

# Геометрия Лобачевского

Выполнил:

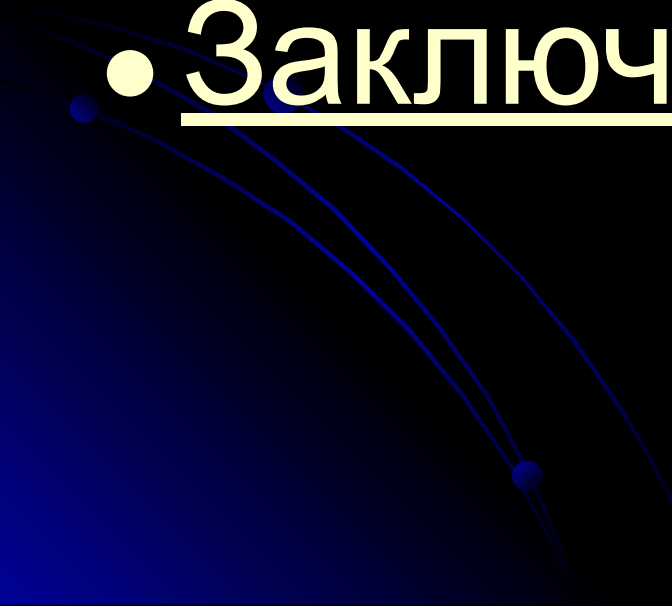
учащийся 8а класса

**Заборцев**

**Валентин**

Учитель: Черемисина Г. А.

# Содержание


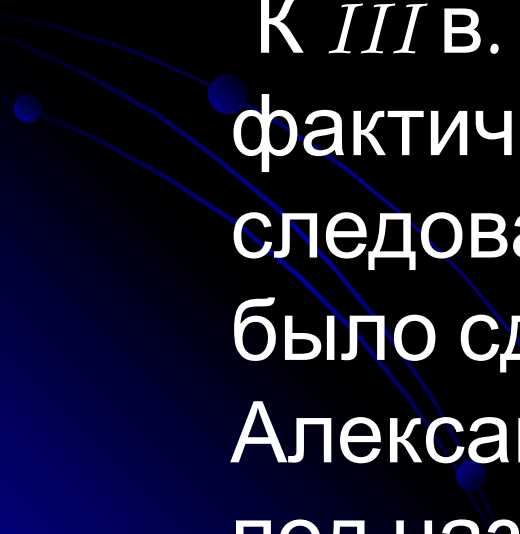
- Введение
  - Основная часть
  - Заключение
- 

# Введение

Становление геометрии как науки,  
по-видимому, началось в Древней  
Греции

в VII–V вв. до н. э.

К III в. до н. э. накопился большой фактический материал, который следовало систематизировать. Это было сделано Евклидом из Александрии в сочинении, известном под названием «Начала».



Происходило накопление фактического материала, в геометрию начали проникать методы алгебры и математического анализа. И все это время геометрия, изложенная Евклидом в «Началах», признавалась истинной и не вызывало сомнений. Лишь один вопрос привлекал особое внимание ученых в течении более двух тысячелетий – вопрос о пятом постулате Евклида, или об аксиоме параллельных



# Основная

## часть Теоретический материал

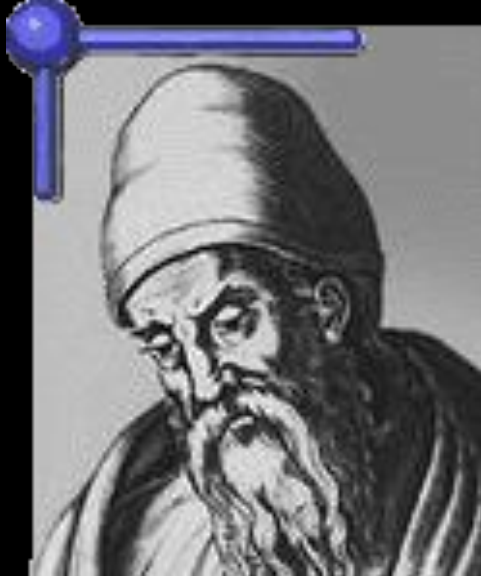


Основные геометрические построения



Краткие биографии ученых





**ЕВКЛИД**, или **ЭВКЛИД** - древнегреческий математик, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Биографические сведения о жизни и деятельности Евклида крайне скудны. Известно, что он родом из Афин, был учеником Платона.



**НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ** родился 1 декабря (20 ноября) 1792 года в Нижнем Новгороде в бедной семье мелкого чиновника. Девятилетним мальчиком он был привезен матерью в Казань и ее стараниями устроен вместе с двумя братьями в гимназию на казенное содержание. С этого времени его жизнь и работа протекают в Казани.



## ЕВКЛИД

Сведения о времени и месте его рождения до нас не дошли, однако известно, что Евклид жил в Александрии и расцвет его деятельности приходится на время царствования в Египте Птолемея. Известно также, что Евклид был моложе учеников Платона (427-347 до н.э.), но старше Архимеда (ок. 287-212 до н.э.), так как, с одной стороны, был платоником и хорошо знал философию Платона, а с другой стороны - его имя упоминается в первом из двух писем Архимеда к Досифею 'О шаре и цилиндре'. С именем Евклида связывают становление александрийской математики (геометрической алгебры) как науки. Прокол в комментариях к первой книге 'Начал' приводит известный анекдот о вопросе, который будто бы задал Птолемею Евклиду: 'Нет ли в геометрии более краткого пути, чем (тот, который изложен) в 'Началах'? На что Евклид якобы ответил, что 'в геометрии не существует царской дороги' (аналогичный анекдот рассказывается также об Александре и ученике Евдокса Менехме, так что он

## ЕВКЛИД

Вторым после 'Начал" сочинением Евклида обычно называют "Данные" - введение в геометрический анализ. Евклиду принадлежат также 'Явления", посвященные элементарной сферической астрономии, 'Оптика" и 'Катоптрика", небольшой трактат 'Сечения канона" (содержит десять задач о музыкальных интервалах), сборник задач по делению площадей фигур "О делениях" (дошел до нас в арабском переводе). Изложение во всех этих сочинениях, как и в 'Началах", подчинено строгой логике, причем теоремы выводятся из точно сформулированных физических гипотез и математических постулатов. Много произведений Евклида утеряно, об их существовании в прошлом нам известно только по ссылкам в сочинениях других



# НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

В гимназии, как мы знаем по 'Воспоминаниям' С.Т. Аксакова, увлекательно преподавал математику

когда главным учителем Лобачевский, воспитанник Мезенского университета. Он поставил изучение математики на высоком уровне.

