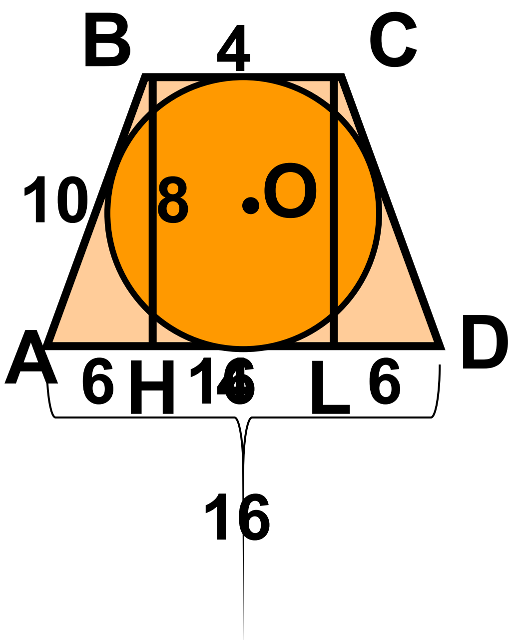
Применение интересных свойств равнобедренной трапеции при решении задач на ГИА и ЕГЭ

Сидорова А.В. учитель математики МОУ СОШ № 31 г.Мурманска

Задача 1

Найдите радиус окружности, если основания описанной около неё равнобедренной трапеции равны 4 см и 16 см.



<u>Дано</u>: окр.(*O;r*) вписана в трапецию *ABCD*

AD || *BC*, *AB* = *CD*

AD = 16 см, *BC* = 4 см

<u>Найти</u>: *r*

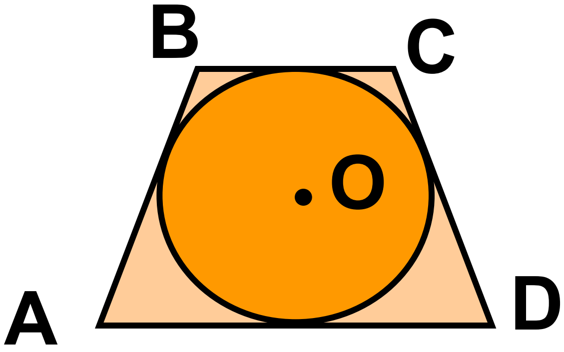
<u>План решения</u>: $r = \frac{1}{2} h$

1) *AB* = 10 ;
2) *AH* = 6 ;
3) *BH* = 8 ;
4) *r* = 4

Ответ: 4

Свойство 1

- **Если в равнобедренную трапецию вписана окружность, то её боковая сторона равна средней линии трапеции.**



Дано: окр.(O ; r) вписана в трапецию $ABCD$, $AD \parallel BC$

Доказать: $AB = \frac{AD + BC}{2}$

Доказательство:

по свойству четырёхугольника, описанного около окружности:

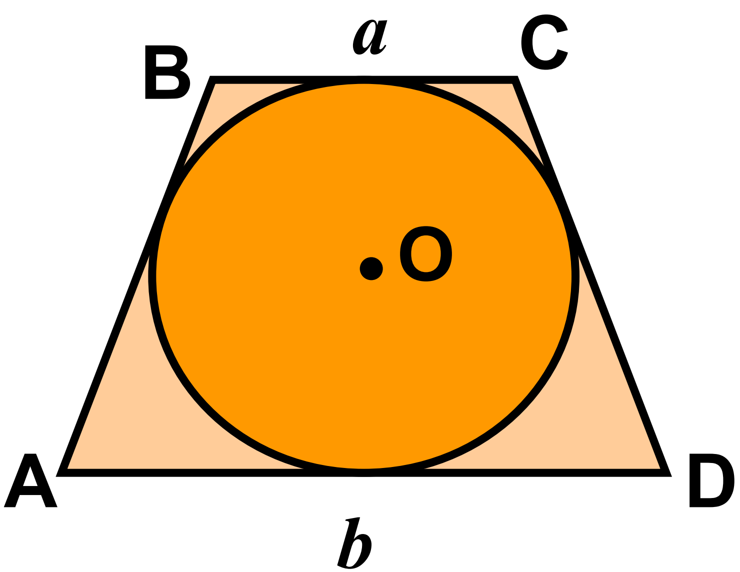
$AB + CD = AD + BC$, $AB = CD$,

$2AB = AD + BC$,

$$AB = \frac{AD + BC}{2}$$

Свойство 2

- **Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим её оснований:** $h^2 = a \cdot b$ **.**



