Решение простейших тригонометрических уравнений через круг

Сютьев Евгений 13АС
«Колледж«Красносельский»
Санкт-Петербург
2016

Введение

- Решение тригонометрических уравнений любого уровня сложности в конечном итоге сводится к решению простейших тригонометрических уравнений. И в этом наилучшим помощником снова оказывается тригонометрический круг.
- Вспомним определения косинуса и синуса.

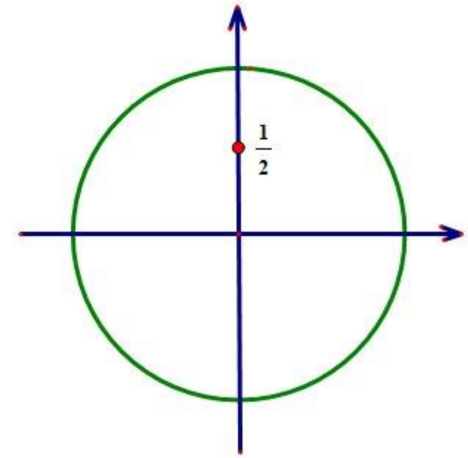
✔ Косинусом угла α называется абсцисса (то есть координата по оси OX) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

✔ Синусом угла α называется ордината (то есть координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

Решим уравнение

- sinx=1/2

1. Отметим на оси ординат точку с ординатой ½



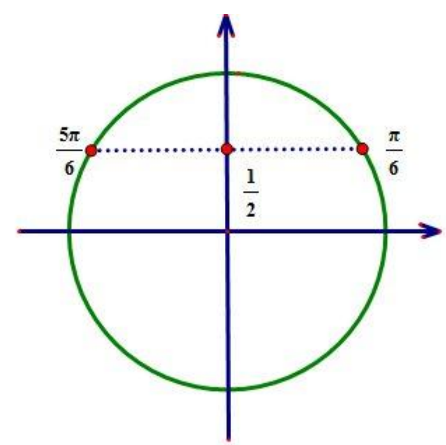
2. Проведем горизонтальную линию параллельно оси абсцисс до пересечения с окружностью. Мы получим две точки, лежащие на окружности и имеющие ординату 1/2. Эти точки соответствуют углам поворота на ∏/6 и 5∏/6 радиан: Если мы, выйдя из точки, соответствующей углу поворота на ∏/6 радиан, обойдем полный круг, то мы придем в точку, соответствующую углу поворота на ∏/6+2∏ радиан и имеющую ту же ординату. То есть этот угол поворота также удовлетворяет нашему уравнению. Мы можем делать сколько угодно "холостых" оборотов, возвращаясь в ту же точку, и все эти значения углов будут удовлетворять нашему уравнению.То есть первая серия решений исходного уравнения имеет вид:

   x1=∏/6+2∏k

Аналогично, вторая серия решений имеет вид:

x2=5∏/6+2∏k,

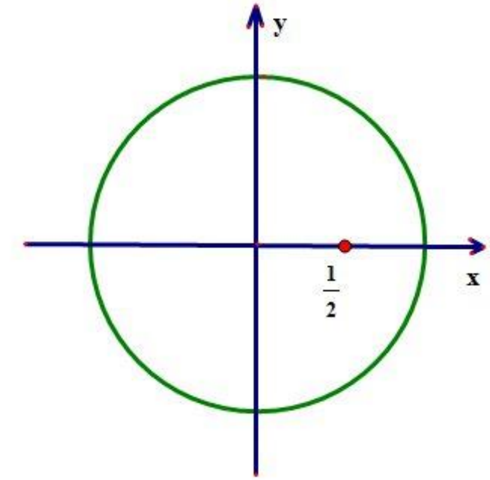
Как вы догадались, в основе этой серии решений лежит точка окружности, соответствующая углу поворота на 5∏/6.



