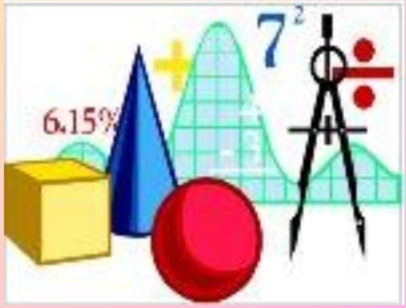
МКОУ « Погорельская СОШ»

ОБЪЕМ ТЕЛ

Объем пирамиды.



Цели :

- Научиться применять интегрирование функций в качестве одного из способов решения задач на нахождение объёмов геометрических тел.
- Развитие логического мышления, пространственного воображения, умений действовать по алгоритму, составлять алгоритмы действий.
- Воспитание познавательной активности, самостоятельности.

Объем пирамиды

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту

1. Дана треугольная пирамида

$OX \perp (ABC)$, $OX \cap (ABC) = M$; $OX \cap (A_1B_1C_1) = M1$
X- абсцисса точки M; S(x)-площадь сечения;
S-площадь основания

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ так, как $AB \parallel A_1B_1$; $AC \parallel A_1C_1$; $BC \parallel B_1C_1$

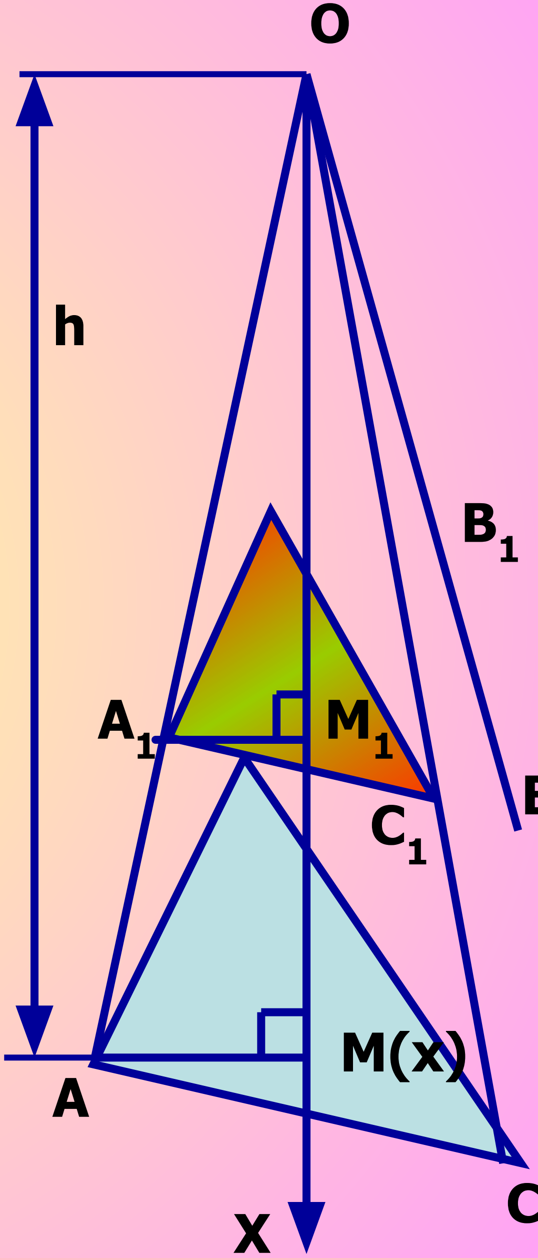
$AB:A_1B_1 = k \rightarrow OA:OA_1 = k$; аналогично

$BC:B_1C_1 = AC:A_1C_1 = k$; $S:S(x) = k^2$;

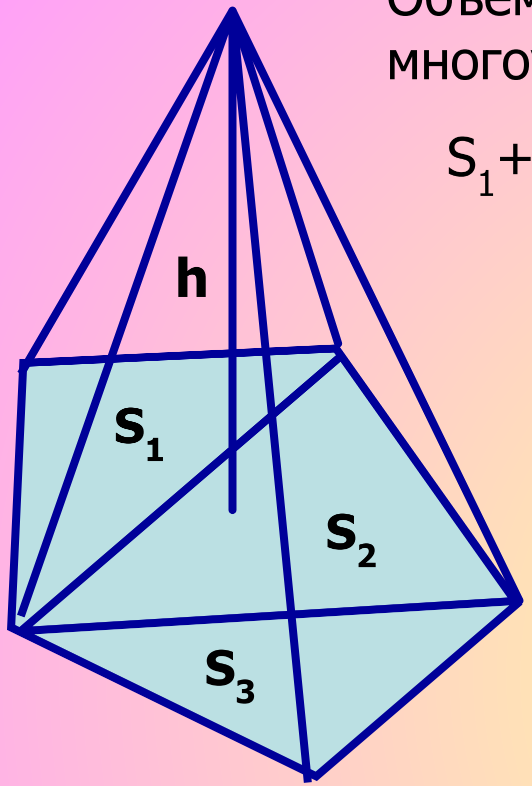
$\Delta AMO \backsim \Delta M_1A_1O_1 \rightarrow OM:OM_1 = k$; $OM_1:OM = X:h$

$k = X:h$; $S:S(x) = (X:h)^2 = k^2$ $S(\times) = (S * \times^2):h^2$

$$V = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2} dx = \frac{S}{x^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} * \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} S * h$$