Дано: окр.(*O* ; *r*) вписана в трапецию *ABCD*

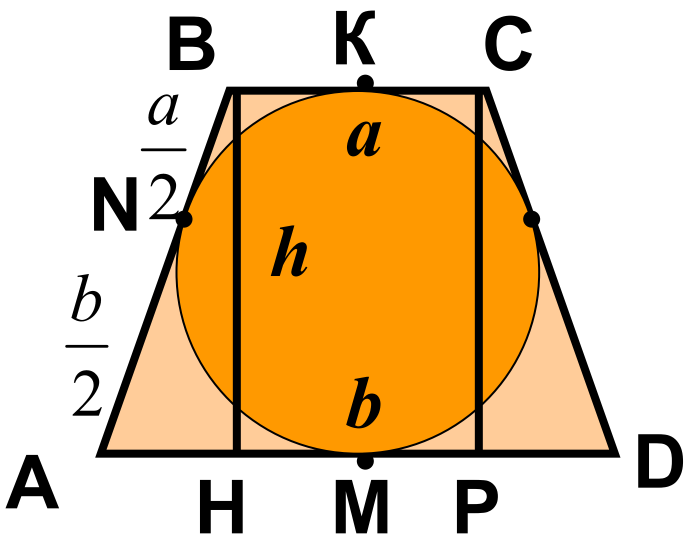
AD || *BC*

AB = *CD*, *BC* = ***a***, *AD* = *b*,

h – высота трапеции

Доказать: $h^2 = a \cdot b$

Доказательство:



1)По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности:

$$AM = AN = \frac{b}{2},\ BN = BK = \frac{a}{2}$$

2)Проведём высоту BH и рассмотрим

$$\Delta ABH : \angle H = 90^\circ,\ BH = h$$

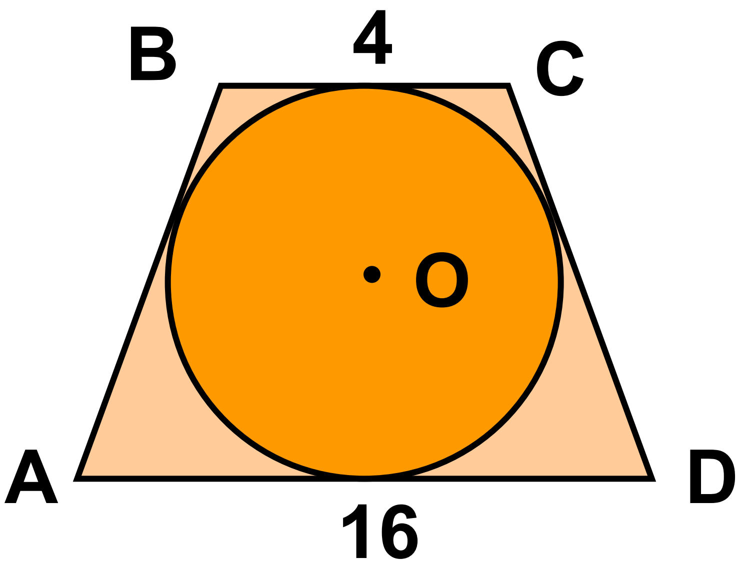
$$AH = \frac{b-a}{2},\qquad AB = \frac{a+b}{2},$$

По т. Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-b+a}{2}\right)\left(\frac{a+b+b-a}{2}\right)$$

$$h^2 = \frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2} = \frac{4ab}{4}\qquad \boxed{h^2 = ab}$$

