



# Измерения в геометрии

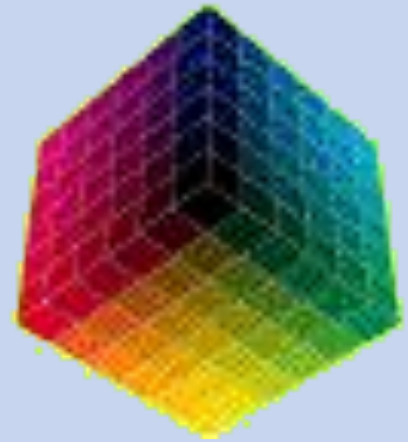
- Объем и его измерения
- Формулы объема многогранников и тел вращения
- Формулы площади поверхности цилиндра, конуса
- Подобие тел

**Преподаватель КГБОУ СПО  
«Благовещенский медицинский  
техникум»  
Качанова Ирина Алексеевна**

# Объем и его измерения

## План занятия

1. Понятие объема
2. Объем параллелепипеда
3. Объем призмы
4. Объем пирамиды



# Понятие объема

Часть пространства, занимаемого геометрическим телом, называется **объемом** этого тела

Любая фигура на плоскости имеет свою **площадь**

Любое тело в пространстве обладает **объемом**

$S$  – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

Равные фигуры имеют равные площади

Если фигура, составлена из нескольких фигур, то её площадь равна сумме площадей этих фигур

В качестве единицы измерения площади обычно берут квадрат со стороной равной единице измерения отрезков

$V$  – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

Равные тела имеют равные объемы

Если тело разбито на части, то объем равен сумме объемов этих частей

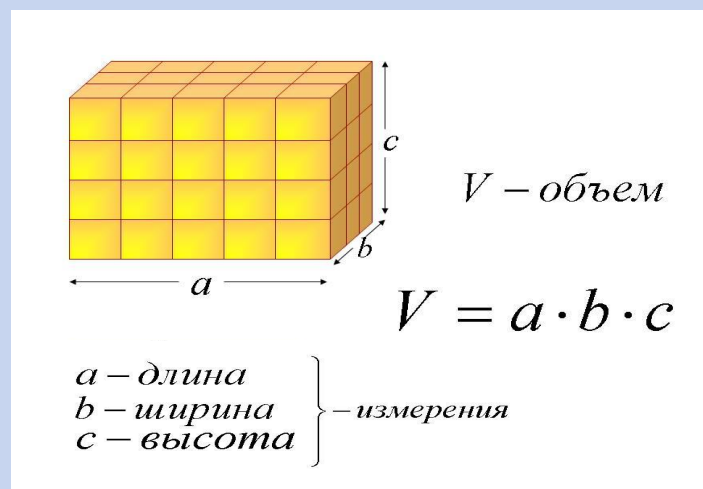
Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице

# Объём прямоугольного параллелепипеда

## Теорема:

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

$a, b, c$  – измерения прямоугольного параллелепипеда.



$$V = abc$$



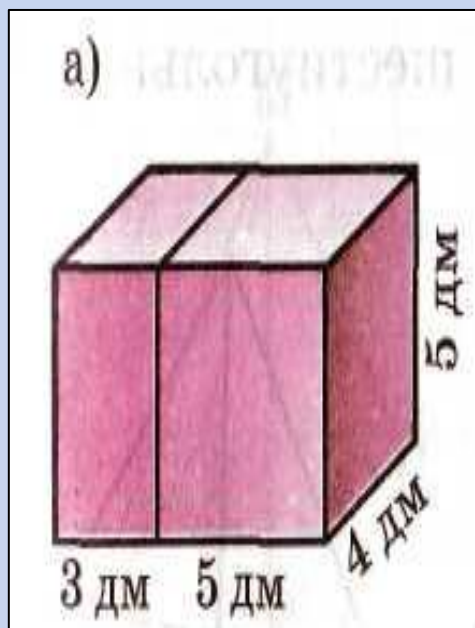
## Следствие :

объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

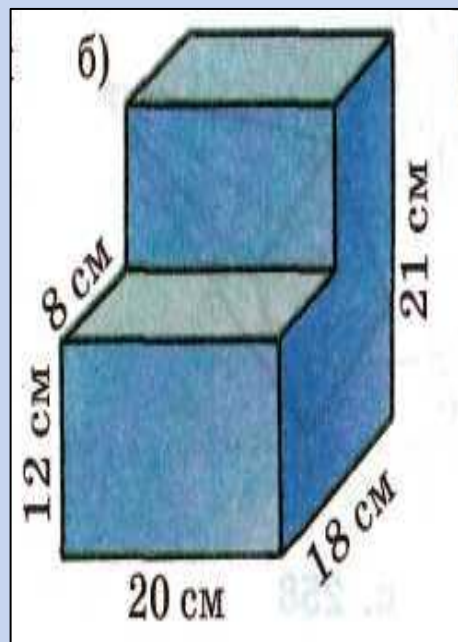
$$V =$$

$$abc = Sh$$

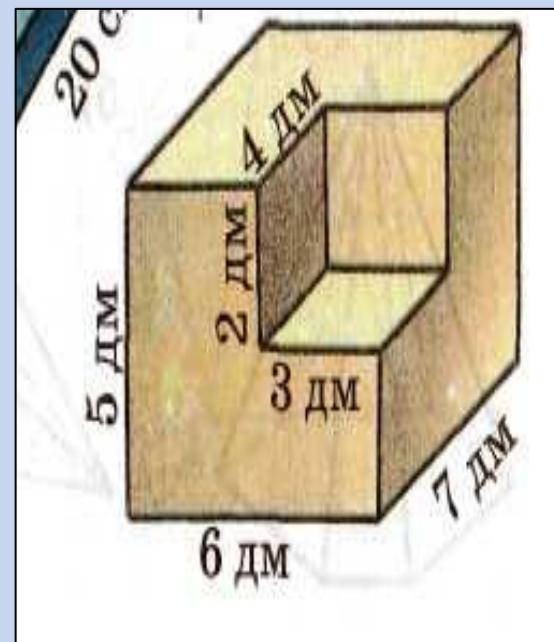
# Найдите объём тела



а)  $160 \text{ дм}^3$



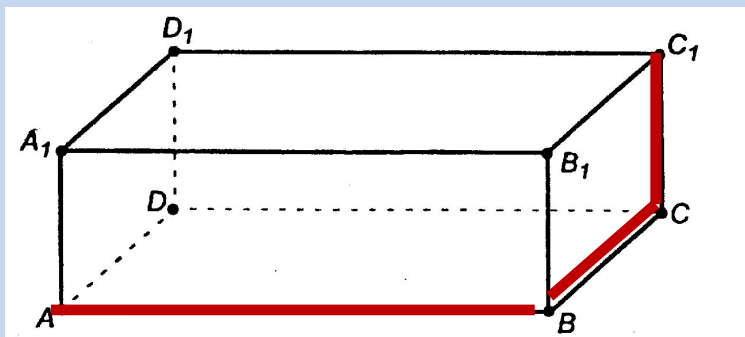
б)  $6120 \text{ см}^3$



в)  $186 \text{ дм}^3$

Кирпич размером 25 X 12 X 6,5 см  
имеет массу 3,51 кг.  
Найдите его плотность.

## Задача №4



**Дано:**

Параллелепипед  
длина  $a = AB = 25$  см;  
ширина  $b = BC = 12$  см;  
высота  $c = CC_1 = 6,5$  см  
масса 3,51 кг

**Найти:**  $\rho$  плотность

**Решение:**

1. Формула плотности  $\rho = \frac{m}{V}$

2. Формула объема параллелепипеда  $V = abc$

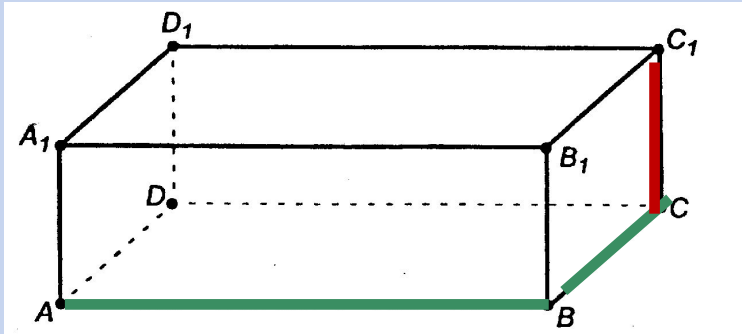
3. Плотность кирпича вычислим по формуле  $\rho = \frac{m}{abc}$

$$\rho = \frac{3,51 \text{ кг}}{(25 \cdot 12 \cdot 6,5) \text{ см}^3} = \frac{3510 \text{ г}}{1950 \text{ см}^3} = 1,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$$\rho = 1,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