уже вскоре проявляет особенную склонность к изучению физико-математических наук, обнаруживая выдающиеся способности. В этом, несомненно, сказались результаты педагогической деятельности Г.И. Карташевского.

Однако в университете Лобачевскому уже не удалось слушать лекции Карташевского, так как последний в декабре 1806 г. был отстранен от должности директором И.Ф.Яковкиным, как 'проявивший дух неповиновения и несогласия'. Математические курсы в университете стал вести М.Ф.Бартельс, прибывший в Казань в 1808



A handwritten signature in black ink, which appears to read 'N. I. Lobachevsky'.

## НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

Успехи студента Н.И.Лобачевского, соревнующегося в своих занятиях с И.П.Симоновым, впоследствии известным астрономом и участником кругосветного плавания, неизменно вызывали одобрение М.Ф.Бартельса и других

3 августа 1811 г. Лобачевский утверждается магистром. Его руководитель профессор М.Ф.Бартельс был

преподавателем в Императорском университете в Гейдельберге.

Лобачевский под его руководством изучил классические труды по математике: "Теорию чисел" (*Disquisitiones Arithmeticae*) Гаусса и первые тома "Небесной механики" Лапласа. Представив два научных исследования по механике и по алгебре ("Теория эллиптического движения небесных тел" (1812 г.) и "О разрешимости алгебраического уравнения  $x^n - 1 = 0$ " (1813 г.), он был ранее срока в 1814 г. произведен в адъюнкт-профессора (доценты).



# НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

Но вскоре в университете создается очень тяжелая обстановка для работы. В целях борьбы с революционными настроениями и 'вольнодумством" правительство Александра I, проводя все более реакционную политику, ищет идеологической опоры в религии, в мистико-христианских учениях. Университеты в первую очередь подвергаются проверке.

Двое исследование Казанского университета был назначен и прибыл в марте 1819 г. член Главного правления училищ М.Л.Магницкий, который использовал свое назначение в карьеристских целях. В своем отчете он приходит к выводу:

университет 'причиняет общественный вред полуученностью образуемых им воспитанников ...", а поэтому 'подлежит уничтожению ввиду отсутствия средств к его разубытию и радижезидея Александром I правительств. исправить. Попечителем Казанского учебного округа был назначен Магницкий, который и приступил к энергичному 'обновлению университета". Он начал свою деятельность увольнением девяти профессоров. Была установлена тщательная слежка за содержанием лекций и студенческих записок и введен суровый казарменный режим для студентов.



## НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

В лет этой церковно-полицейской системы принесли Лобачевскому испытания, но не сломили его непокорный дух. Выдержать этот помогла только его обширная и многообразная педагогическая, административная и исследовательская деятельность. Он преподает математику на всех курсах вместо уехавшего в Дерпт (Тарту) профессора И.И.Фурье; замещает профессора К.Броннера, не вернувшегося после выпуска в Казань; читает физические курсы и заведует физическим кабинетом; замещает профессора И.И.Фурье, отправившегося в кругосветное плавание астронома И.П.Симонова; читает астрономию и геодезию, приняв в свое ведение обсерваторию. Ряд лет он работает деканом физико-математического отделения. Колоссальный труд вкладывает он в упорядочивание библиотеки и в расширение ее физико-математической части. Он является вместе с тем одним из активнейших членов, а затем и председателем строительного комитета, занятого постройкой главного университетского корпуса. Наконец, несмотря на тысячи текущих дел и обязанностей, Лобачевский не прекращает напряженной творческой деятельности. Он пишет два учебника для гимназий: "Геометрию" (1823 г.) и "Алгебру" (1825 г.). "Геометрия" получает отрицательный отзыв у академика Н.И.Фурье, не оценившего тех изменений, который Лобачевский внес в традиционное изложение, и осудившего введение метрической системы мер,



## НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

ильственное отстранение от деятельности, которой он посвятил  
ю жизнь, ухудшение материального положения, а затем и  
несчастье (в 1852 г. у него умер старший сын) разрушающе  
ось на его здоровье; он сильно одряхлел и стал слепнуть. Но и  
ый зрения, Лобачевский не переставал приходить на экзамены,  
ржественные собрания, присутствовал на ученых диспутах и не  
прекращал научных трудов. Непонимание значения его новой  
геометрии, жестокая неблагодарность современников, материальные  
невзгоды, семейное несчастье и, наконец, слепота не сломили его  
мужественного духа. За год до смерти он закончил свой последний труд  
"Пангеометрия", диктуя его своим ученикам.

24 (12) февраля 1856 г.

кончилась жизнь  
великого ученого,  
целиком отданная  
русской науке и  
Казанскому

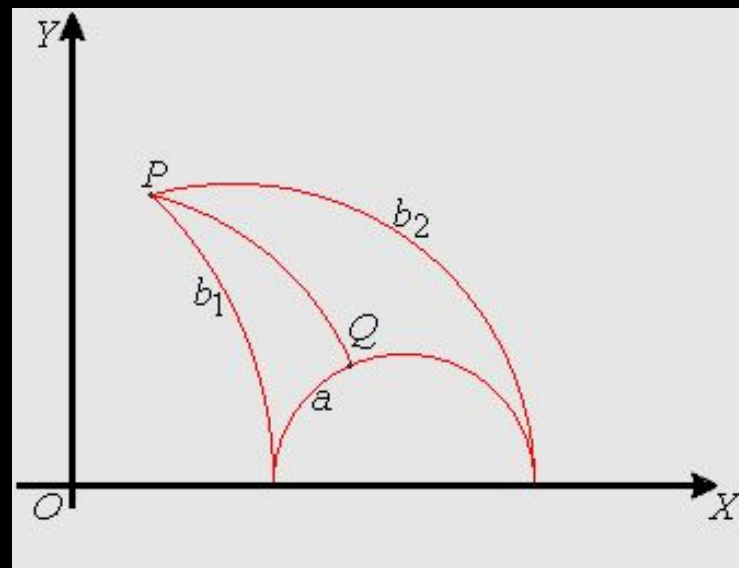


## Геометрические построения

### *Угол параллельности данного отрезка.*

Если  $a$  - неевклидова прямая,  $Q$  – точка на этой прямой,  $PQ$  – отрезок, ортогональный прямой  $a$ , тогда неевклидовы лучи  $b_1$  и  $b_2$  с началом в точке  $P$ , параллельные  $a$ , составляют с  $PQ$  углы, являющиеся для отрезка  $PQ$  углами параллельности.