Другое решение задачи 1



Дано: окр.(O;r) вписана в трапецию ABCD
AD || BC, AB = CD
AD = 16 см, BC = 4 см

Найти: *r*

Решение: $r = \frac{1}{2}h,$

$$h^2 = a \cdot b$$

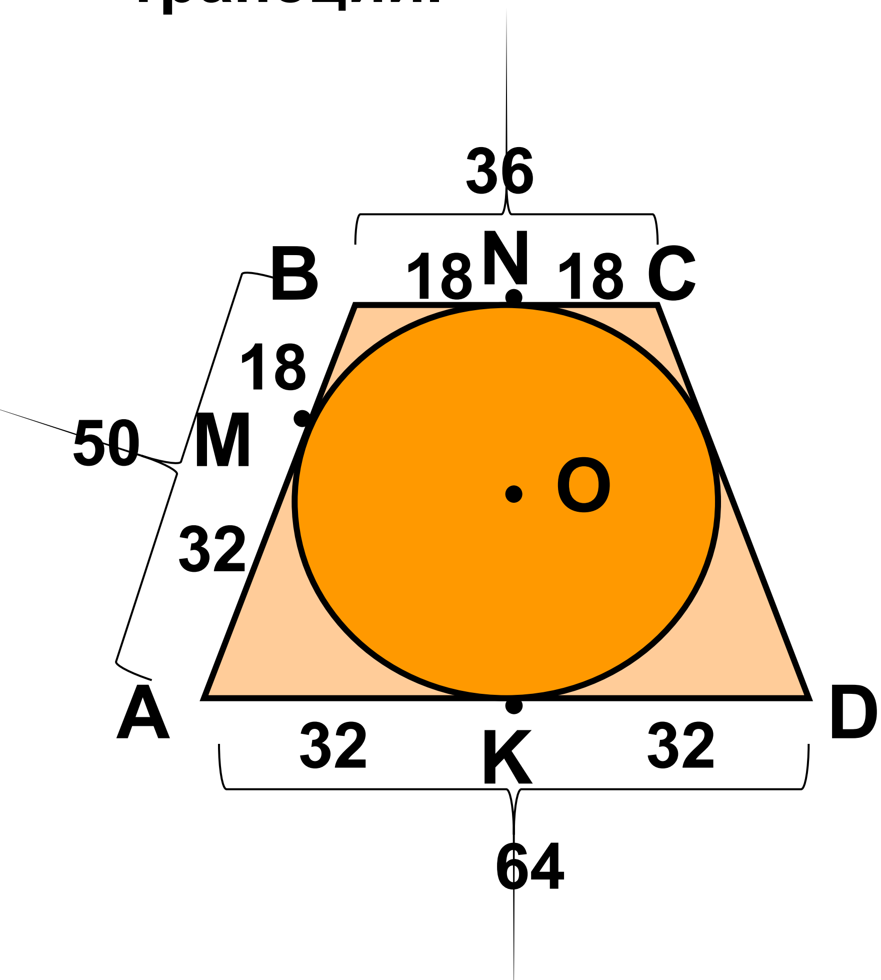
$$h = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (см)}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ (см)}$$

Ответ: r = 4 см

Задача 2

Равнобедренная трапеция описана около круга. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 18 и 32. Найдите площадь трапеции.



<u>Дано</u>: окр.(O ; r) вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$, $AB = CD$, $M \in AB$

$AM = 32$, $MB = 18$

<u>Найти</u>: S_{ABCD}

<u>План решения</u>:

$S = mh$

1) $AB = m = 50$;

2) $BC = 36$;

3) $AD = 64$;

