Математическое моделирование

Погрешности математических операций

Косвенные измерения

- Пусть на основании многократных измерений найдено, что диаметр и длина металлического цилиндра равны $d = 13{,}840 \pm 0{,}011$ мм и $l = 40{,}84 \pm 0{,}04$ мм. Объем цилиндра можно вычислить как

$$V = l\frac{\pi}{4}d^2$$

В данном случае объем представляет функцию от измеренных величин d и l, т.е. функцию от приближенных чисел. Таким образом, величина объема V тоже будет приближенным числом, имеющим определенную предельную ошибку ΔV. Вычисление ошибки функции называется косвенным измерением.

Погрешность суммы

Теорема 1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \cdots x_n$ - данные приближенные числа. Рассмотрим их алгебраическую сумму

$$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$$

Очевидно, что

$$\Delta u = \pm\Delta x_1 \pm \Delta x_{2\pm} \cdots \pm\Delta x_n$$

и, следовательно,

$$|\Delta u| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots + |\Delta x_n|$$

Следствие. За предельную абсолютную погрешность алгебраической суммы можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_n = \Delta_{x1} + \Delta_{x2} + \cdots + \Delta_{xn}$$

Отсюда следует, что предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного (в смысле абсолютной погрешности) из слагаемых

Погрешность разности

Рассмотрим разность двух приближенных чисел

$$u = x_1 - x_2$$

предельная абсолютная погрешность разности

$$\Delta u = \pm\Delta x_1 \pm \Delta x_2$$

и, следовательно,

$$|\Delta u| \ \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность алгебраической разности можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого

$$\Delta_n = \Delta_{x1} + \Delta_{x2}$$

Пример

Сложить три числа:

$$a = 102{,}5 \pm 0{,}3;\ b = 13{,}62 \pm 0{,}04;\ c = 32{,}474 \pm 0{,}002$$

Решение:

$$y = a + b + c = 102{,}5 + 13{,}62 + 32{,}474 = 148{,}594$$
$$\Delta y = \Delta a + \Delta b + \Delta c = 0{,}3 + 0{,}04 + 0{,}002 = 0{,}342$$

В этом примере предельная абсолютная ошибка функции равна $\pm$ 0,342. Старший разряд в числе 0,342 отмечен цифрой 3. А эта цифра обозначает десятые доли единицы. Поэтому в числе 148,594 сомнительной цифрой является та, которая тоже означает десятые доли единицы. В данном случае это цифра 5. Ее нужно сохранить, а все другие справа отбросить по правилу округления. В итоге получаем ответ:

$$y = 148{,}6 \pm 0{,}3$$

Погрешность произведения

0 Теорема. Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел

Доказательство. Функция $y = ab$имеет предельную абсолютную ошибку Δy. Можно записать

$$y \pm \Delta y = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$$

Выполним умножение по правилу алгебры

$$y \pm \Delta y = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b$$

Примем за нуль произведение ошибок $\Delta a\Delta b$ ввиду его малости и вычтем почленно $y = ab$. Получим $\pm\Delta y = \pm a\Delta b \pm b\Delta a$

Если разделить это равенство почленно на $y = ab$, можно записать выражение для предельной относительной ошибки δ

$$\delta = \frac{\Delta y}{y} = \pm\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

Таким образом, ***предельная относительная погрешность произведения складывается из предельных относительных погрешностей сомножителей.***

Пример

Определить произведение u приближенных чисел $x_1 = 12{,}2$ и $x_2 = 73{,}56$

и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верные. Решение. Имеем $\Delta x_1 = 0{,}05$ и $\Delta x_2 = 0{,}005$. Отсюда

$$\delta = \left(\frac{0{,}05}{12{,}2} + \frac{0{,}005}{73{,}56}\right) = 0{,}0042$$

Так как произведение u =897,432, то $\Delta_n = u\delta = 897{,}432 \cdot 0{,}0042 \cong 3{,}6$. Первая цифра погрешности больше 2,

таким образом разряд единиц является сомнительным в числе, и результат следует записать так

$$u = 897{,}4 \pm 4$$

Частные случаи погрешности произведения

- Отметим частный случай

$$u = kx,$$

где k – точный множитель, отличный от нуля. Имеем:

$$\delta_u = \delta_x$$

так как относительная ошибка точного числа равна нулю. И

$$\Delta_u = |k|\Delta_x$$

т.е. при умножении приближенного числа на точный множитель k относительная предельная погрешность не изменяется, а абсолютная предельная погрешность увеличивается в $|k|$ раз.