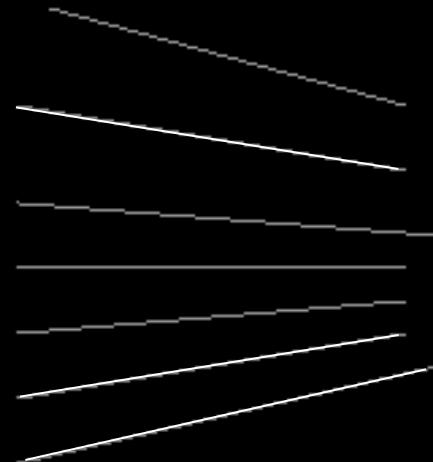
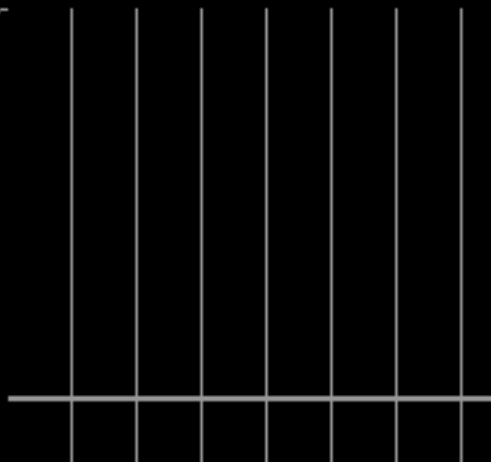
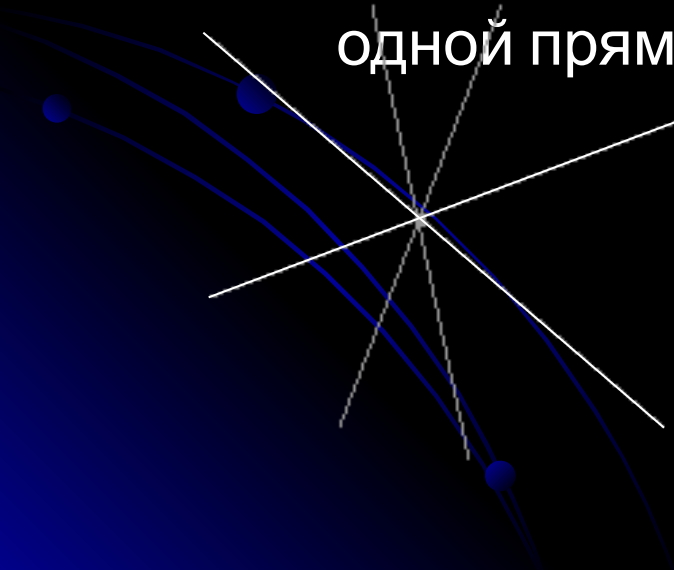
Заметим, что неевклидов луч  $PQ$  служит биссектрисой угла  $b_1 b_2$  не только в смысле геометрии Лобачевского, но и в смысле евклидовой геометрии.



## Одни геометрические построения плоскости

Лобачевского являются пучки прямых. В плоскости Лобачевского есть три типа расположения прямых: прямые или параллельны, или пересекаются, или являются расходящимися.

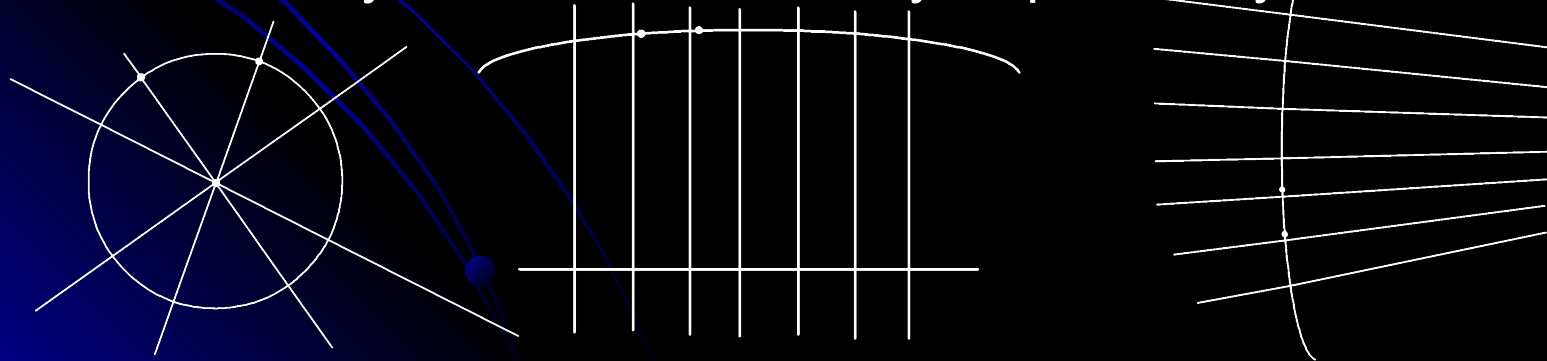
Первый вид пучков образован прямыми, имеющими общую точку – центр пучка . Пучок расходящихся прямых – это перпендикуляры к одной прямой – оси пучка.



## Геометрические построения

Следующими объектами геометрии Лобачевского являются кривые. Для их построения Лобачевским было введено понятие соответственных точек. В пучке первого рода это точки на прямых, равноудаленные от центра. В пучке второго рода это точки прямых, лежащие по одну сторону от оси и отстоящие от нее на одинаковые расстояния. Наконец, в пучке третьего рода они расположены симметрично относительно биссектрисы полосы между двумя прямыми, на которых лежат эти точки.

Соединив соответствующие точки первого пучка, мы получим окружность. В случае второго пучка мы получаем линию равных расстояний, а в третьем случае – так называемую предельную линию





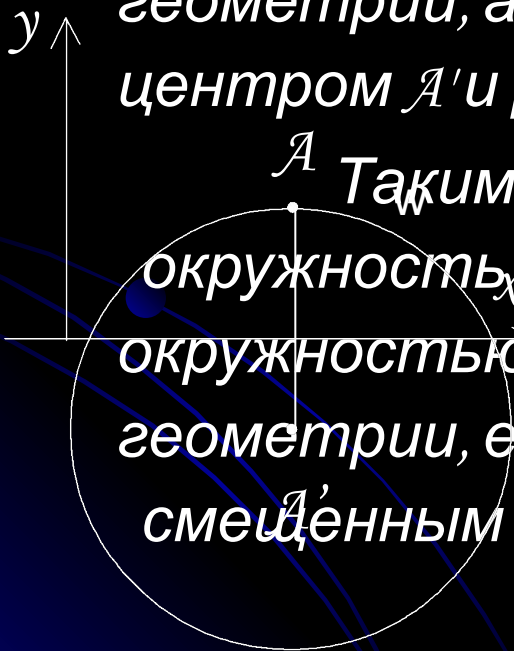
## Геометрические построения

### Окружность

Рассмотрим неевклидову окружность с заданным центром  $A$ .