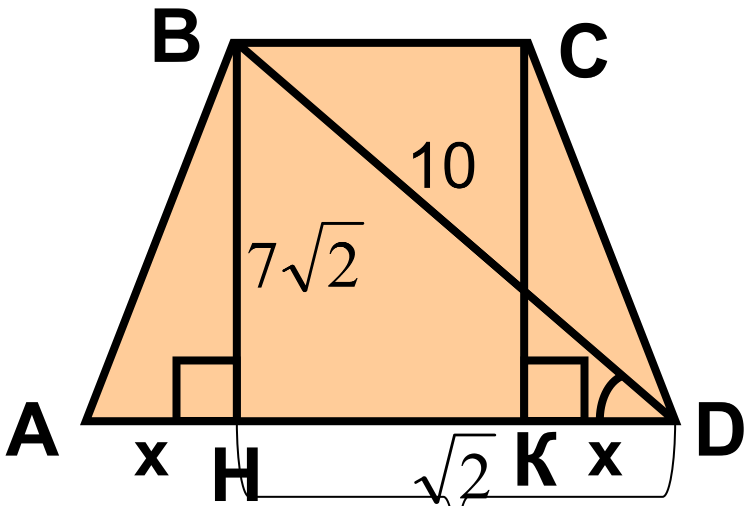
4) $h = \sqrt{a \cdot b}, h = \sqrt{36 \cdot 64} = 48$;

5) $S = 50 \cdot 36 = 1800$

Ответ:1800

Задача 3

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$. (ЕГЭ- 2007, В11)



<u>*Дано*</u>: *ABCD* - трапеция, *AD* || *BC*

cos BDH = $\frac{\sqrt{2}}{10}$, *BD* = 10

<u>*Найти:*</u> *S*

<u>*План решения*</u>: *S = mh*

1) *HD*= $\sqrt{2}$;
2) *BH* = $7\sqrt{2}$;
3) *AH* = *KD* = *x*, $m = \frac{BC + AD}{2}$,

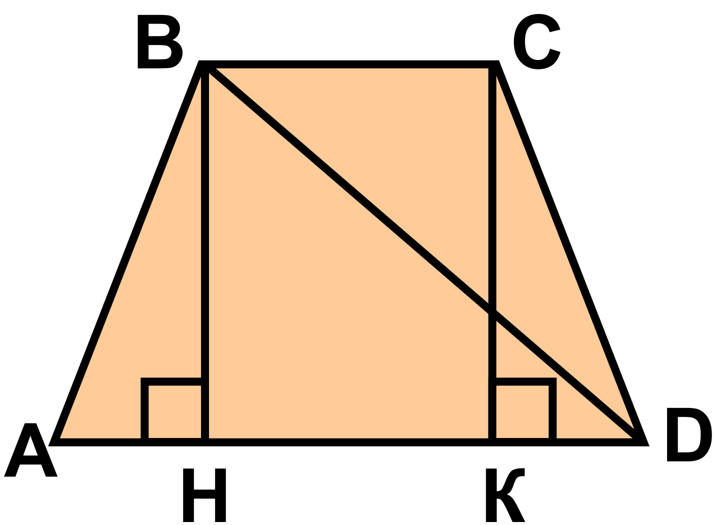
$$m = \frac{AD - 2x + AD}{2} = \frac{2AD - 2x}{2} = AD - x = HD = \sqrt{2}$$

4) S = $\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

Свойство 3

В равнобедренной трапеции проекция диагонали на большее основание равна средней линии трапеции.



<u>Дано</u>: *ABCD*- трапеция, *BC* || *AD*, *AB* = *CD*,*BH* $\perp$ *AD*, *BD*- диагональ

<u>Доказать</u>: $HD = \dfrac{AD + BC}{2}$

<u>Доказательство</u>:

