

# Скалярное произведение векторов

Геометрия 9 класс

Автор: Николаева Е.В., учитель  
математики МОУ СОШ № 33

# Угол между векторами

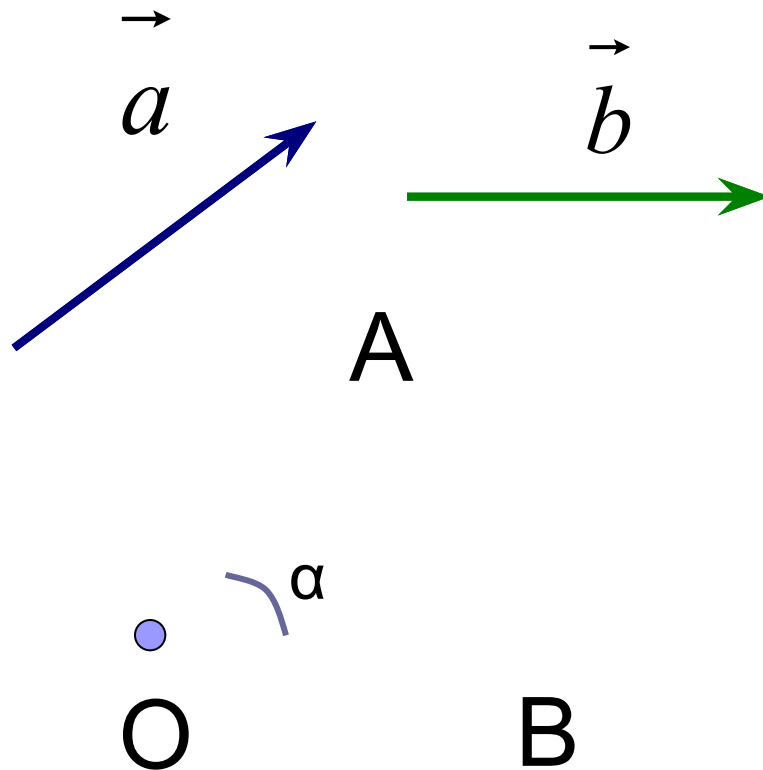
$a$  и  $b$  не являются  
сонаправленными

$O$  – произвольная точка

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

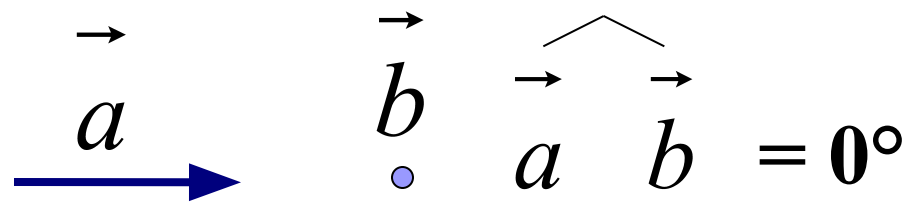
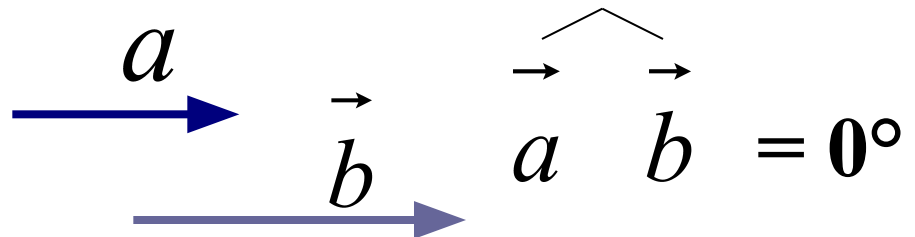
$$\angle AOB = \alpha$$

$$\widehat{\vec{a} \ \vec{b}} = \alpha$$

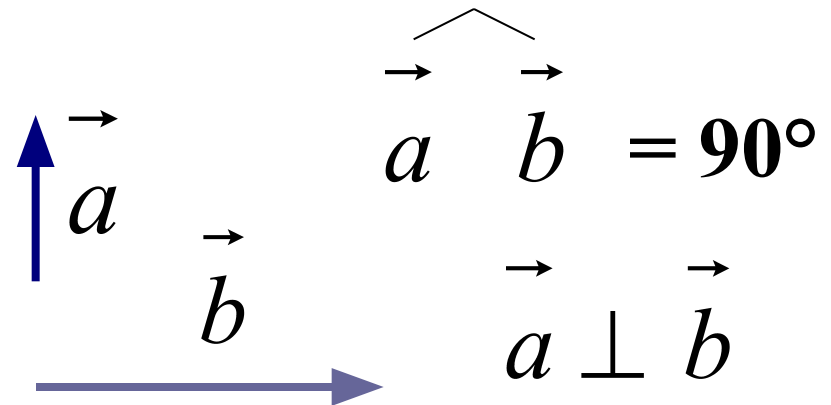


# Угол между векторами

- Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то угол между векторами равен  $0^\circ$ .



- Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$



# Найди угол между векторами

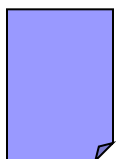
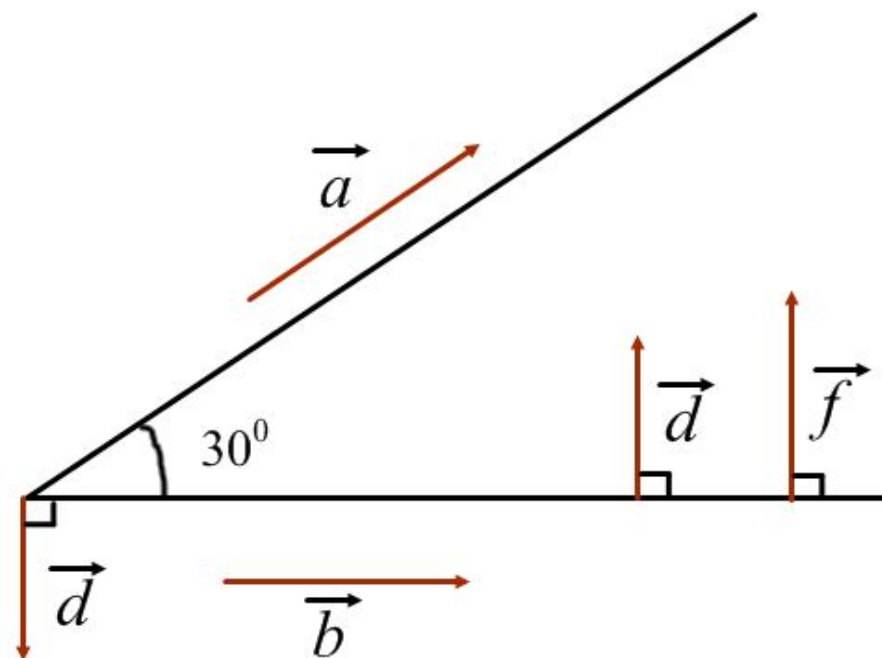
$$\widehat{a b}$$

$$\widehat{a c}$$

$$\widehat{c b}$$

$$\widehat{d f}$$

$$\widehat{d c}$$



# Скалярное произведение векторов

**Определение.** Скалярным произведением векторов называется **произведение** их **длин** на **косинус** угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \left( \widehat{a b} \right)$$

Пример:

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3,$$

$\alpha$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$\alpha = 135^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 135^\circ = 6 \cdot (-\cos 45^\circ) = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

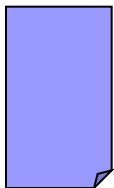
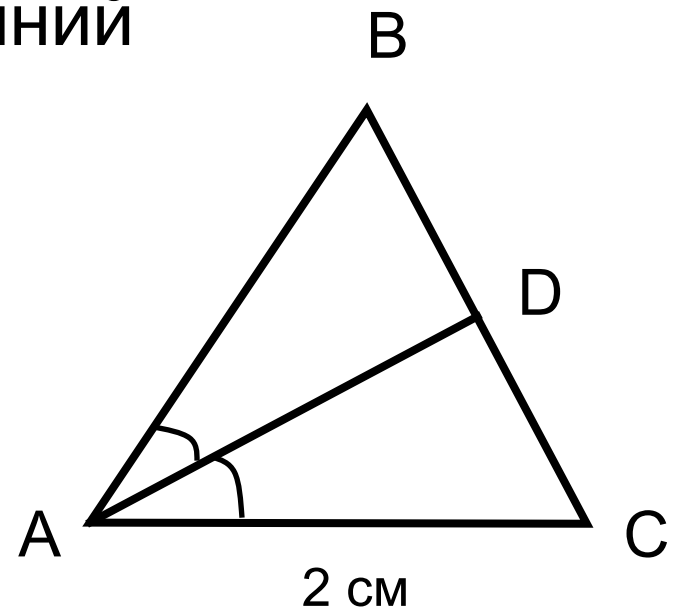
# Задача

Дано:  $\triangle ABC$  – равносторонний

$AC = 2$  см

Найти:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}, \\ & \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$



# Необходимое и достаточное условие равенства нулю скалярного произведения

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда когда эти векторы перпендикулярны

$$1) \left. \begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$1) \left. \begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \left( \widehat{a b} \right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^{\circ}$$

$$\cos 90^{\circ} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \left( \widehat{a b} \right) = 0$$

$$\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{a}| \neq 0; \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{b}| \neq 0$$

$$\cos \left( \widehat{a b} \right) = 0 \Rightarrow \widehat{a b} = 90^{\circ}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$



# Скалярный квадрат

Скалярное произведение

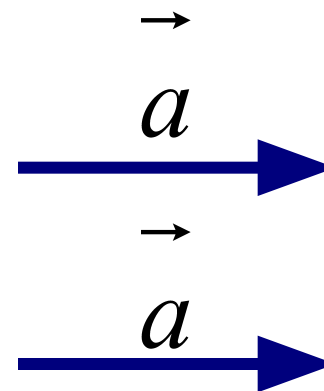
$$\vec{a} \cdot \vec{a}$$

называется **скалярным квадратом** вектора

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos \left( \widehat{\vec{a} \vec{a}} \right)$$

$$\cos \left( \widehat{\vec{a} \vec{a}} \right) = \cos 0^{\circ} = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$



**Свойство.**

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

# Домашнее задание

- Пп. 101-102
- №1040
- № 1041
- № 1042

# Применение скалярного произведения в физике

- Работа  $A$  постоянной силы  $\vec{F}$  при перемещении тела из точки  $M$  в точку  $N$ , равна произведению длин векторов силы и перемещения на косинус угла между ними.
- Т.е. работа силы  $\vec{F}$  равна скалярному произведению векторов силы и перемещения

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos \varphi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$

# Самое главное

- Скалярным произведением векторов называется **произведение** их **длин** на **косинус угла** между ними
- Скалярное произведение **ненулевых** векторов **равно нулю** **тогда и только тогда** когда эти векторы **перпендикулярны**
- Скалярное произведение вектора самого на себя называется **скалярным квадратом** вектора
- Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.