- При возведении приближенного числа a в степень n будем иметь
- ,
- Поэтому формула (4.2) принимает вид
- . (1.28)
- Так как извлечение корня степени p из приближенного числа a можно свести к возведению этого числа в степень , будем иметь

Частные случаи погрешности произведения

0 При возведении приближенного числа a в степень n будем иметь

$$y = a^n = aa \cdots a$$

Поэтому формула относительной погрешности принимает вид

Так как извлечение корня степени p из приближенного числа a можно свести к возведению этого числа в степень , будем иметь

$$\delta = \frac{\Delta y}{y} = \pm\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a} + \cdots + \frac{\Delta a}{a}\right) = \pm n\frac{\Delta a}{a}$$

Так как извлечение корня степени p из приближенного числа a можно свести к возведению этого числа в степень $\frac{1}{p}$, будем иметь

$$\delta = \pm\frac{1}{p}\frac{\Delta a}{a}$$

Общая формула для погрешности

Вычислим предельную ошибку сначала для функции одного аргумента $y = f(a)$

Если при изменении аргумента a допускается предельная абсолютная ошибка Δa, то функция y получает изменение Δy

$$y \pm \Delta y = f(a \pm \Delta a)$$

Вычтем отсюда равенство $y = f(a)$ почленно и разделим обе части на Δa

$$\pm \frac{\Delta y}{\Delta a} = \frac{f(a \pm \Delta a) - f(a)}{\Delta a}$$

Общая формула для погрешности

Из математического анализа известно, что правая часть этого равенства хотя и не равна производной по a от функции $f(a)$, но отличается от нее лишь на бесконечно малую величину θ. Поэтому можно записать

$$\pm\frac{\Delta y}{\Delta a} = f_a{}'(a) + \theta$$

Умножим обе части равенства на Δa

$$\pm\Delta y = f_a{}'(a)\Delta a + \theta\Delta a$$

Величиной $\theta\Delta a$ можно пренебречь в связи с ее малостью, тогда ***предельная абсолютная ошибка функции одного аргумента равна производной от этой функции на предельную абсолютную ошибку аргумента.***

$$\pm\Delta y = f_a{}'(a)\Delta a$$

Общая формула для погрешности

Разделим последнее равенство на равенство $y = f(a)$

$$\pm \frac{\Delta y}{y} = \frac{f_a{}'(a)\Delta a}{f(a)}$$

Так как отношение производной функции на саму функцию является производной по аргументу от натурального логарифма функции, можно записать

$$\delta = \pm |lnf(a)|_a{}' \Delta a$$

Это правило звучит как – ***предельная относительная ошибка функции одного аргумента равна произведению производной от логарифма этой функции на предельную абсолютную ошибку аргумента.***

Общая формула для погрешности

- Предельная относительная ошибка функции $u = f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ нескольких аргументов складывается из частных относительных ошибок

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \right| \Delta_{x_i}$$

Пример

Для определения модуля Юнга E по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4}\frac{l^3 p}{a^3 bs}$$

где l – длина стержня, a и b - измерения поперечного сечения стержня, s – стрела прогиба, p – нагрузка.

Вычислить предельную относительную погрешность при определении модуля Юнга E, если p =20 кГ; δ_p=0,1 %; a =3 мм; δ_a=1 %; b =44 мм; δ_b= 1 %; l =50 см; δ_l=1 %; s = 2,5 см; δ_s=1 %.

Решение.

$$\ln E = 3\ln l + \ln p - 3\ln a - \ln b - \ln s - \ln 4$$

заменяя приращение дифференциалами по модулю, будем иметь:

$$\frac{\Delta E}{E} = 3\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta p}{p} + 3\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta s}{s}$$

Следовательно,

$$\delta_E = 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}001 + 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}081$$

т.е. примерно 8 % от измеряемой величины. Произведя численные расчеты, имеем:

$$E = (2{,}1 \pm 0{,}17) \cdot 10^6\ \frac{\text{кГ}}{\text{см}^3}$$

Средняя квадратичная ошибка функции

- Вычисленная ранее погрешность для функции нескольких переменных при косвенных измерениях относится к единичному измерению, если проводится ряд замеров, необходимо пользоваться формулами среднеквадратичной ошибки:

$$S_y = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_1; x_2 \cdots x_n)}{\partial x_i} S_{x_i} \right)^2}$$

Средняя квадратичная ошибка функции

0 Например, имеем функцию следующего вида

$$y = f(a, b) = a + b$$

то есть требуется найти среднюю квадратичную ошибку суммы двух приближенных чисел, средние квадратичные ошибки которых S_a и S_b.

Решение: $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 1$, $\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 1$

следовательно

$$S_y = \pm\sqrt{{S_a}^2 + {S_b}^2}$$

Список литературы

1. Рыбалко А.Ф. Математические методы в инженерии. Учебное электронное текстовое издание. Екатеринбург. –УрФУ, 2011 – 206 с.