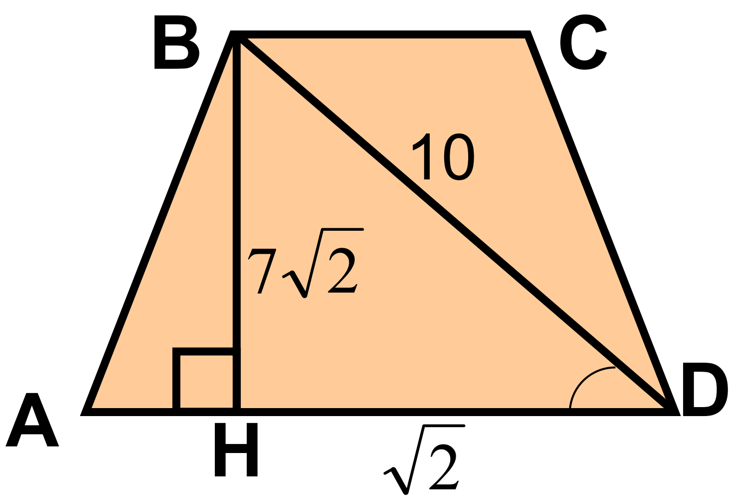
1) Опустим высоту *CK*.
2) $AH = \dfrac{AD - HK}{2}$;
3) $HD = AD - AH,$

$$HD = AD - \frac{AD - BC}{2},$$

$$\boxed{HD = \frac{AD + BC}{2}.}$$

Другое решение задачи 3

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$.



<u>Дано</u>: *ABCD* - трапеция,

AD || *BC*

cos BDH = $\frac{\sqrt{2}}{10}$, *BD* = 10

<u>*Найти:*</u> *S*

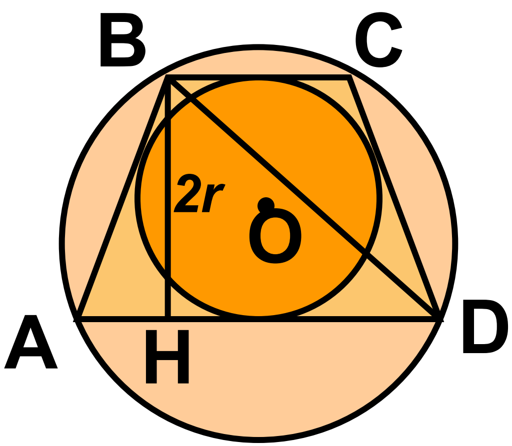
<u>*План решения*</u>: *S = mh*

1) *HD*= $\sqrt{2}$;
2) *BH* =$7\sqrt{2}$;
3) *S* = $\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

Задача 4

Около круга радиуса *r* описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α. Найдите радиус круга, описанного около трапеции.



<u>*Дано*</u>: *ABCD*- трапеция, *AD* || *BC*, описанная около окр.(*O*; *r*) и вписанная в окр.(O_1;*R*) *AB* = *CD*, $\angle B = \alpha$

<u>*Найти:*</u> *R*

<u>*Решение:*</u> по теореме синусов $\boxed{2R = \dfrac{BD}{\sin A}}$

$$1).\angle A = 180° - \alpha, \sin A = \frac{BH}{AB}, AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2r}{\sin\alpha},$$

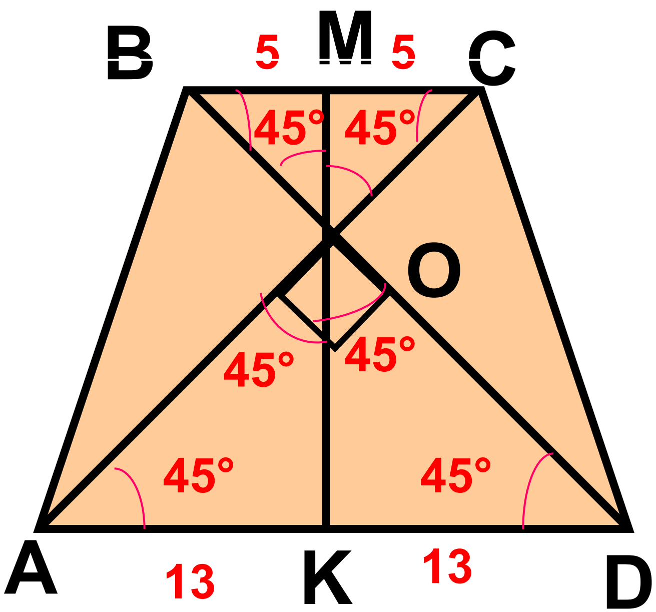
$$2).AB = HD, HD = \frac{2r}{\sin\alpha};$$

$$3).BD^2 = BH^2 + HD^2,\ BD = \sqrt{(2r)^2 + \left(\frac{2r}{\sin\alpha}\right)^2} = \frac{2r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$4).R = \frac{BD}{2\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$$

Задача 5

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26.