## Задача №5

Требуется установить резервуар для воды емкостью  $10 \text{ м}^3$  на прямоугольной площадке размером  $2,5 \times 1,75 \text{ м}$ , служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.



**Дано:**

Параллелепипед

объем  $V=10 \text{ м}^3$ ;

длина  $a = AB = 2,5 \text{ м}$

ширина  $b = BC = 1,75 \text{ м}$ ;

**Найти:** высоту  $c = CC_1$

**Решение:**

1. Формула объема параллелепипеда

$$V = abc$$

2. Из формулы объема выразим высоту  $c = CC_1$

$$c = \frac{V}{ab}$$

$$\tilde{h} = \frac{10 \text{ м}^3}{(2,5 \cdot 1,75) \text{ м}^2} = \frac{10 \text{ м}^3}{4,375 \text{ м}^2} = 2,3 \frac{\text{м}^3}{\text{м}^2} = 2,3 \text{ м}$$

Итого :  $2,3 \text{ м}$

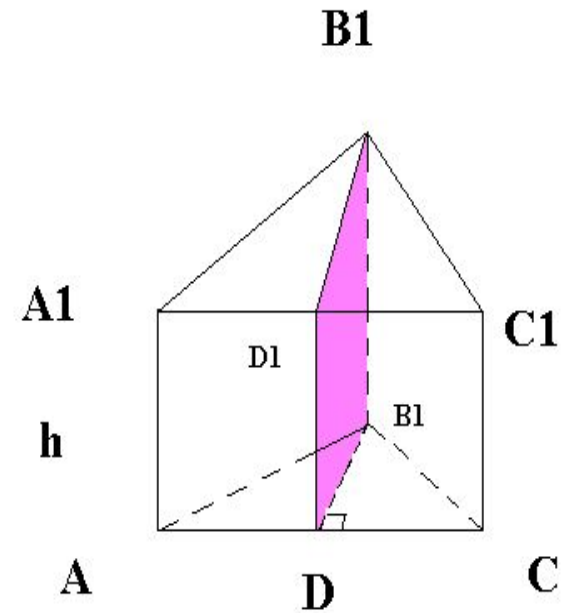
# Объём призмы

## Теорема:

Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту

$$V = S_{ABC} \cdot h$$

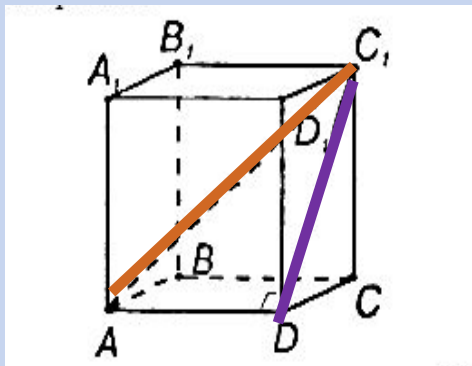
$$V = S_{\text{основания}} \cdot h$$





# Задача №8

Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.



**Дано:**

Четырехугольная призма  
 $AC_1 = 3,5 \text{ см}$  – диагональ призмы;  
 $DC_1 = 2,5 \text{ см}$  – диагональ грани

**Найти:**  $V$  – объем призмы

**Решение:**

1. Формула объема призмы  $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$   $S_{\text{осн.}} = AD \cdot DC$ ,  $h = CC_1$

2. Т.к. призма правильная все углы по  $90^\circ$ , стороны основания равны

3. Рассмотрим треугольник  $AC_1D$ . По т. Пифагора найдем  $AD$

$$AD = \sqrt{AC_1^2 - DC_1^2} = \sqrt{3,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{6} \text{ (см)}$$

