«Теоремы Чевы и Менелая»

Работа ученика 9-А класса
Муниципального общеобразовательного учреждения
«Гимназия № 20»
Храмеева Максима

Научный руководитель – учитель математики
Бондаренко Ольга Валентиновна

2011 год

«Обладая литературой более обширной, чем алгебра и арифметика вместе взятые, и, по крайней мере, столь же обширной, как анализ, геометрия в большей степени, чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которыми спешащее поколение не имеет времени насладиться».

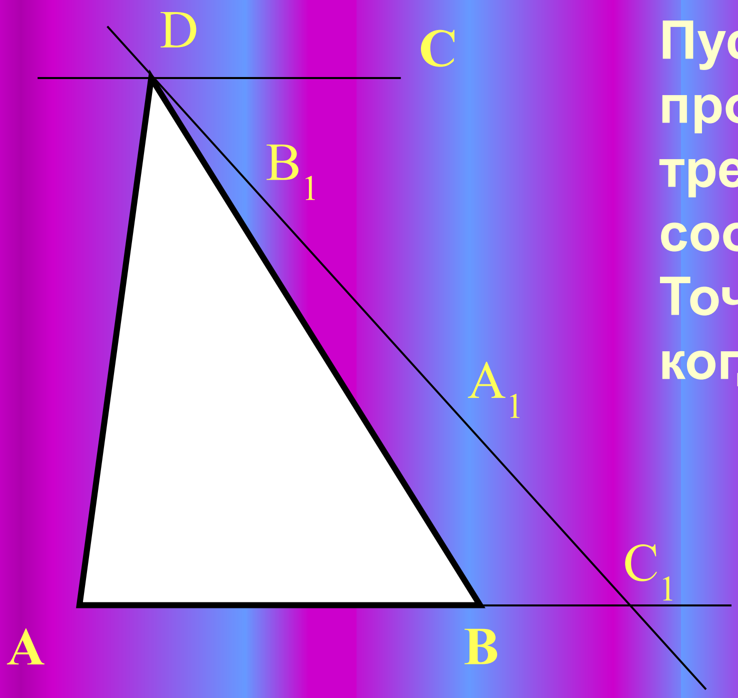
Е. Т. Белл.

Цели исследования:

- Изучить состояние проблемы в научной литературе и школьной программе.
- Выявить теоретические положения для доказательства теорем и научно обосновать способы доказательства теоремы Чевы и Менелая.
- Проанализировать теоремы и их применение при решении задач
- Проверить эффективность и целесообразность применения теорем при решении задач.

- Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке
- И многие другие известные соотношения.