Обозначим через  $A'$  точку, симметричную  $A$  относительно оси  $x$  в смысле евклидовой геометрии, а через  $S$  – евклидову окружность с центром  $A'$  и радиусом  $AA'$ .

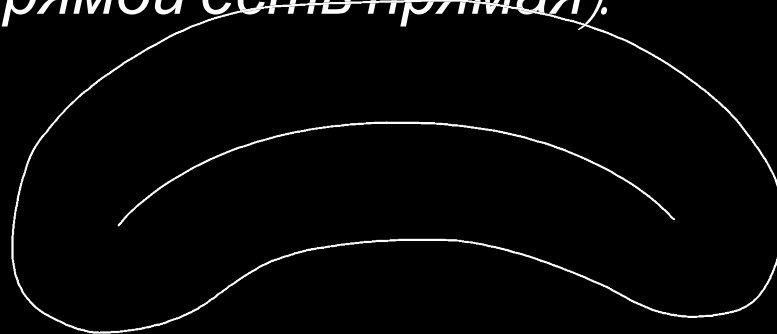
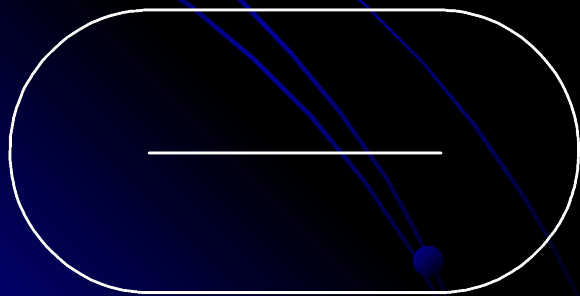
Таким образом, искомая неевклидова окружность  $\chi_w$  построена, евклидовой окружностью, но, с точки зрения евклидовой геометрии, ее неевклидов центр оказывается смещенным к оси  $x$ .



## Геометрические построения

### Эквидистанта

*Эквидистанта (равноудалённый) данной плоской кривой множество концов равных отрезков, отложенных в определённом направлении на нормалях. Например, Эквидистанта окружности есть окружность. Эквидистантой называется геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние (в геометрии Евклида Эквидистанта прямой есть прямая).*

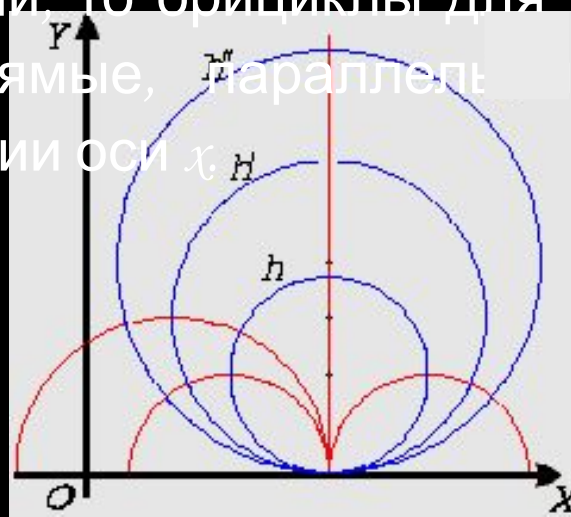


## Геометрические построения

### *Орицикл*

Построение орицикла как ортогональной траектории пучков параллельных прямых представлено на рисунке ниже. В случае, когда пучок параллельных содержит прямые, изображаемые полуокружностями, орициклы  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$  являются дугами евклидовых окружностей, касающихся оси  $x$  в точке, предельной для всех неевклидовых параллельных прямых данного пучка.

Если прямые пучка параллельных изображаются евклидовыми лучами, то орициклы для такого пучка – это евклидовы прямые, параллельные  $h$  в смысле евклидовой геометрии оси  $x$ .

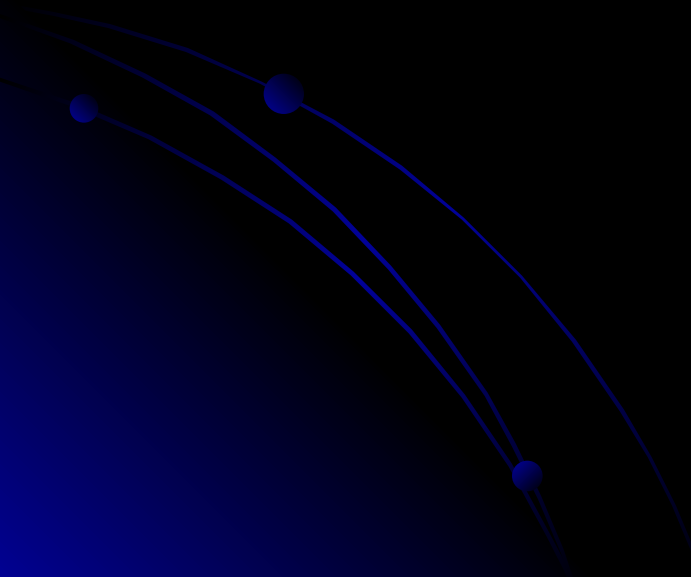


Построен  
ия  
Биографи  
и  
Содержан  
ие

# ТЕОРИ Я

Постулаты  
Евклида

Аксиом  
ы



## Постулаты Евклида

I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить.

III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта



## АКСИОМЫ

I I. Равные порознь третьему  
ЕВклида  
равны между собой.

II II. И если к ним прибавим  
равные, то получим равные.

III III. И если от равных  
отнимем равные, то получим  
равные.

IV IV. И если к неравным  
прибавим равные, то  
получим неравные.

V V. И если удвоим равные,  
то получим равные.

VI VI. И половины равных  
равны между собой.

VII VII. И совмещающиеся  
равны.

VIII VIII. И целое больше  
части

## АКСИОМЫ

### Лобачевского

принадлежности

II. Аксиомы порядка

III. Аксиомы меры для  
отрезков и углов

IV. Аксиома

существования

треугольника, равного  
данному.