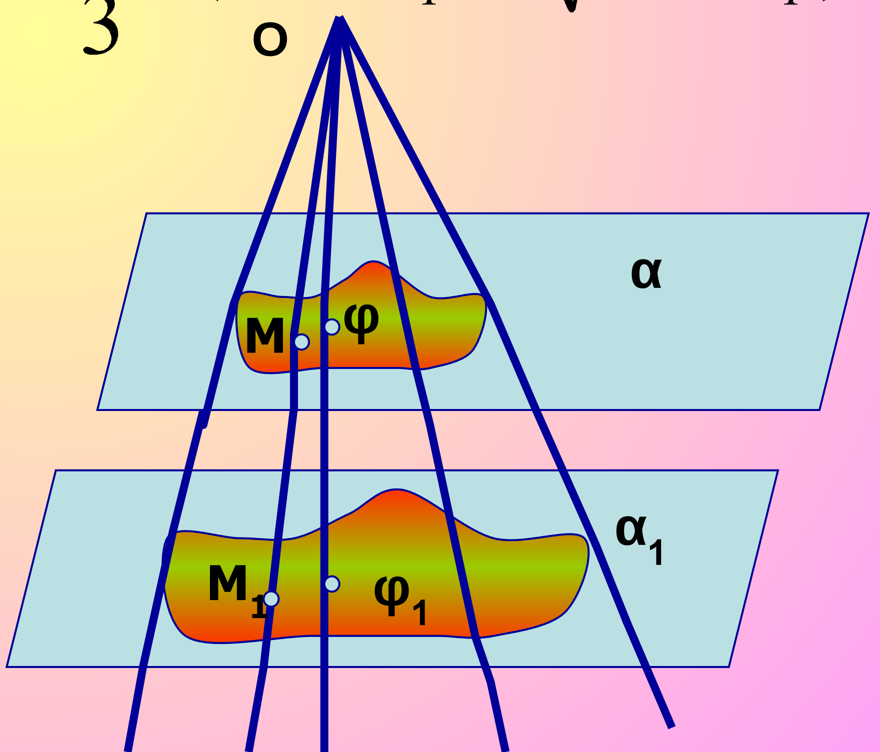
Объем пирамиды, имеющей в основании многоугольник.



$S_1 + S_2 + S_3$ V=1/3*(S1+ S2+ S3)*h

Следствие : Объем усеченной пирамиды, высота которой h, а площади оснований S и S_1 , вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S * S_1})$$



Рассмотрим произвольную треугольную пирамиду SABC с высотой SO=*H*.

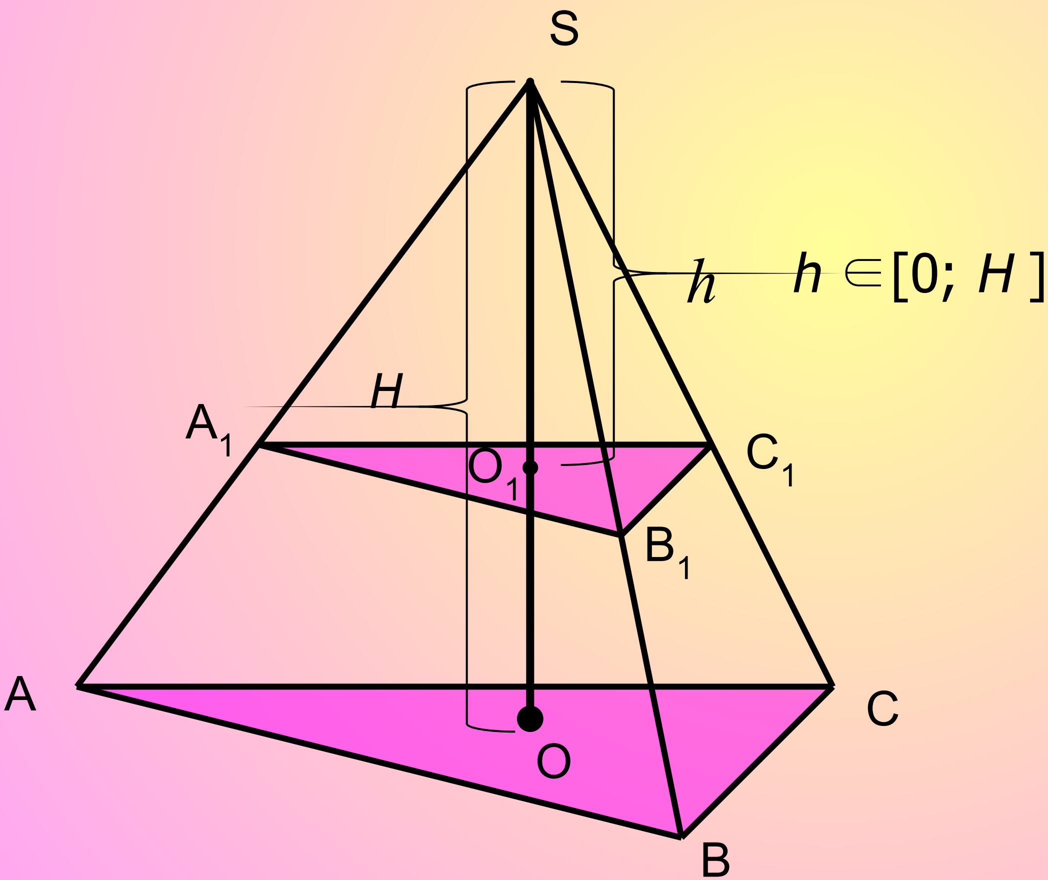
Построим сечение пирамиды, параллельное плоскости основания и находящееся на расстоянии h от её вершины.

Т.к. ΔABC□$\Delta A_1B_1C_1$, то по свойству площадей подобных фигур :

$$\frac{S_{\text{î ńí .}}}{S_{\text{ńĺ÷.}}} = \frac{H^2}{h^2}$$

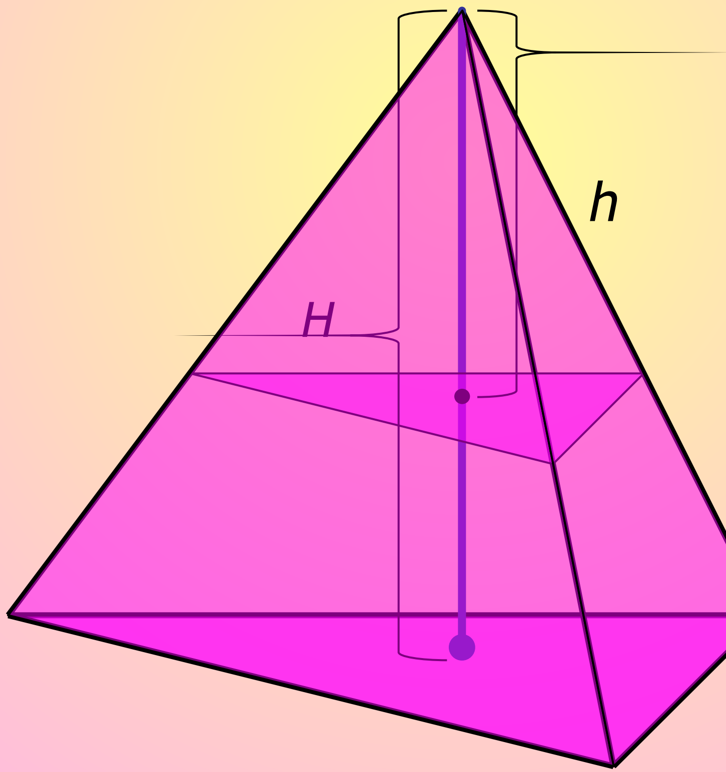
$$\Downarrow$$

$$S_{\text{ńĺ÷.}} = \frac{S_{\text{î ńí .}} \cdot h^2}{H^2}$$



Т.к. *h* – изменяющаяся величина, то площадь сечения можно рассматривать как функцию от переменной *h*, *где h* – расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания.