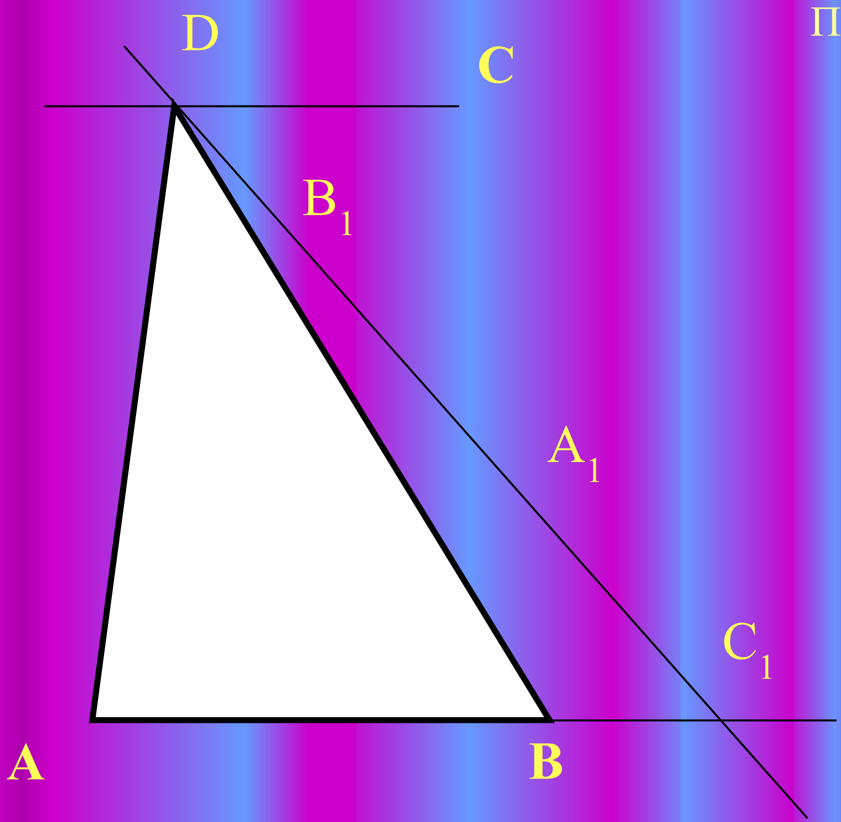
Теорема Менелая



Пусть на сторонах ВС, АС и продолжении стороны АВ треугольника АВС взяты соответственно точки A_1 , B_1 и C_1
Точки лежат на одной прямой тогда , когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Доказательство:



Пусть прямая пересекает стороны BC и CA ΔABC в точках A_1 и B_1,а продолжение стороны AB в точке C_1.

1.Через вершину C ΔABC проведем прямую $CD \parallel AB$; которая пересечет прямую A_1B_1 в точке D.

2.$\Delta A_1BC_1 \infty \Delta A_1CD$ по двум углам

3. $\Delta B_1AC_1 \infty \Delta B_1CD$ по двум углам

4. из пунктов 2 и 3 следует, что

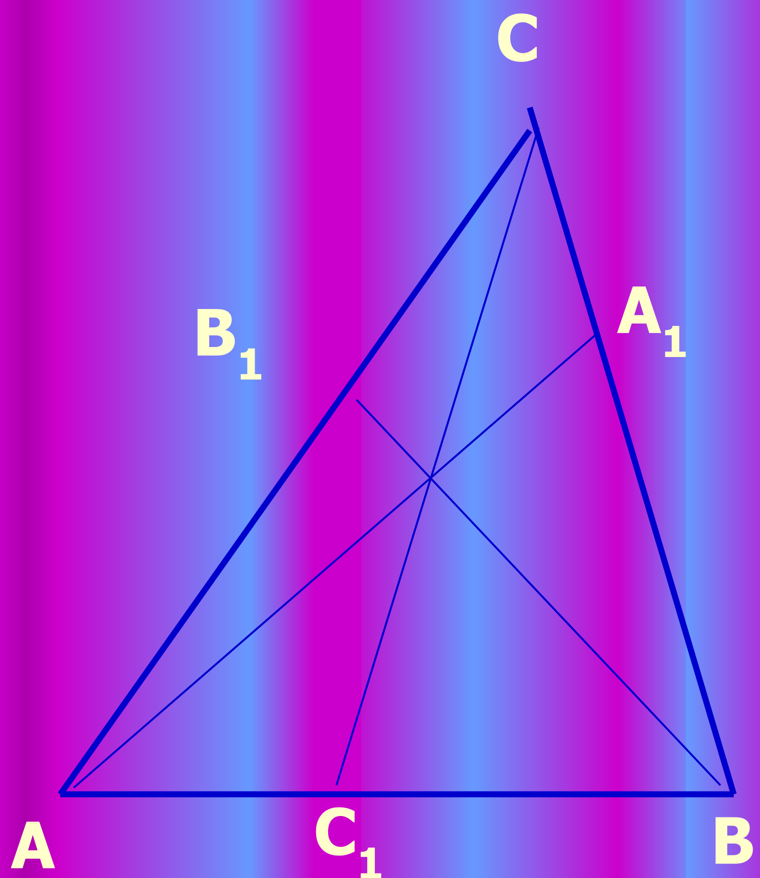
$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{CD}$ и $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CD}{AC_1}$

5. Перемножим эти равенства, получим доказываемое соотношение.