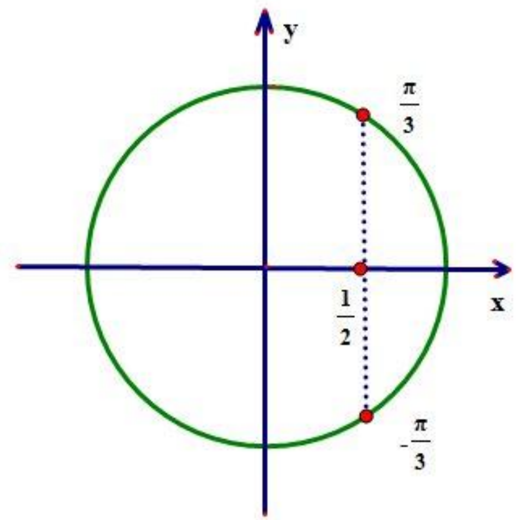
Эти две серии решений можно объединить в одну запись:

x=(-1)n∏/6+∏n,

- давайте решим уравнение cosx=1/2.



1. Так как cosx - это абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом на угол x, отметим на оси OX точку с абсциссой ½

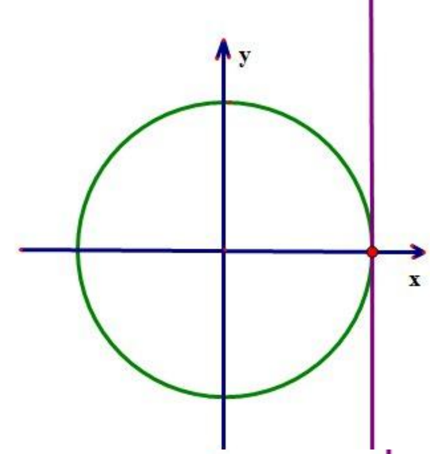


2. Проведем вертикальную линию параллельно оси OY до пересечения с окружностью. Мы получим две точки, лежащие н окружности и имеющие абсциссу 1/2. Эти точки соответствуют углам поворота на ∏/3 и -∏/3 радиан. Вспомним, что при движе по часовой стрелки мы получаем отрицательный угол поворота

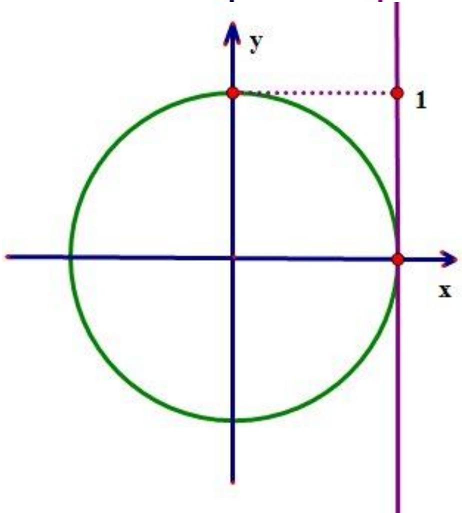
- Запишем две серии решений:
- x_1=∏/3+2∏k,,
- x_2=-∏/3+2∏k,
- Объедим эти две серии в одну запись:
- x=±∏/3+2∏n,

- Решим уравнение tgx=1.

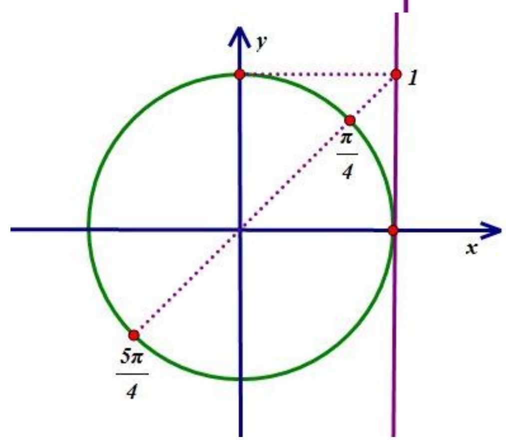
1. Линия тангенсов проходит через точку с координатами (1,0) единичной окружности параллельно оси OY:



2. Отметим на ней точку, с ординатой равной 1 (мы ищем, тангенс каких углов равен 1):