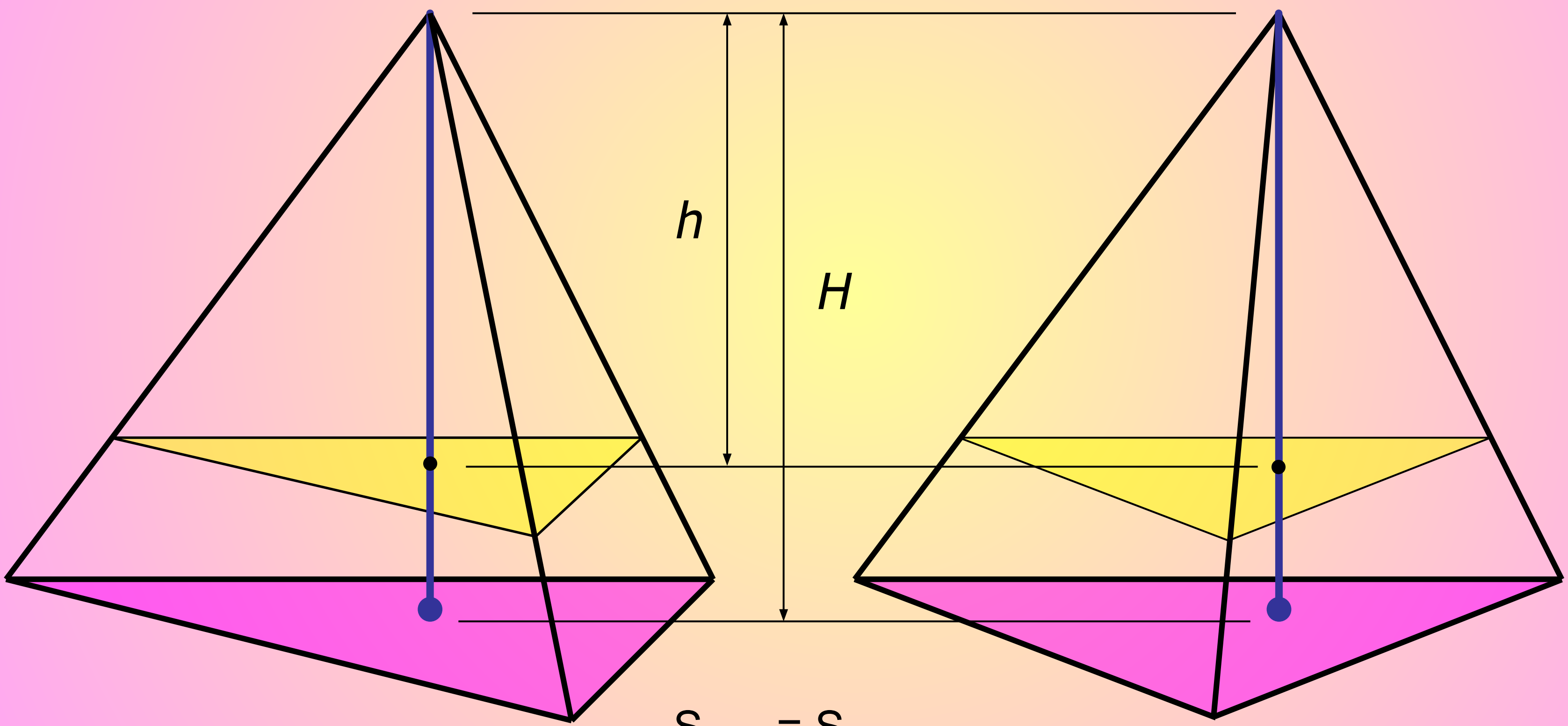
Используя понятие бесконечной интегральной суммы, объем данной пирамиды можно получить как бесконечную сумму площадей таких сечений, построенных вдоль высоты.



$h \in [0;\ H]$

На основании предыдущих рассуждений можно сделать вывод о том, что пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами, имеют равные объемы.