Обратная теорема:

- Если выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Теорема Чевы



Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки

A_1, B_1, C_1

Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Доказательство:

I) Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, лежащей внутри или вне треугольника ABC. В том и другом случае, применив теорему Менелая к треугольнику BCC_1 и секущей AA_1, Получим:

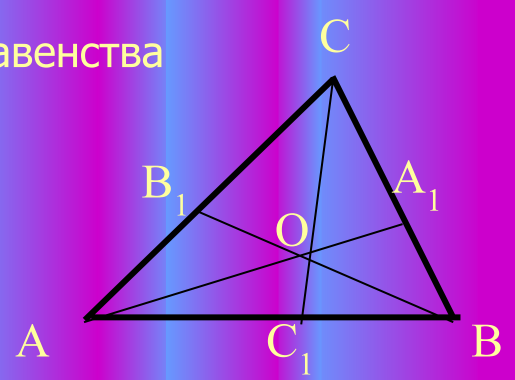
$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CO}}{\overline{OC_1}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{AB}}=-1$$

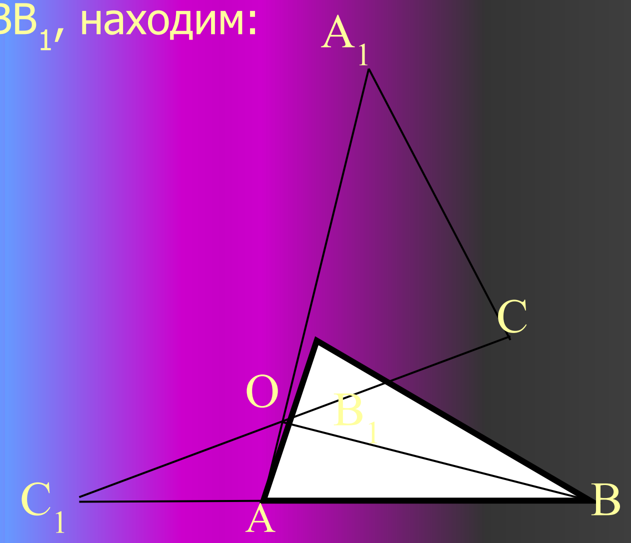
Аналогично из треугольника ACC_1, пересеченного прямой BB_1, находим:

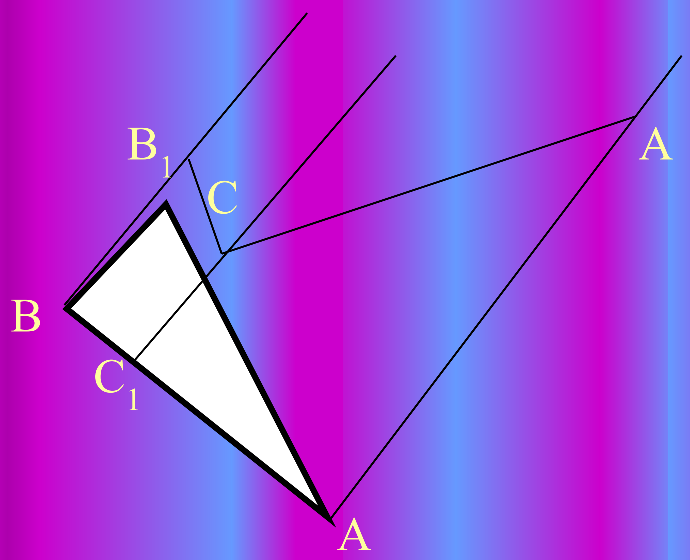
$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}}\cdot\frac{\overline{C_1O}}{\overline{OC}}=-1.$$

Перемножим последние два равенства почленно и получим:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=1.$$







Рассмотрим случай, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Пусть точка B_1 лежит на продолжении стороны AC, точка A_1 лежит на стороне BC, точка C_1 лежит на стороне AB. Тогда достаточно доказать, что