V. Аксиома

существования отрезка  
данной длины

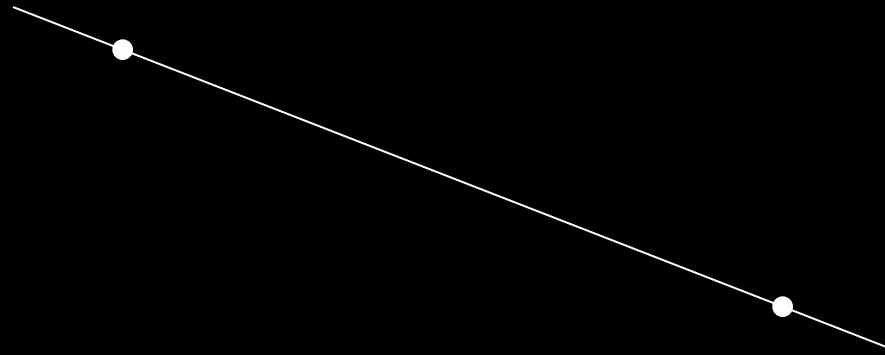
VI. Аксиома

параллельности

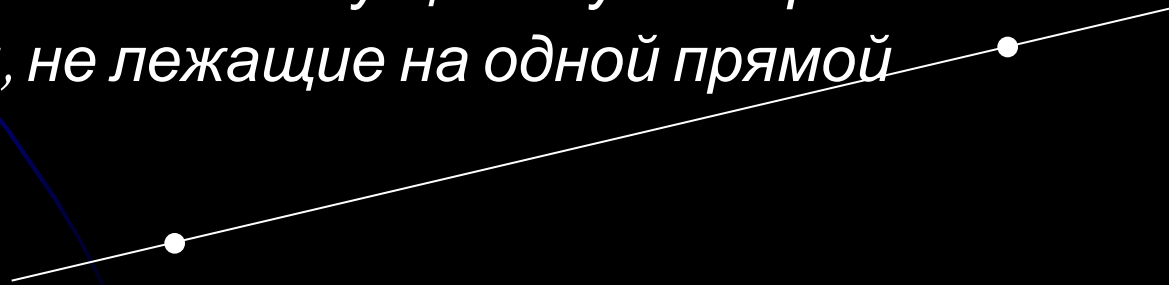
Лобачевского

# I. Аксиомы принадлежности

- *I1. Каковы бы ни были две точки, существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.*



- *I2. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой*

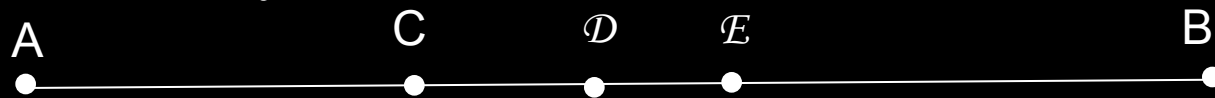


## II. Аксиомы порядка

- III. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

На основе этой аксиомы вводится понятие отрезка.

**Отрезком**  $AB$  называется множество всех точек прямой, лежащих между точками  $A$  и  $B$ .



- III2. Прямая разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два подмножества (полуплоскости) так, что отрезок, соединяющий точки одной полуплоскости, не пересекается с прямой, а отрезок, соединяющий точки разных полуплоскостей, пересекается с прямой.



## II. Аксиомы порядка

После этого вводятся понятия луча и треугольника.

**Лучом**  $AB$  с началом  $A$  называется множество точек, состоящее из точки  $B$  и всех точек  $M$  прямой  $AB$ , таких, что точка  $A$  не лежит между точками  $B$  и  $M$ .



**Треугольником** называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.



## треугольника, равного данному.

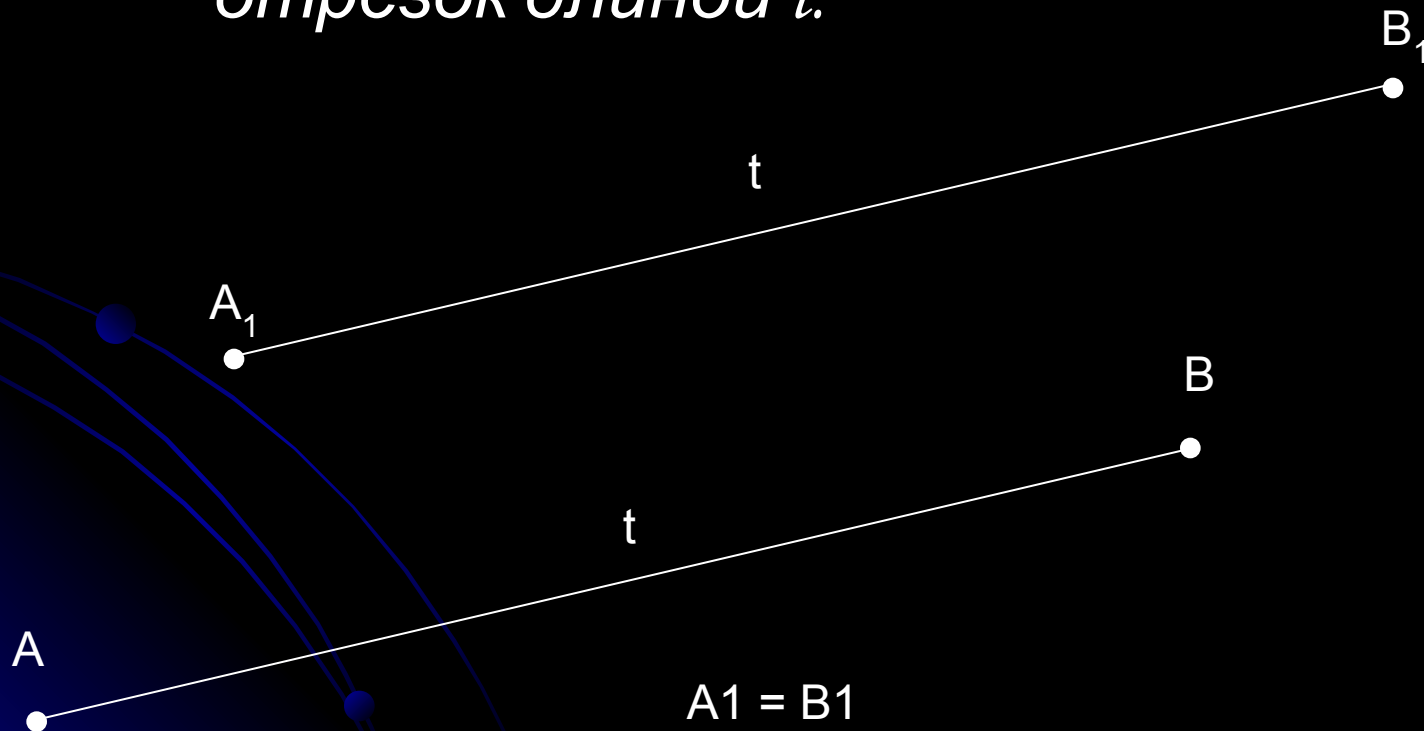
Два отрезка называются равными, если при любом выборе единичного отрезка их длины равны. Два угла называются равными, если они имеют одну и ту же градусную меру. Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  называются равными, если выполняются равенства:

IV. Пусть  $ABC$  – треугольник и  $p$  – луч. Тогда существует треугольник  $A_1B_1C_1$ , равный треугольнику  $ABC$ , у которого вершина  $A_1$  совпадает с началом луча  $p$ , вершина  $B_1$  лежит на луче  $p$ , а вершина  $C_1$  лежит в заданной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч  $p$ .