$$V_1 = V_2$$



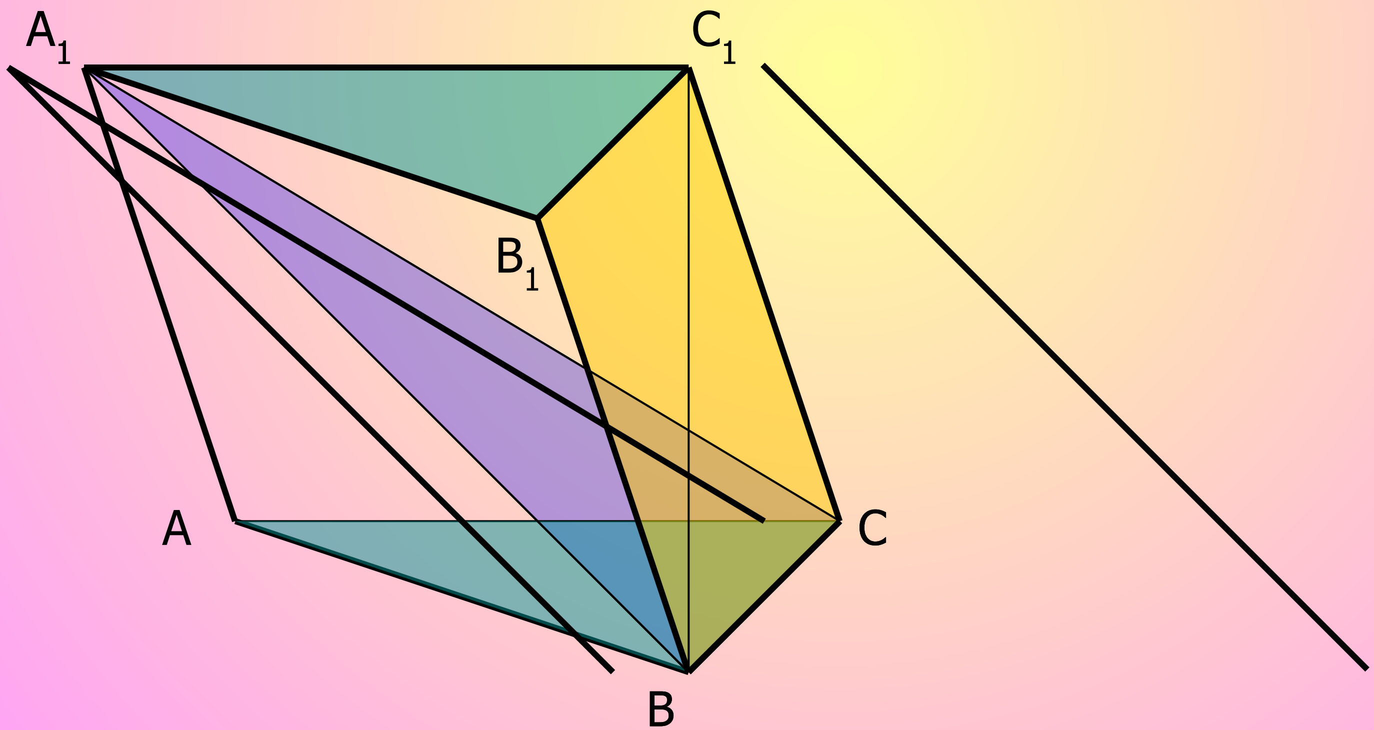
$$S_{осн.1} = S_{осн.2}$$

$$S_{сеч.1} = S_{сеч.2}$$

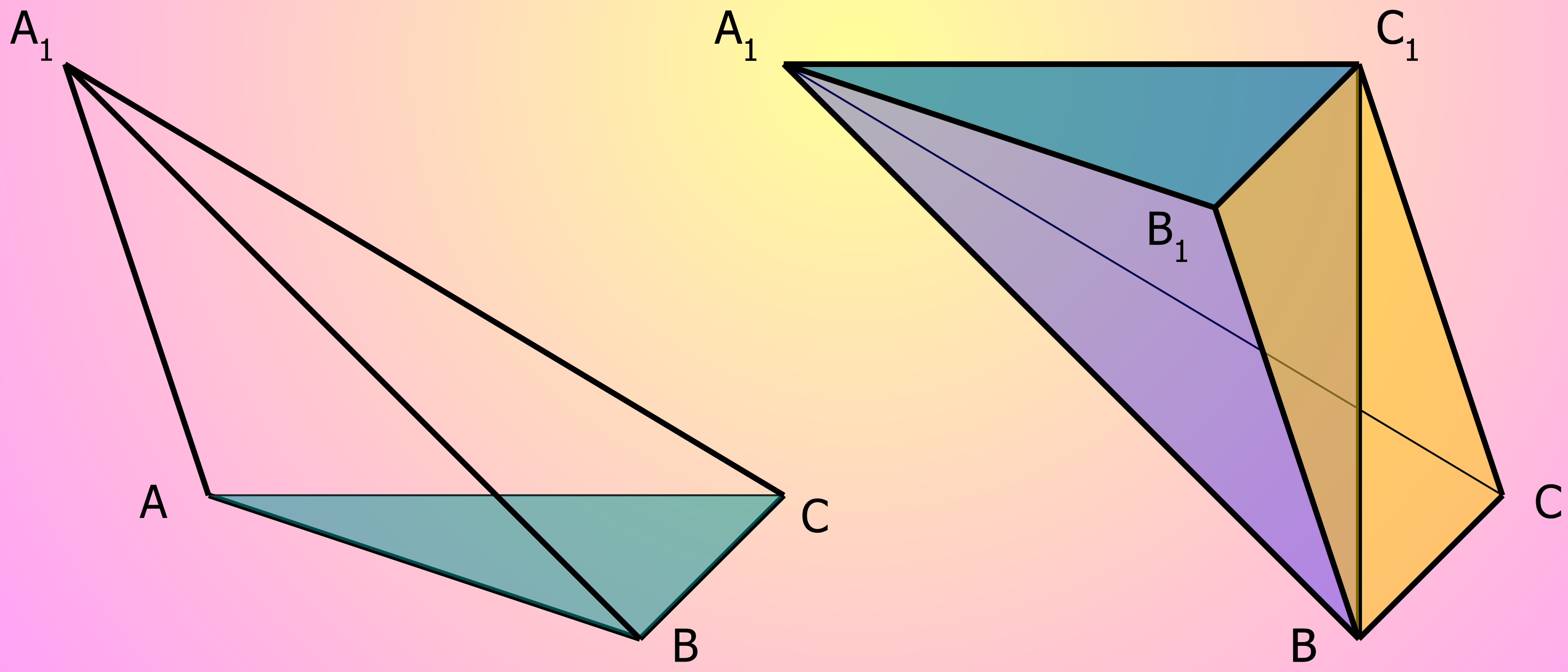
Рассмотрим произвольную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$.

1) Разобьем её на две части секущей плоскостью (A_1BC).

2) Получились две пространственные фигуры: треугольная пирамида A_1ABC и четырехугольная пирамида $A_1BCC_1B_1$ (обе пирамиды с вершиной A_1).