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=1$$

Используя теорему об отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{C_1A}}\ и\ \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}.$$

Подставим эти равенства

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_{1_1}A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{AC_1}}\cdot\frac{\overline{C_1B}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=1$$

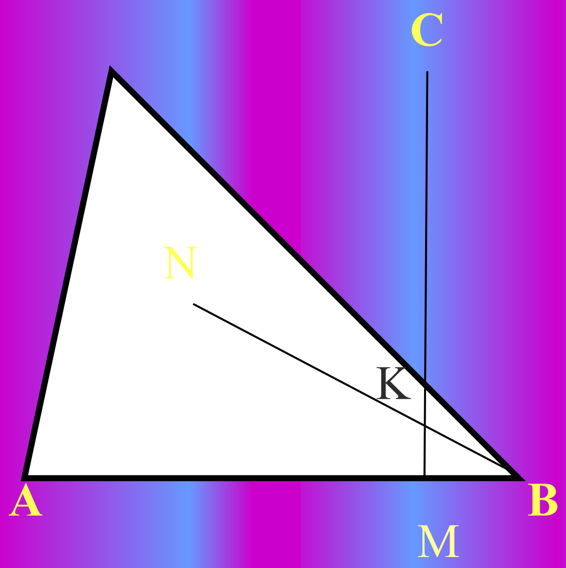
Что и требовалось доказать.

Обратная теорема

- Если выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ то прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны.

Замечание. Записывая отношение отрезков, следует двигаться по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.

Задача 1. На сторонах AB и AC Δ ABC взяты точки M и N так, что $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=2$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найдите отношение отрезков $\frac{BK}{KN}$



Решение. Применим теорему Менелая к ΔABN и секущей CM. Получим

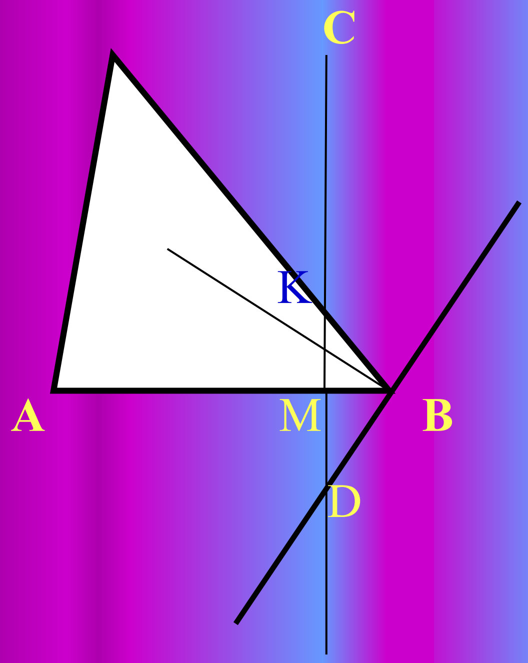
$$\frac{BK}{KN}\cdot\frac{NC}{CA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$$

$$\frac{NC}{CA}=\frac{2}{3};\ \frac{AM}{MB}=2$$

$$\frac{BK}{KN}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

Ответ: $\frac{BK}{KN}=\frac{3}{4}$

Решение с помощью подобия:

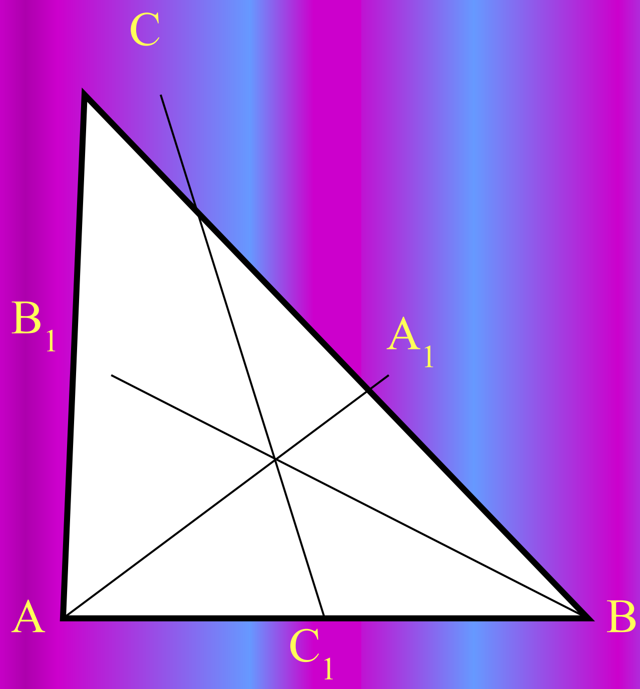


Если выполняется равенство

то точки A_1, B_1 и C_1 лежат

на одной прямой.

Задача 2: Доказать, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.



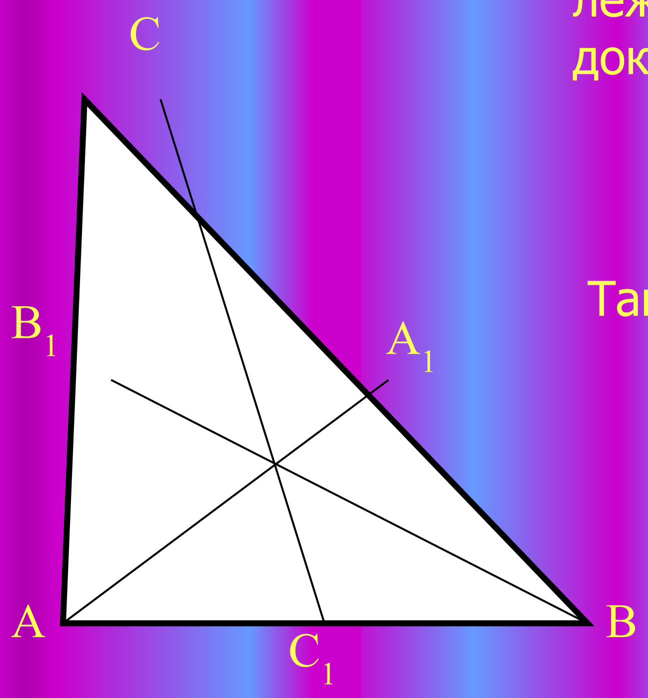
- Доказательство:
  Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы треугольника ABC, т.к. биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, длины которых пропорциональны противолежащим сторонам, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AB}.$$

- Перемножив полученные равенства, получим: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$

- Т.о. по теореме Чевы, биссектрисы пересекаются в одной точке.

Задача 3: Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.



Доказательство. Так как точки A_1, C_1, B_1 лежат на сторонах треугольника, достаточно доказать, что выполняется равенство

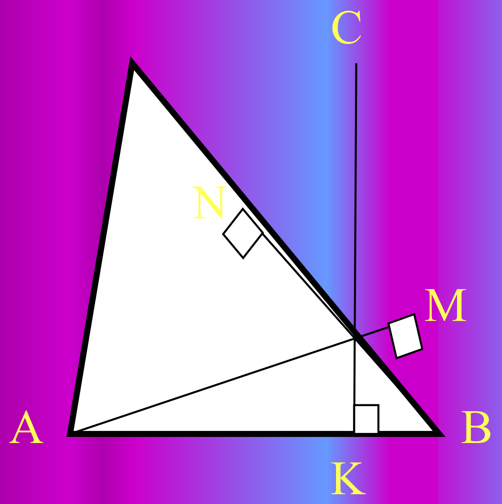
$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = 1.$$

Так как BB_1, CC_1, AA_1 медианы имеем, что

$$\frac{AB_1}{B_1C} = 1; \frac{CA_1}{A_1B} = 1; \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Тогда в силу теоремы Чевы прямые BB_1, CC_1, AA_1 пересекаются в одной точке. Ч.т.д.