# V. Аксиома существования отрезка данной длины

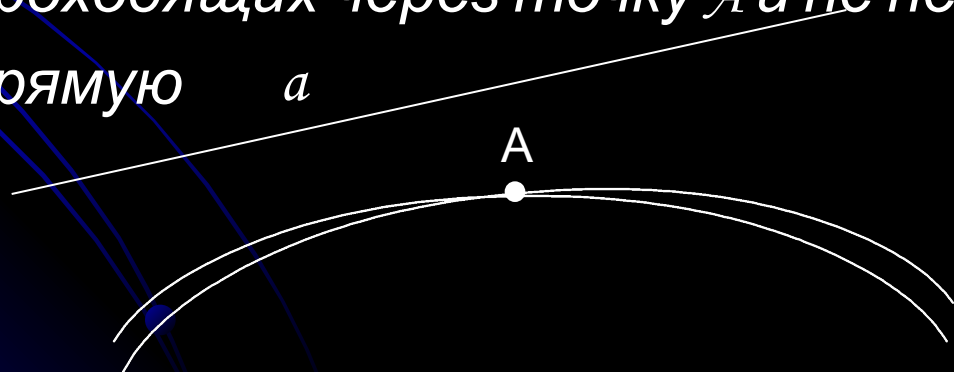
- Если выбран единичный отрезок, то, каково бы ни было положительное действительное число  $t$ , существует отрезок длиной  $t$ .



# Аксиома параллельности Лобачевского

Эта аксиома была введена им в варианте, приемлемом как для случая плоскости, так и для случая пространства:

*Пусть  $a$  – произвольная прямая, а  $A$  – точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой  $A$  и прямой  $a$ , существует не менее двух прямых, проходящих через точку  $A$  и не пересекающих прямую  $a$*



## Геометрические построения

### **Общий перпендикуляр двух расходящихся прямых**

Пусть две расходящиеся прямые  $a$  и  $b$  плоскости

имеют общий перпендикуляр и притом

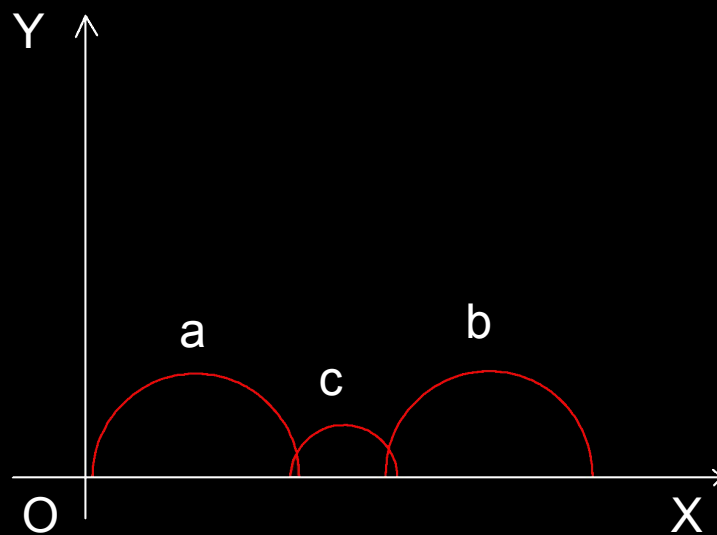
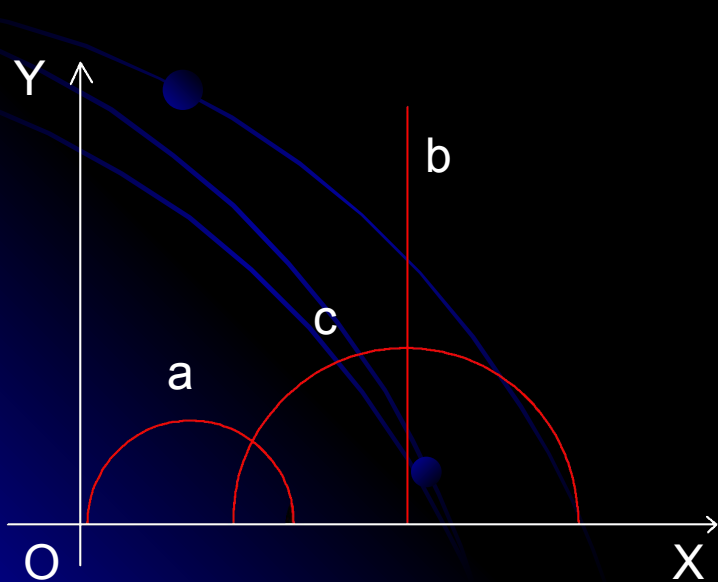
единственный. Для изображения самих расходящихся прямых  $a$

и  $b$  возможны два случая:

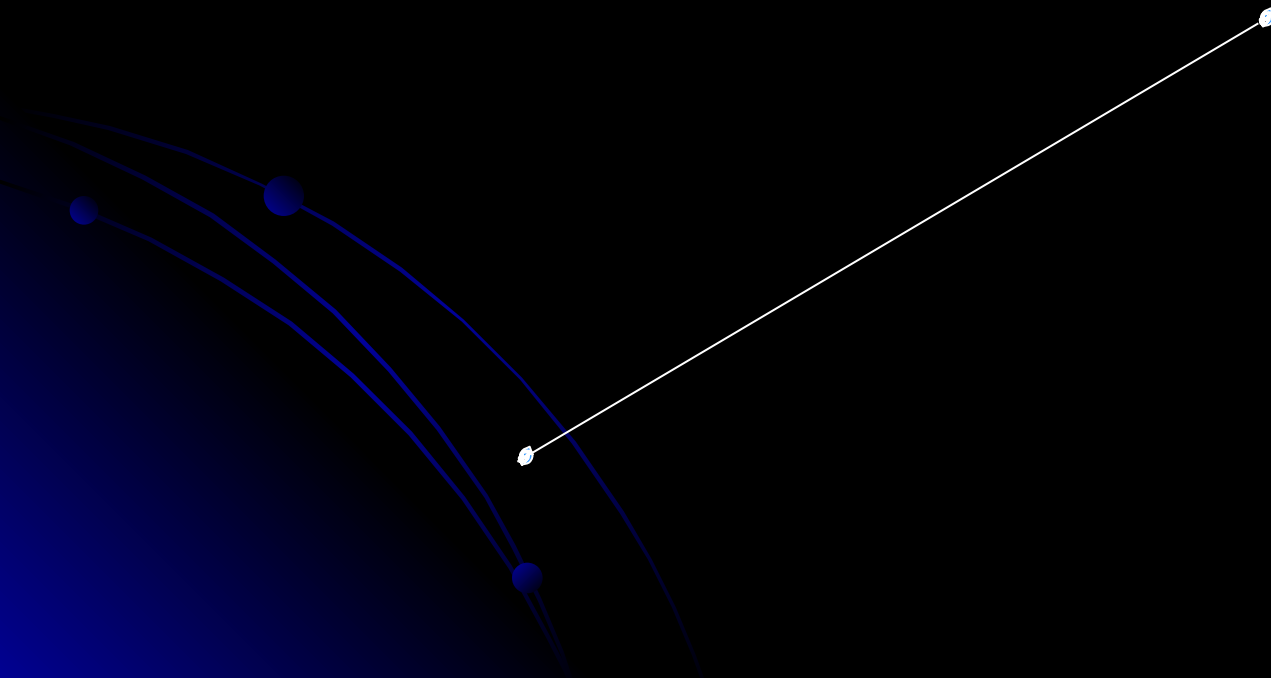
**а)** одна из таких прямых изображается евклидовым лучом;

**б)** обе расходящиеся прямые изображаются евклидовыми полуокружностями.

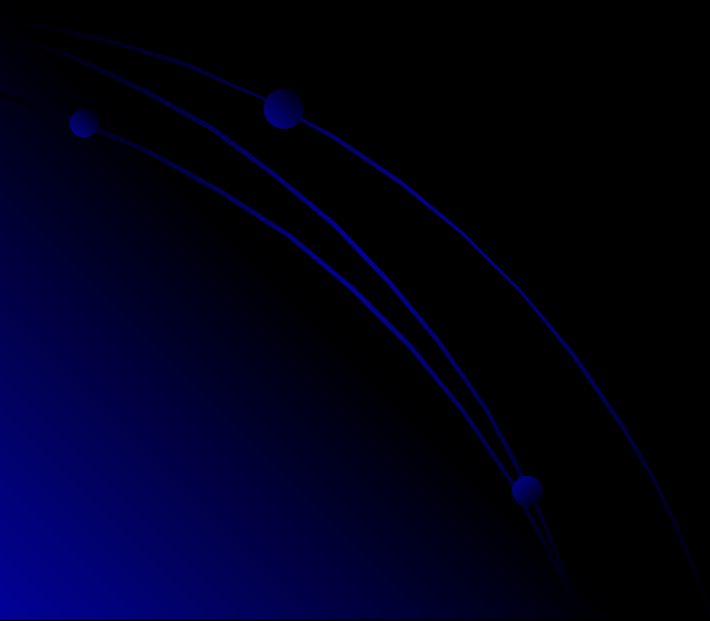
В любом случае общим перпендикуляром двух расходящихся прямых  $a$  и  $b$  является полуокружность  $c$  (см. рис.)



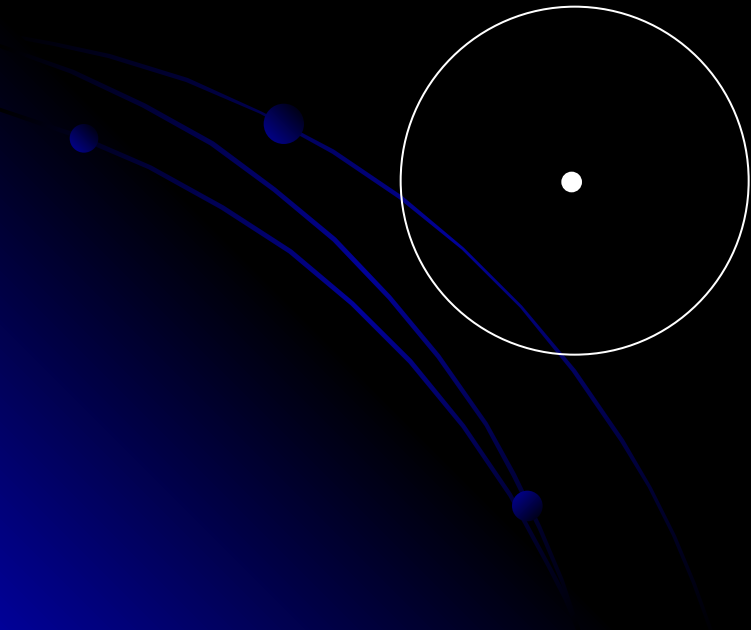
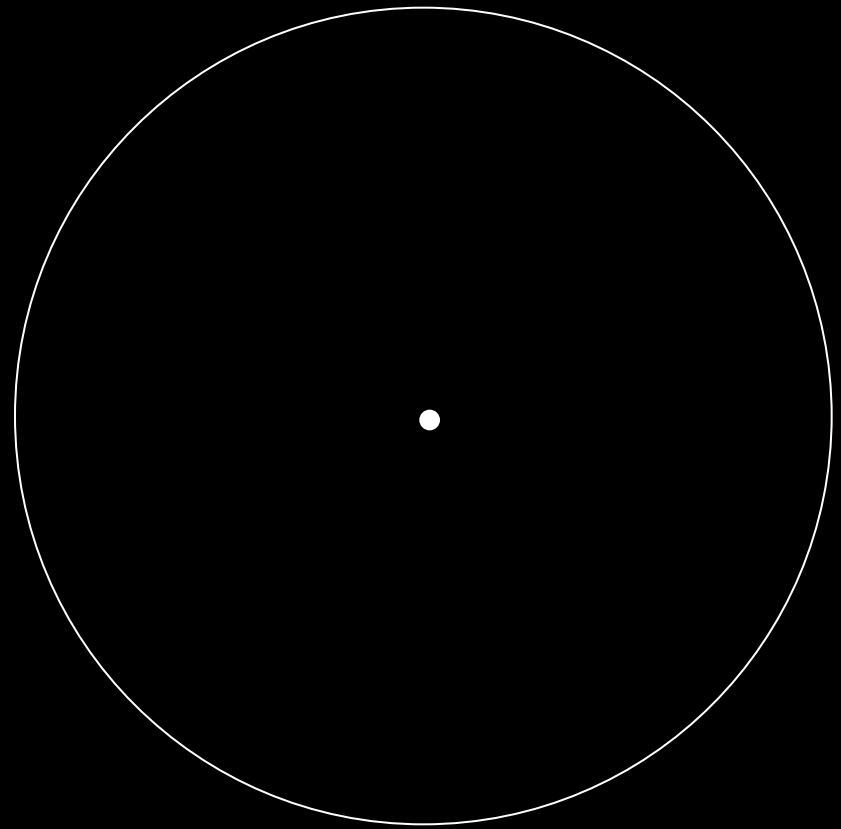
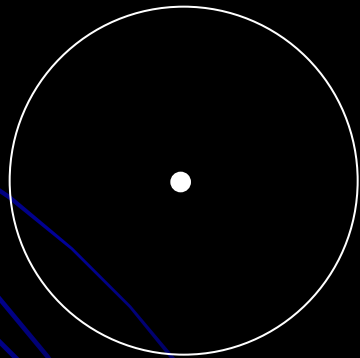
1. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.