Дано: *ABCD*- трапеция, *AD* || *BC*, *AB* = *CD*, *AD* = 26, *BC* = 10, $AC \perp BD$

Найти: S

План решения: S = *mh*

1) $m = \dfrac{AD + BC}{2}$

2) Проведём высоту *MK*;

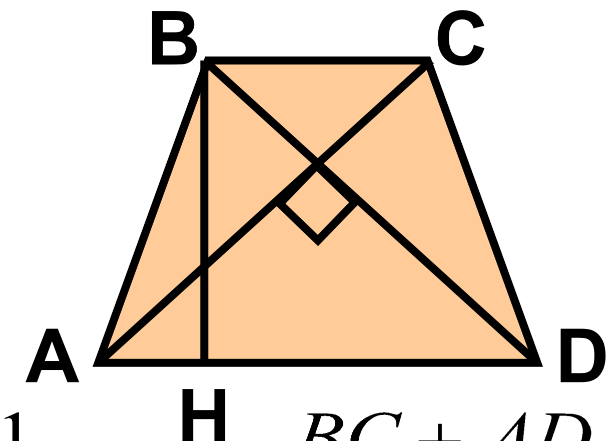
3) AK =OK = 13, BM = MO = 5, MK = 18

4) $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MK,$ $\quad S = \dfrac{10 + 26}{2} \cdot 18 = 18 \cdot 18 = 324$

Ответ: S = 324.

Свойство 4

Если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то её высота равна средней линии.



Дано: ABCD- трапеция, BC || AD, AB = CD, AC $\perp$ BD, BH – высота

Доказать: $BH = \dfrac{BC + AD}{2}$

Доказательство:

$$S = \frac{1}{2} BD^2, S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH,$$

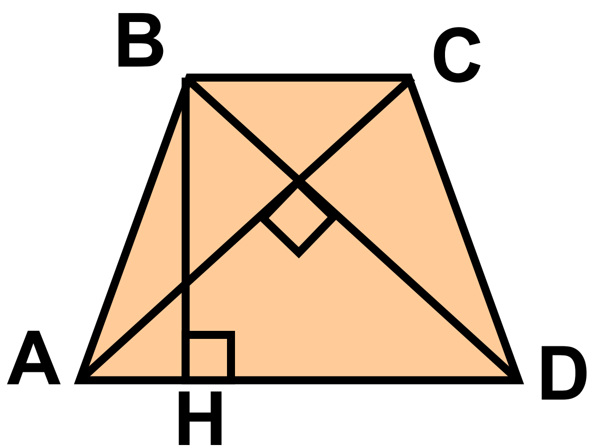
$$\frac{1}{2} BD^2 = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH, \quad HD = \frac{BC + AD}{2},$$

$$\frac{1}{2}\left(BH^2 + HD^2\right) = HD \cdot BH, BH^2 + HD^2 - 2HD \cdot BH = 0,$$

$$(BH - HD)^2 = 0, \quad BH = HD, \quad BH = \frac{BC + AD}{2}$$

Свойство 5

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату её высоты, т.е. $S = h^2$ **.**



<u>Дано</u>: *ABCD* – трапеция, *BC* || *AD*, *AB* = *CD*, *BH* – высота трапеции