Задача 4. Докажите что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.



Если выполняется равенство

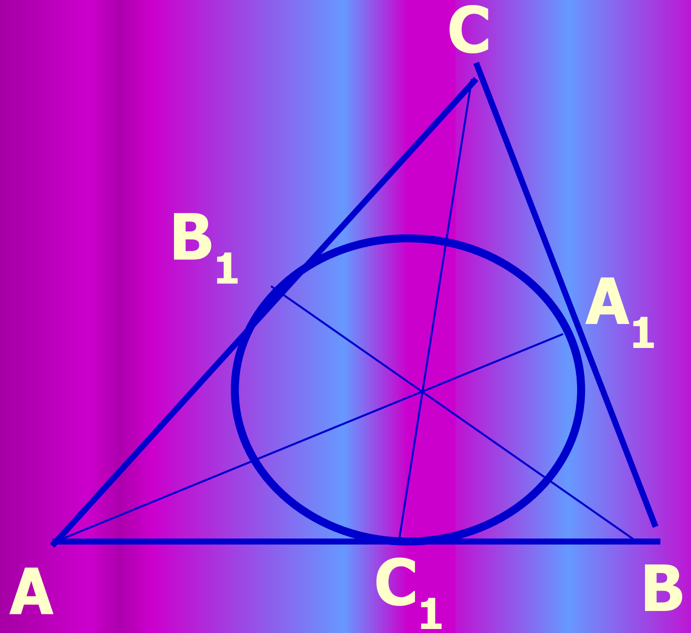
то точки A_1, B_1 и C_1 лежат

на одной прямой.

Если выполняется равенство
то точки A_1, B_1 и C_1 лежат
на одной прямой.

Точка Жергона.

Задача 5: Доказать, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.



Доказательство:

Пусть окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1, т.к. длины касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны, то $AB_1=AC_1$, $BC_1=BA_1$, $CA_1=CB_1$.

Тогда

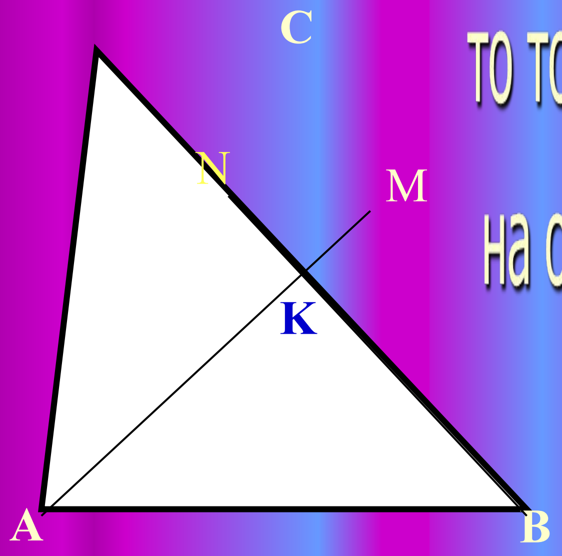
$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Следовательно, по теореме Чевы, данные прямые пересекаются в одной точке.