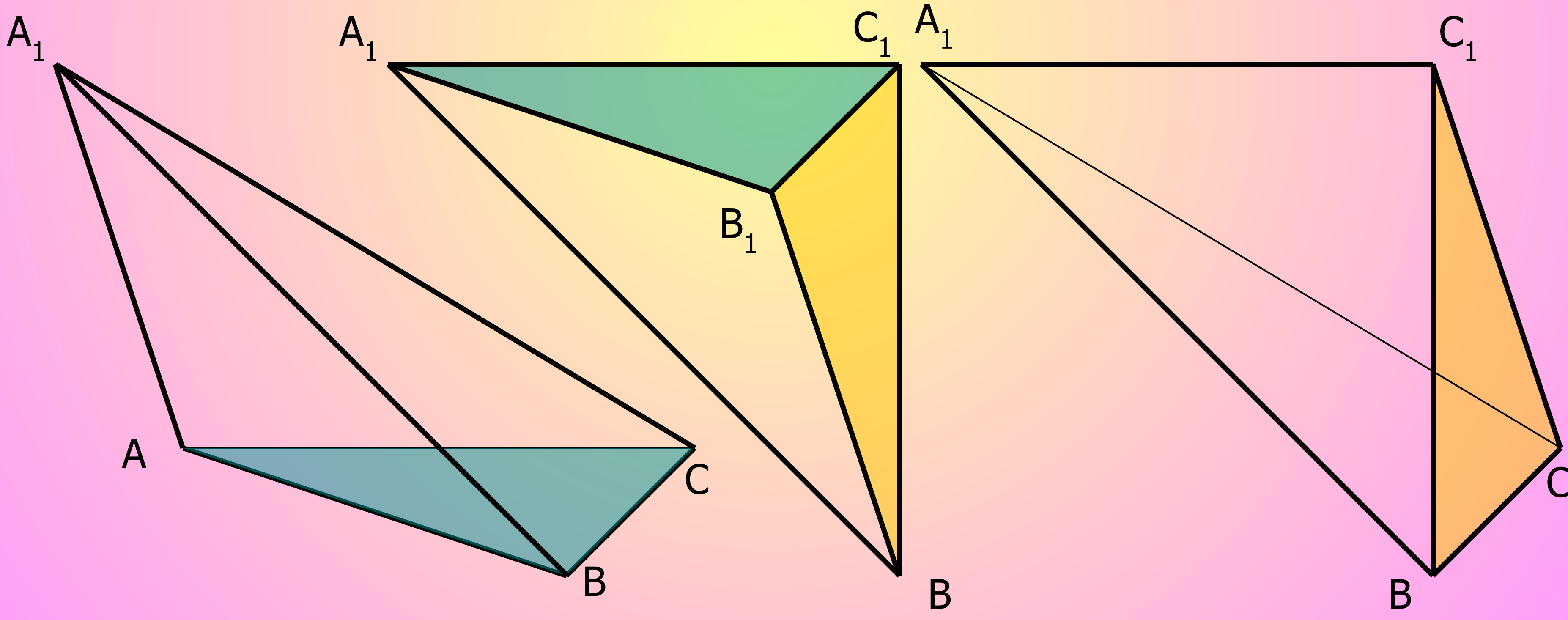
Теперь разобьём четырёхугольную пирамиду $A_1BCC_1B_1$ секущей плоскостью (A_1C_1B) на две треугольные пирамиды: $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 (обе пирамиды с вершиной A_1).



У треугольных пирамид A_1ABC и $BA_1B_1C_1$ основания равны (как противоположные основания призмы) и их высотами является высота призмы. Значит, их объемы также равны.

У треугольных пирамид $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 основания равны (объясните самостоятельно) и у них общая высота, проведенная из вершины A_1. Значит, их объемы также равны.

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} \qquad V_{A_1BB_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

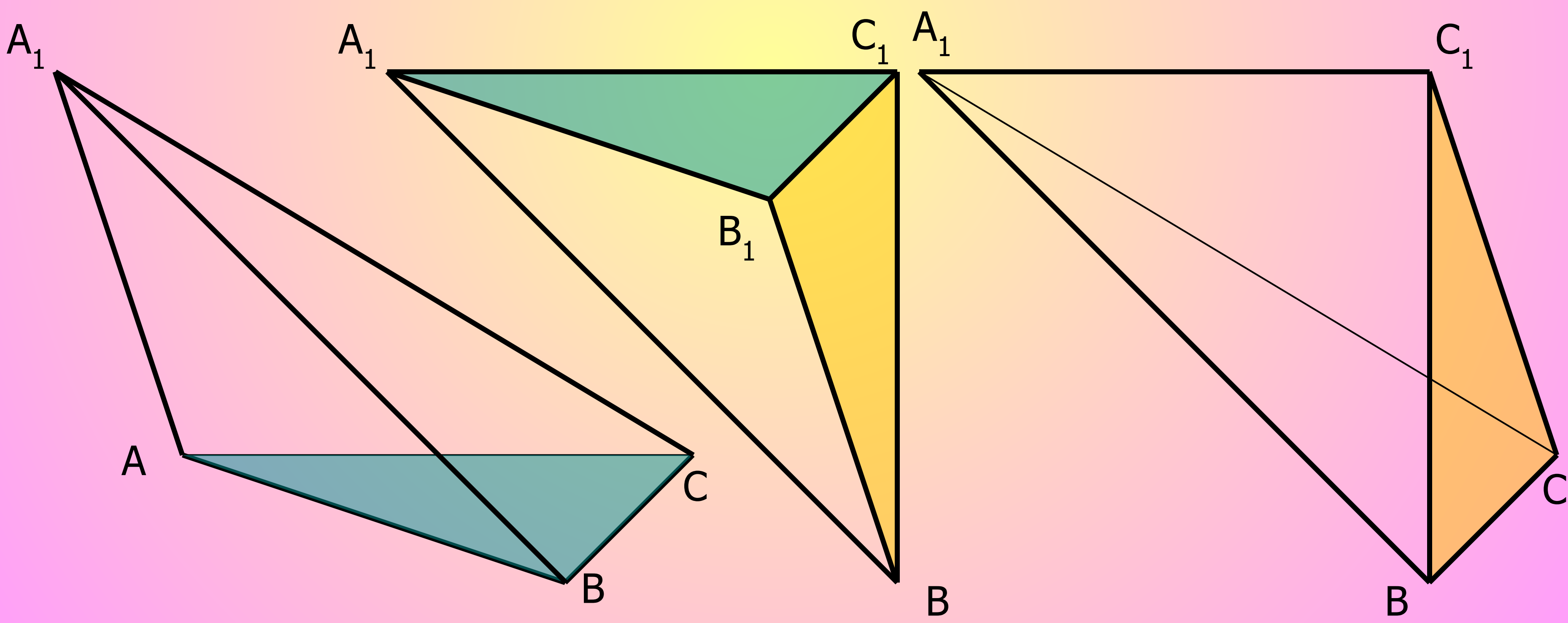


Тогда, по свойству транзитивности, объемы всех трех пирамид равны:

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

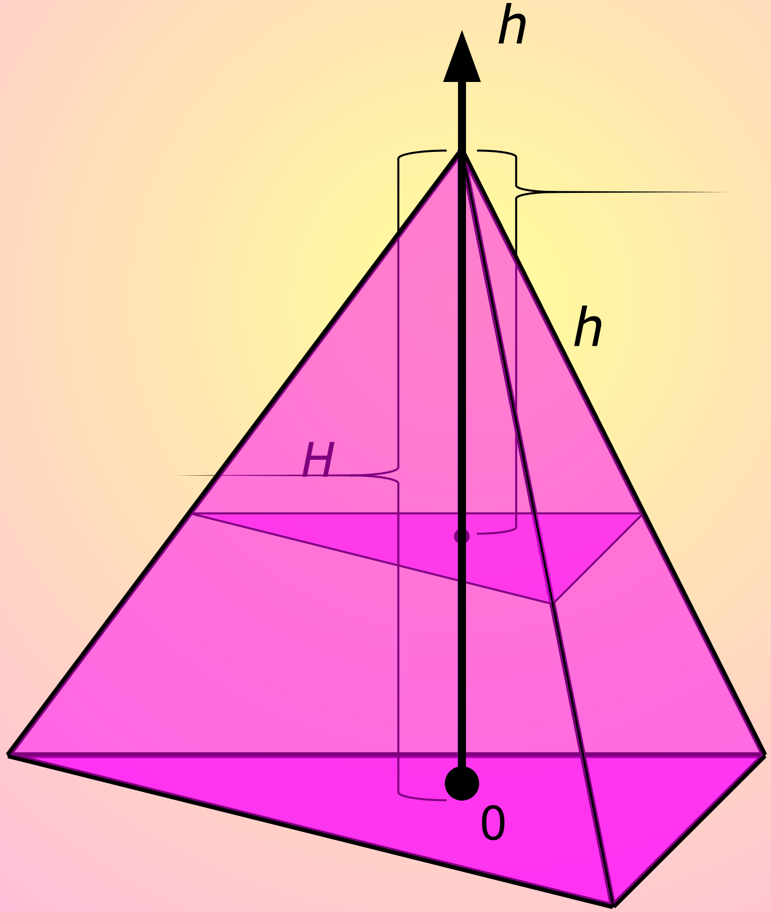
Значит, объем пирамиды в три раза меньше объема призмы с такими же основанием и высотой, т.е.

$$V = \frac{1}{3} S_{\hat{\imath}\acute{n}\acute{\imath}.} \cdot H$$



Эту же формулу можно было получить непосредственным интегрированием площади сечения, как функции, зависящей от расстояния h:

$$V=\int_0^H S_{\text{ńĺ÷.}}\,dh=\int_0^H \frac{S_{\text{îńí.}}\cdot h^2}{H^2}\,dh=\frac{S_{\text{îńí.}}}{H^2}\int_0^H h^2\,dh=\frac{S_{\text{îńí.}}}{H^2}\,\frac{h^3}{3}\Bigg|_0^H=\frac{1}{3}S_{\text{îńí.}}\cdot H$$

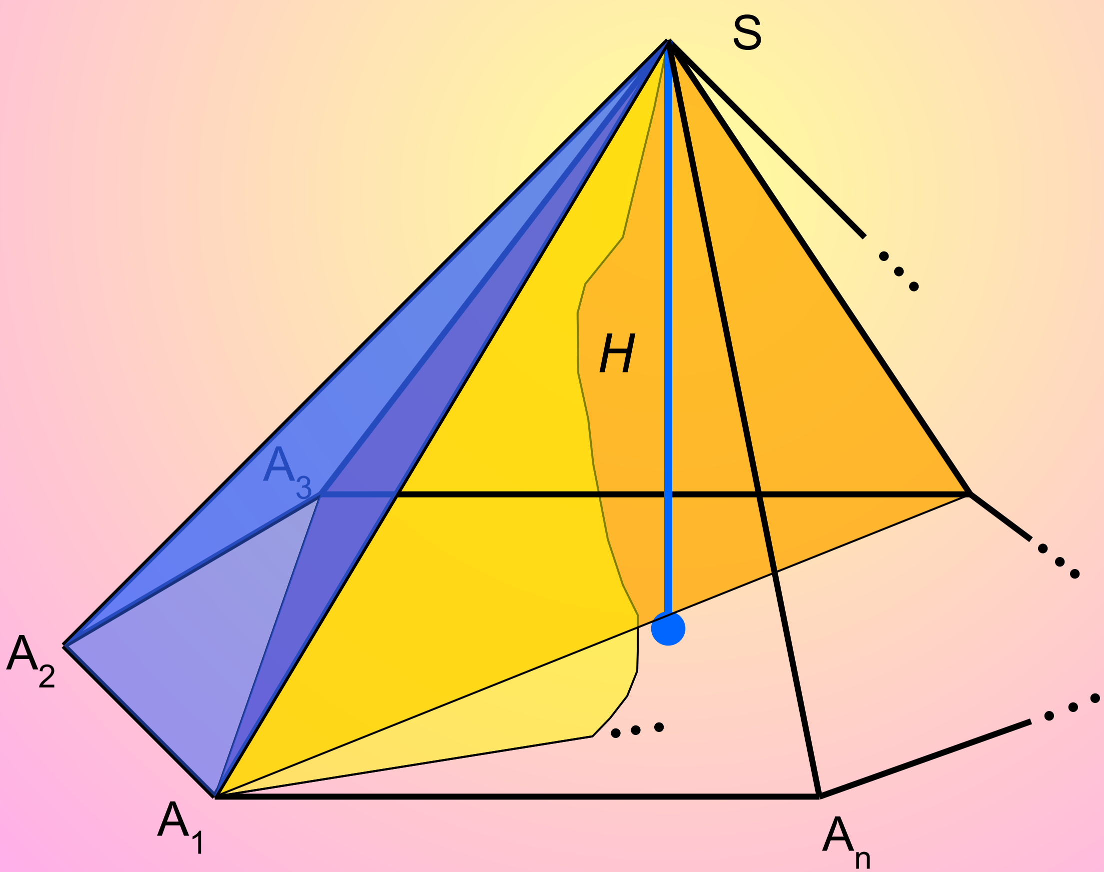


$h \in [0;\ H\,]$

Рассматривая произвольную n-угольную пирамиду $SA_1A_2\ldots A_n$ как сумму треугольных пирамид с общей вершиной и высотой, получим формулу для нахождения объема любой пирамиды:

$$V_{\text{đčđŕěčäű}} = V_{SA_1A_2A_3} + V_{SA_1A_3A_4} + \ldots + V_{SA_1A_{n-1}A_n} = \frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H + \frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_3A_4}\cdot H + \ldots + \frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}\cdot H =$$

$$= \frac{1}{3}H\cdot\left(S_{\Delta A_1A_2A_3} + S_{\Delta A_1A_3A_4} + \ldots + S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}\right) = \frac{1}{3}S_{A_1A_2\ldots A_n}\cdot H = \boxed{\frac{1}{3}S\cdot H}$$



Итак, для любой n-угольной пирамиды:

$$V_{\text{ďčđŕěčäű}} = \frac{1}{3} S_{\text{îńí .}} \cdot H$$

,где $S_{осн.}$ – площадь основания пирамиды, H – высота пирамиды.