4. Рассмотрим треугольник  $DC_1C$ . По т. Пифагора найдем  $C_1C$

$$CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - DC^2} \quad DC = AD \quad CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - AD^2} = \sqrt{2,5^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{6,25 - 6} = \sqrt{0,25} = 0,5 \text{ (см)}$$

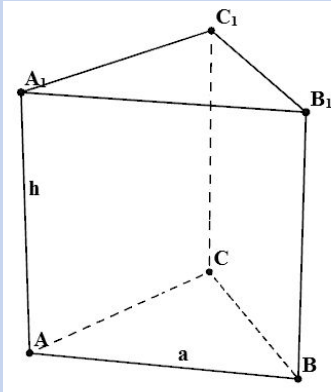
5. Найдем  $S_{ABCD} = AD \cdot DC = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{36} = 6 \text{ (см}^2\text{)}$

6. Найдем объема призмы по формуле  $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 6 \text{ см}^2 \cdot 0,5 \text{ см} = 3 \text{ см}^3$

**Ответ:**  $3 \text{ см}^3$

## Задача №9

Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м, а расстояния между содержащими их параллельными прямыми 26 м, 25 м и 17 м. Найдите объем призмы.



**Дано:**

Треугольная призма  
 $AB = 26\text{ м}; BC = 25\text{ м}; AC = 17\text{ м}$   
 $AA_1 = h = 15\text{ м}$   
**Найти:**  $V$  – объем призмы

**Решение:**

1. Формула объема призмы  $V = S_{\text{осн}} \cdot h$

2. По формуле Герона найдем площадь основания  $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$

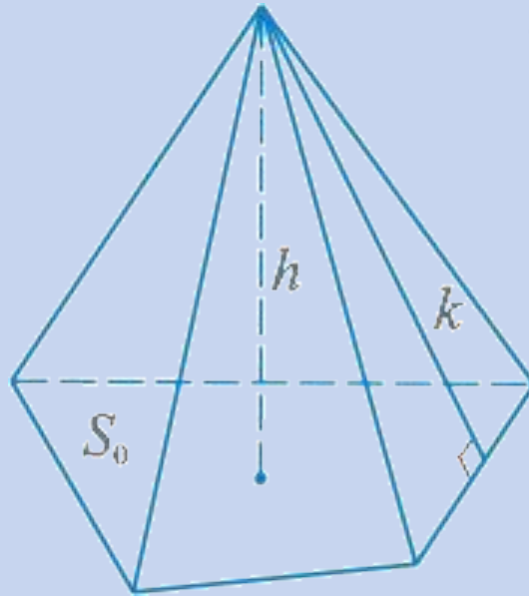
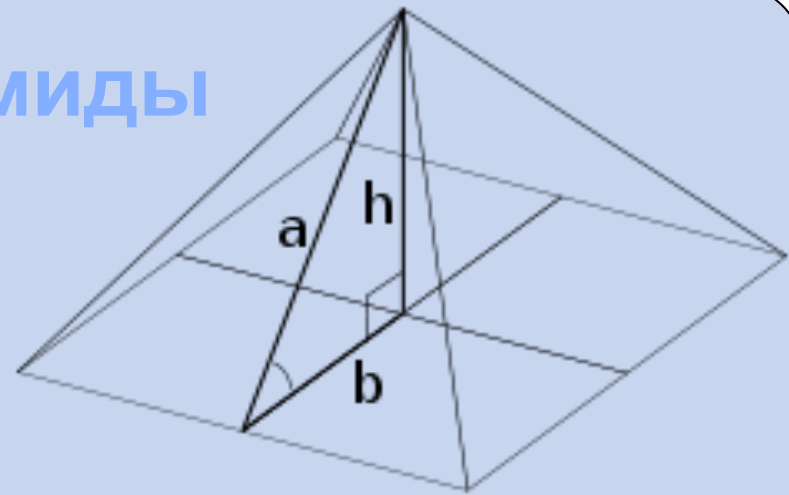
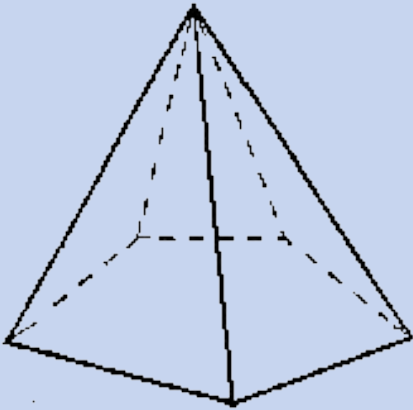
3. Найдем периметр треугольника ABC  $p = \frac{26 + 25 + 17}{2} = \frac{68}{2} = 34$