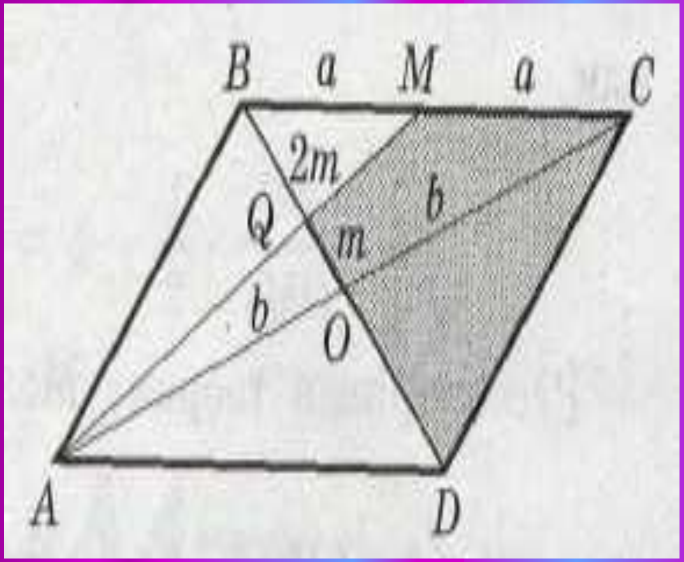
Если выполняется равенство

то точки A_1, B_1 и C_1 лежат

на одной прямой.



Задача 7.
Через середину M стороны BC параллелограмма ABCD, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника QMCD.



$S_{ABCD} = 1, S_{BCD} = \frac{1}{2}, S_{BOC} = \frac{1}{4},$

Так как CO – медиана треугольника BCD, значит, делит треугольник BCD на два равновеликих треугольника.

1) MA пересекает две стороны и продолжение третьей треугольника BOC, значит, по теореме Менелая

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OQ}{QB} = 1, \frac{a}{a} \cdot \frac{2b}{b} \cdot \frac{OQ}{QB} = 1,$$

Откуда $\frac{OQ}{QB} = \frac{1}{2}, OQ = m, QB = 2m.$

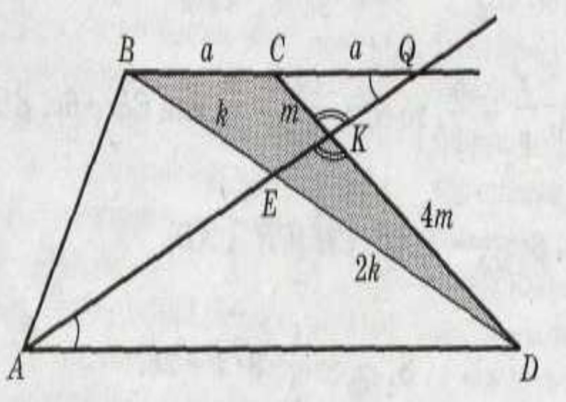
2) Треугольники BQM и BOC имеют общий угол, значит

$$\frac{S_{BQM}}{S_{BOC}} = \frac{BM \cdot BQ}{BC \cdot BO} = \frac{a \cdot 2m}{2a \cdot 3m} = \frac{1}{3}.$$

И так, $S_{BQM} = \frac{1}{3} S_{BOC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$

$$S_{QMCD} = S_{BCD} - S_{BQM} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}$.



Задача 8

В трапеции ABCD с основанием AD и BC через середину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке К, причем BE:ED = 1:2 и CK:KD = 1:4. Найдите отношение длин оснований трапеции.

Пусть BC = a, AD = b. Необходимо найти $\frac{a}{b}$.

Пусть Q – точка пересечения прямых BC и AK.

1) По теореме Менелая для треугольника BCD и секущей AQ имеем

$$\frac{DE}{EB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CK}{KD}=1,\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}=1,\frac{a+CQ}{CQ}=\frac{2}{1}\Rightarrow CQ=a, BC=CQ=a.$$

2) $CKQ \sim DKA$ (по двум углам), тогда $\frac{CQ}{AD}=\frac{CK}{KD};\frac{a}{b}=\frac{1}{4}.$

Так как a =BC, b = AD,то $\frac{BC}{AD}=\frac{1}{4}.$

Ответ: 1:4.

Теоремы Чевы и Менелая применяются, когда:

- *Идёт речь, об отношении отрезков* (иногда завуалированном: доказать равенство отрезков, доказать, что точка является серединой отрезка).
- *Если на чертеже имеются элементы, присутствующие в теореме Менелая* (треугольник и прямая, пересекающая его стороны или их продолжения).
- 3.Иногда полезно применять обратную теорему (*если необходимо доказать, что какие-нибудь точки лежат на одной прямой*). А также при доказательстве других теорем.