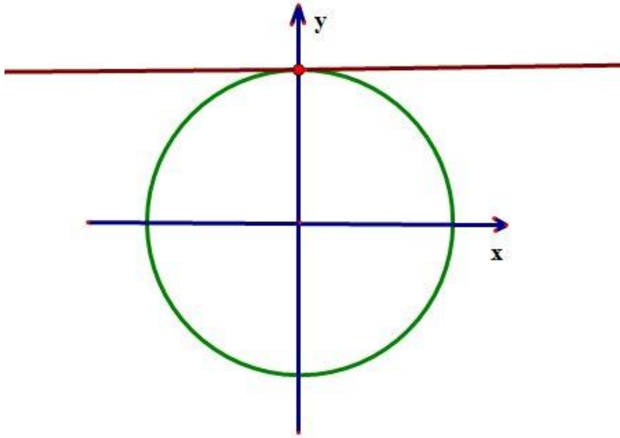
3. Соединим эту точку с началом координат прямой линией и отметим точки пересечения прямой с единичной окружностью. Точки пересечения прямой и окружности соответствуют углам поворота на ∏/4 и 5∏/4∏/4



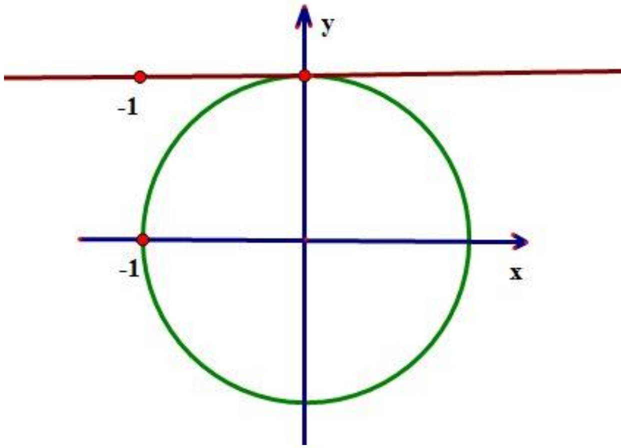
4. Ответ: x=∏/4+∏n

- Решим уравнение ctgx=-1

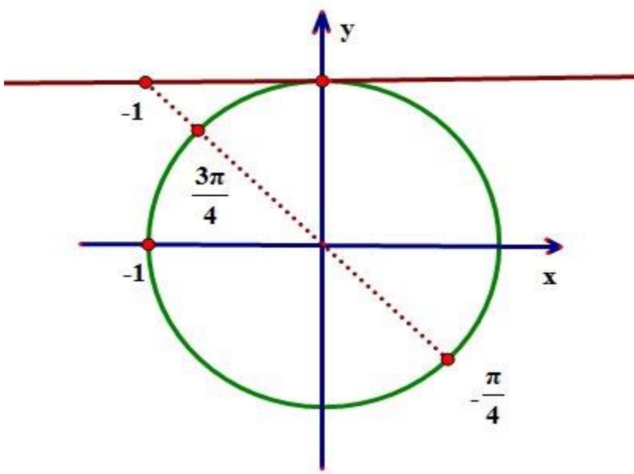
1. Линия котангенсов проходит через точку с координатами (0,1) единичной окружности параллельно оси OX:



2. Отметим на линии котангенсов точку с абсциссой -1:



- Соединим эту точку с началом координат прямой и продолжим ее до пересечения с окружностью. Эта прямая пересечет окружность в точках, соответствующих углам поворота на 3∏/4 и -∏/4 радиан:
- Поскольку эти точки отстоят друг от друга на расстояние, равное ∏, то общее решение этого уравнения мы можем записать так:
- x=3∏/4+∏n,



Вспомогательные материалы

- http://ege-ok.ru/2012/01/09/reshenie-prosteyshih-trigonometrichesk
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Тригонометрия
- Учебник по математике 10-11 класс Мордкович А.Г.
- http://fizmat.by/math/trigonometry