$AC \perp BD$

<u>Доказать</u>: *S* = *BH*²

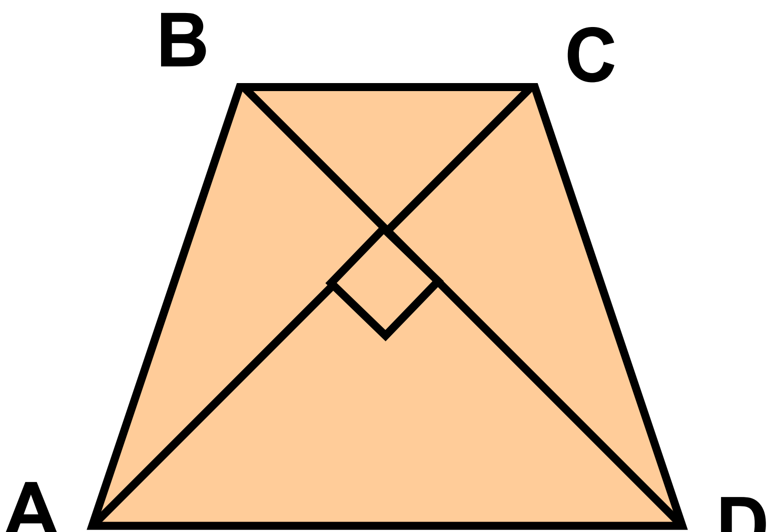
<u>Доказательство</u>:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH, \qquad BH = \frac{BC + AD}{2}$$

$$\boxed{S = BH^2}$$

Другое решение задачи 5

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26.



<u>Дано:</u> *ABCD*-равнобедренная трапеция, *AD* || *BC*, *AD* = 26, *BC* = 10,

$$AC \perp BD$$

<u>Найти:</u> S

<u>Решение:</u> *S* = *h*^{2},

h = *m*, *S* = *m*^{2} ,

$$m = \frac{BC + AD}{2}, m = \frac{10 + 26}{2} = 18$$

S= 18^2 =324.

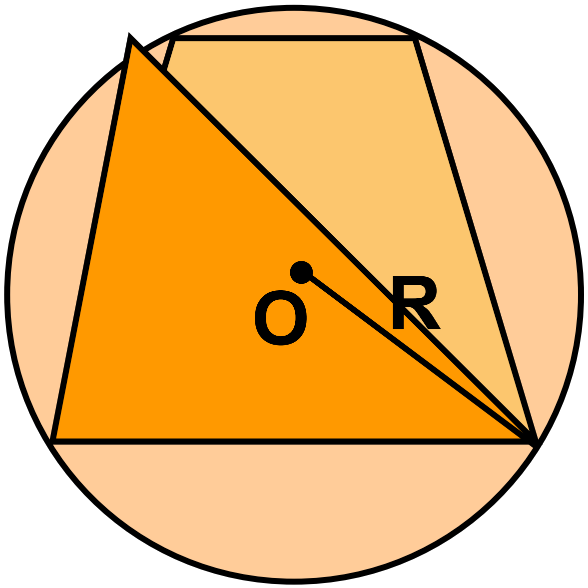
Ответ: 324

Литература

- Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Геометрия/ Под ред. М.И.Сканави.- М.: Издательский дом ОНИКС: Альянс-В, 1999.
- Зив Б.Г. ,Мейлер В.М. , Баханский А.Г. . Задачи по геометрии для 7-11 классов -М.: Просвещение, 1991.
- Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А. и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика.- М: Интеллект- Центр, 2003-2008.
- Кочагин В.В., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др. ЕГЭ- 2008: математика: реальные задания.- М.: АСТ: Астрель, 2008.
- Ковалева Г.И., Бузулина Т.И., Безрукова О.Л., Розка Ю.А. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов.- Волгоград: Учитель, 2007.
- Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике.- М.: Просвещение, 1991.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Сборник задач и контрольных работ по геометрии для 8 класса.- М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1999.
- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. сред. шк.- М.: Просвещение, 2008.
- Математика ЕГЭ- 2008. Вступительные испытания.Под ред. Ф.Ф. Лысенко.- Ростов-на-Дону: Легион, 2008.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Описанная окружность



Радиус окружности, описанной около трапеции, равен радиусу окружности, описанной около треугольника, вершины которого лежат в вершинах данной трапеции.