Решение задач по готовым чертежам (стр184)

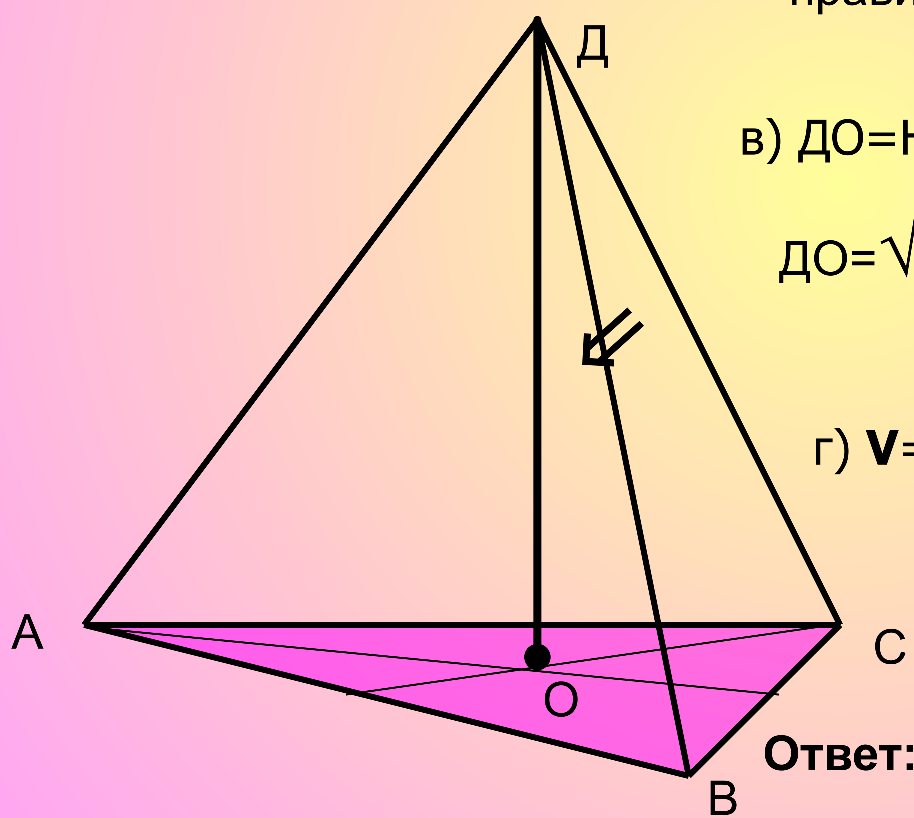
Дано: АВСД- правильная пирамида. АВ=3, АД=$2\sqrt{3}$

Найти: а) $S_{осн.}$, б) АО, в) ДО, г) V-?

Решение: $S_{осн.}$=(используем формулу для вычисления площади правильного Δ) =

а) $S_{осн.}=a^2\sqrt{3}/4 = 9\sqrt{3}/4$.

б) АО=R=h*2/3= $a\sqrt{3}/3$(формула радиуса описанной окружности через сторону правильного Δ). АО= $3\sqrt{3}/3=\sqrt{3}$



в) ДО=Н=$\sqrt{АД^2-АО^2}$ (по теореме Пифагора)

ДО=$\sqrt{2(\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3}/3)^2}=\sqrt{12-9/3}=\sqrt{9}=3$

г) **V**=1/3 *$S_{осн.}$*H^3= $1/3*9\sqrt{3}/4*3=9\sqrt{3}/4$

Ответ:$S_{осн}$=$9\sqrt{3}/4$, **АО**=$\sqrt{3}$, **ДО**=3, **V**=$9\sqrt{3}/4$

Решение задач по готовым чертежам(стр 184)

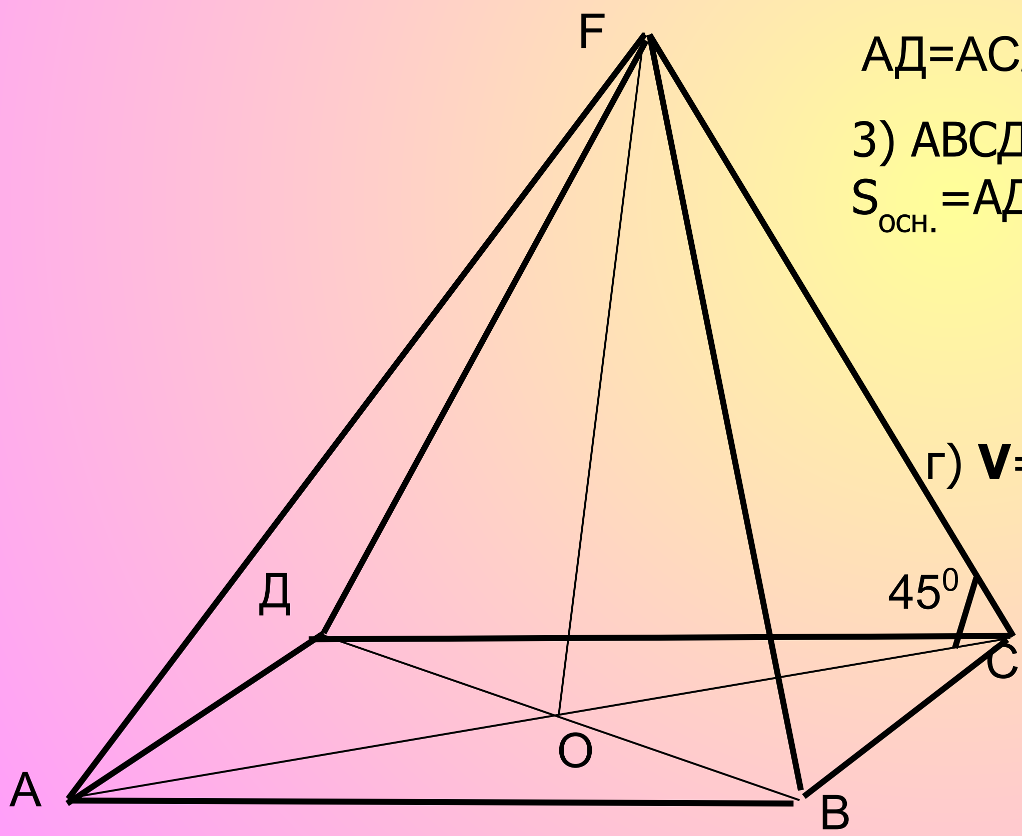
Дано: АВСДF- правильная пирамида. <FCO=45^0, FO=2.