4. Тогда  $S_{\Delta} = \sqrt{34(34-26)(34-25)(34-17)} = \sqrt{41616} = 204$

5. Найдем объем призмы по формуле  $V = S_{\text{осн}} \cdot h = 204 \cdot 15 = 3060$

**Ответ:** 3060

# Объём пирамиды

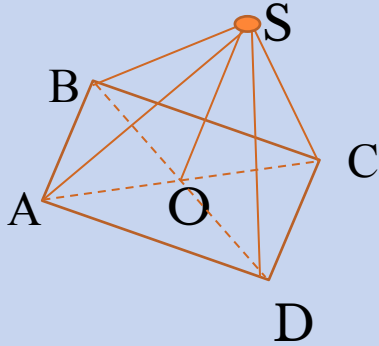


$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$$

$S_{\text{осн.}}$  — площадь основания пирамиды,  $H$  — высота пирамиды

## Задача №12

Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м; все боковые ребра равны 12,5 м. Найдите объем пирамиды.



**Дано:**

Прямоугольная пирамида  
 $AB = 9\text{ м}; BC = 12\text{ м}; AS = 12,5\text{ м}$

**Найти:**

$V$  – объем пирамиды

**Решение:**

1. Формула объема пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h \quad \text{высота пирамиды } SO$$

2. Найдем площадь основания

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot BC = 9\text{ м} \cdot 12\text{ м} = 108\text{ м}^2$$

3. Найдем диагональ AC из треуг. ABC

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15(\text{м})$$

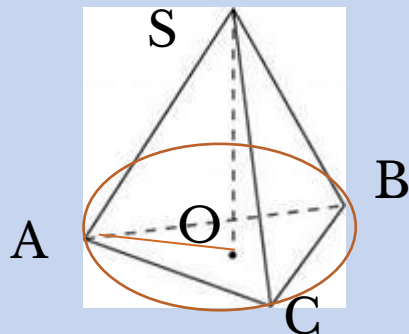
4. Найдем SO из треуг. AOS  $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{12,5^2 - 7,5^2} = \sqrt{100} = 10$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} 108\text{ м}^2 \cdot 10\text{ м} = \frac{1080\text{ м}^3}{3} = 360\text{ м}^3$$

Ответ:  $360\text{ м}^3$

Основание пирамиды - равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

## Задача №13



**Дано:**

Треугольная пирамида

$$AB = 6\text{ м}; BC = 6\text{ м}; AC = 8\text{ м}; AS = 9\text{ м}$$

**Найти:**

$V$  – объем пирамиды

**Решение:**

1. Формула объема пирамиды  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$
2. По формуле Герона найдем площадь основания  $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$
3. Найдем периметр треугольника ABC  $p = \frac{6+6+8}{2} = \frac{20}{2} = 10$
4. Тогда  $S_{\Delta} = \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)} = \sqrt{320}$
5. Найдем  $AO$ , радиус окружности  $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S_{ABC}} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot \sqrt{320}} = \frac{36}{\sqrt{80}} = \frac{36}{4\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$
6. Найдем высоту пирамиды  $SO$  из треуг.  $ASO$   $SO = \sqrt{AS^2 - R^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{5}}$
7. Найдем объем пирамиды по формуле  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$   
 $= \frac{1}{3} \sqrt{320} \cdot \sqrt{\frac{324}{5}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{320 \cdot 324}{5}} = \frac{1}{3} \sqrt{20736} = \frac{1}{3} \cdot 144 = 48$

# Литература:

- Геометрия 10 – 11: Учеб. для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян и др., Просвещение 2003 год.

<http://images.yandex.ru>