгород

Урок-лекция «Угол между двумя векторами»

урок математики, 1 курс

Автор: Агапова Наталья Николаевна,
преподаватель математики



План:

- **Определение скалярного произведения**
- **Скалярное произведение векторов в координатной форме**
- **Нахождение угла между векторами**



Определение скалярного произведения

- **Скалярным произведением двух ненулевых векторов** называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, то есть:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

где

$$\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right), 0 \leq \varphi \leq 180^\circ$$

Определение скалярного произведения

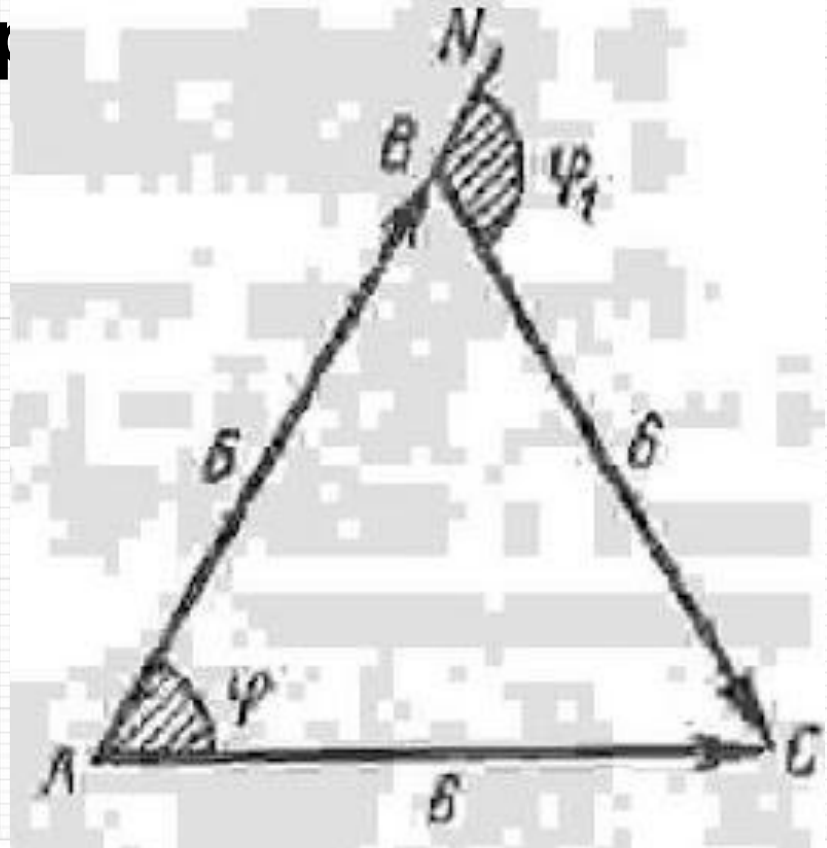
- Если хотя бы один из двух векторов равен нулевому вектору, то их произведение считается равным нулю.
- *Углом между векторами* называется угол между их направлениями.



Пример N°1

- В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 6, найти скалярное произведение векторов

- a) $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$;
- b) $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$.



Решение:

- а) Так как угол ϕ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (и их направлениями) равен 60° , то для скалярного произведения этих векторов получим:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \widehat{BAC} = \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 36 \cdot 0,5 = 18\end{aligned}$$

Решение:



b) Угол ϕ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (то есть угол между их направлениями) есть угол $\phi_1 = 120^\circ$, поэтому:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \widehat{ABC} = \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 36 \cdot (-0,5) = -18\end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме

- Пусть два ненулевых вектора заданы своими координатами $\vec{a} = (x_a; y_a)$ $\vec{b} = (x_b; y_b)$,
.
- Это значит, что $\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j}$ $\vec{b} = x_b \vec{i} + y_b \vec{j}$ в базисе $(\vec{i}; \vec{j})$, то есть ,
- Найдём их произведение:
$$\vec{a} \vec{b} = (x_a \vec{i} + y_a \vec{j})(x_b \vec{i} + y_b \vec{j}) = x_a x_b \vec{i}^2 + x_b y_b \vec{i} \vec{j} + x_a y_a \vec{j} \vec{i} + y_a y_b \vec{j}^2$$
- Так как вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные и взаимно перпендикулярные, то $\vec{i}^2=1$; $\vec{j}^2=1$; $\vec{i} \vec{j}=0$. Подставив эти значения в равенство (2), получим

Скалярное произведение векторов в координатной форме

- Так как вектора i и j – единичные и взаимно перпендикулярные, то $i^2=1$; $j^2=1$; $ij=0$. Подставив эти значения в равенство (2), получим

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b \quad (3)$$

- Итак, **скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноимённых координат.**

Пример N°2



- Найти скалярное произведение векторов $a=(3;5)$ и $b=(-2;7)$.

Решение:

- Здесь $x_a=3$; $x_b=-2$; $y_a=5$; $y_b=7$. Используя формулу (3), получим:

$$\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 = -6 + 35 = 29$$

Нахождение угла между векторами



- Из определения скалярного произведения двух векторов можно получить формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (4)$$

которая позволяет найти угол между векторами.

Нахождение угла между векторами

- Учитывая, что $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

формулу (4) можно записать в координатной форме:

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Пример N°3



- Найти угол между векторами:

a) $a=(4;0)$ и $b=(2;-2)$;

b) $a=(5;-3)$ и $b=(3;5)$.

Решение:

a) Используя формулу (5), находим:

$$\cos \varphi = \frac{4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{16 + 0} \cdot \sqrt{4 + 4}} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Решение:

b) Имеем:

$$\cos \varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-3) \cdot 5}{\sqrt{25 + 9} \cdot \sqrt{9 + 25}} = \frac{0}{34} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

Домашнее задание



- **Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л.
Математика в задачах с решениями
№42, 43, 48, 49, 54, 55**

Список использованной литературы

- **Дадаян А. А. Сборник задач по математике. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007.**
- **Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л. Математика в задачах с решениями. – СПб.: «Лань», 2011.**

Список использованных материалов, Интернет-ресурсов

- **Мультимедийный диск «Алгебра 10 - 11 класс».**
- **Мультимедийный диск «Математика 7-11 Класс».**