Найти: а) $S_{осн.}$, б) V-?

Решение: Рассмотрим ∆ FCO:

1) Из ∆ FCO: <O=90^0, <C=45^0, значит , <F=45^0. Следовательно , ∆ FCO- равнобедренный, OC=FO=2.

2)AC=2OC=4 , d=AC=AД=√2 (по свойству диагонали квадрата, $d^2=2a^2$). Тогда



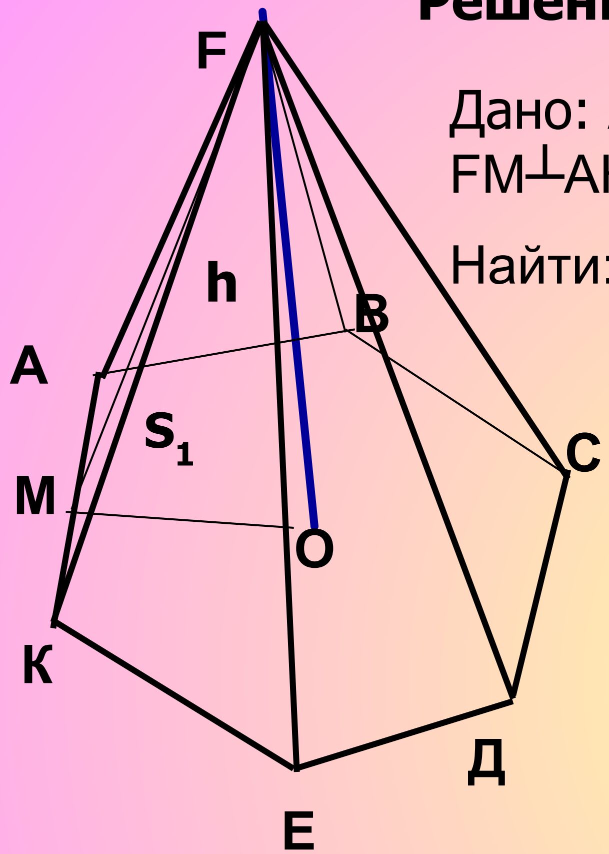
АД=АС/√2 =4/√2 =2√2.

3) АВСД- квадрат (пирамида правильная). $S_{осн.}$=$АД^2$=$(2\sqrt{2})^2$=8

г) **V**=1/3*$S_{осн.}$*h=1/3*8*2=16/3=5*1/3.

Ответ:$S_{осн}$=8, **V**=5*1/3

Решение задач по готовым чертежам(стр185)



Дано: АВСДЕКF-правильная пирамида.FO⊥(АВС), FM⊥АК, FO=4, FM=5.

Найти:а) $S_{осн.}$=? б) V=?

Решение:

1. Рассмотрим треугольник FOM: <O=90^0

(так как FO⊥(АВС), значит FO⊥OM), FO=4,

FM=5, OM=$\sqrt{MF^2-FO^2}$ (по теореме Пифагора)

OM=$\sqrt{25-16}$ =$\sqrt{9}$=3, OM=r (радиус окружности

вписанной в правильный шестиугольник).

АК=2r*tdП/6=2*3*tdП/6= 6*$\sqrt{3}$/3=2$\sqrt{3}$.

2. $S_{осн.}$=6*$S_{АОК}$=1/2*АК*ОМ=1/2*2$\sqrt{3}$*3=3$\sqrt{3}$. $S_{осн.}$=6*3$\sqrt{3}$=18$\sqrt{3}$.

3. V=1/3*$S_{осн.}$*H , V=1/3*18$\sqrt{3}$*4=24$\sqrt{3}$.

Ответ: $S_{осн.}$=18$\sqrt{3}$ ед^2, V=24$\sqrt{3}$ ед^3.

Свойство объемов №1

Равные тела имеют равные объемы

Свойство объемов №2

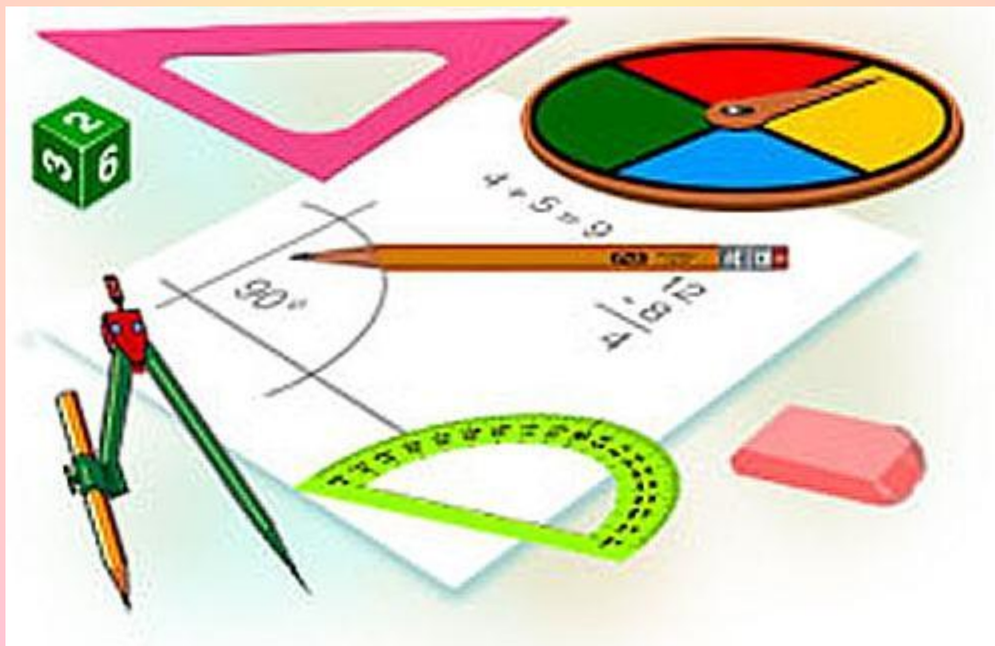
Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Свойство объемов №3

Если одно тело содержит другое, то объем первого тела не меньше объема второго.

Домашнее задание

П. 69, № 684а, 686а, 687.



Библиография

- Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев «Геометрия, 10-11», М., Просвещение, 2007
- В.Я. Яровенко «Поурочные разработки по геометрии», Москва, «ВАКО», 2006

УСПЕХОВ!