*II*. И чтобы каждую прямую можно было  
неопределенно продолжить.

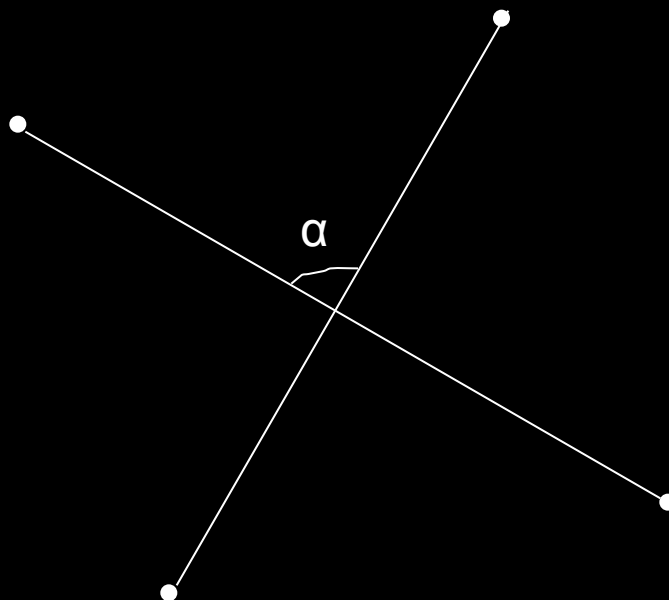
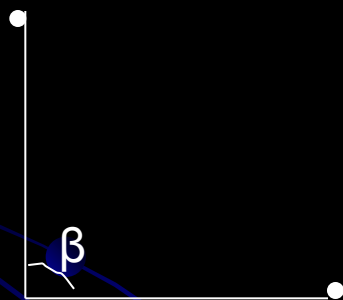


*III.* И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.





*IV.* И чтобы все прямые углы были равны.



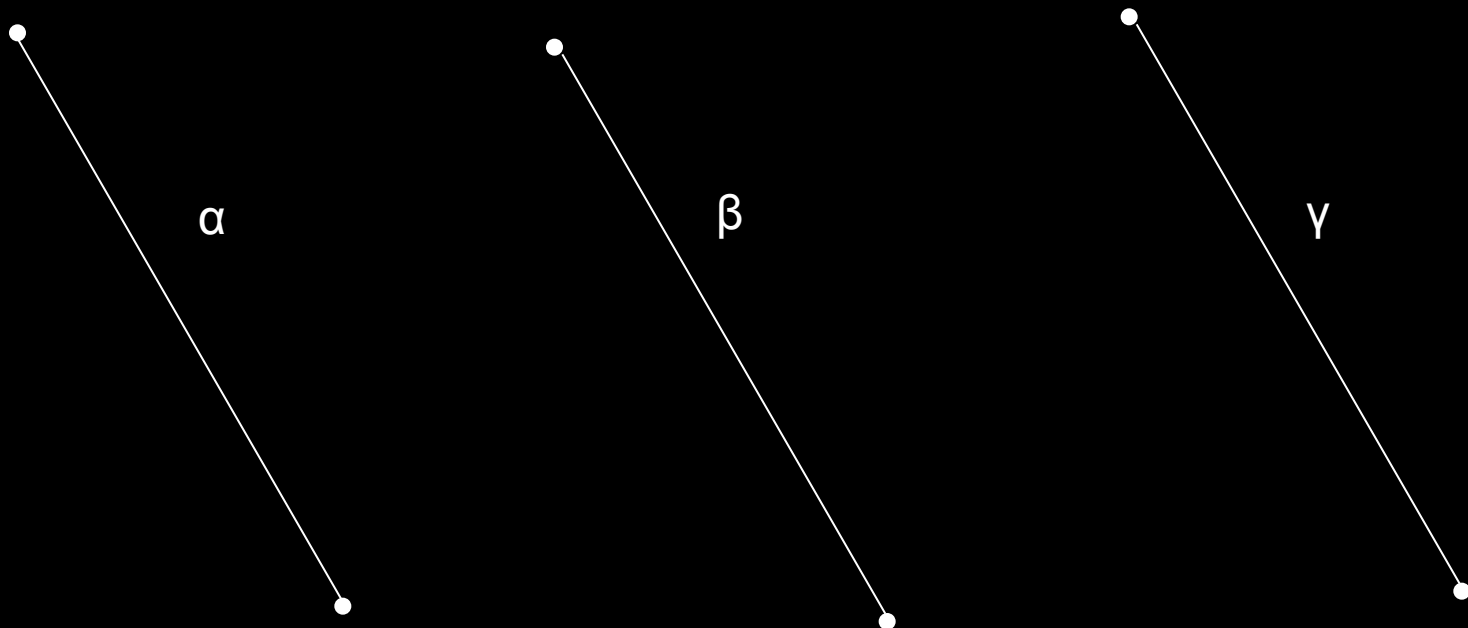
$$\angle \alpha = \angle \beta = 90^\circ$$



∇. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.



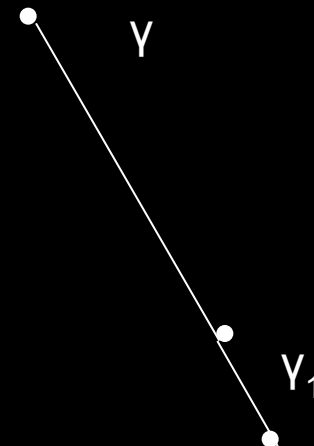
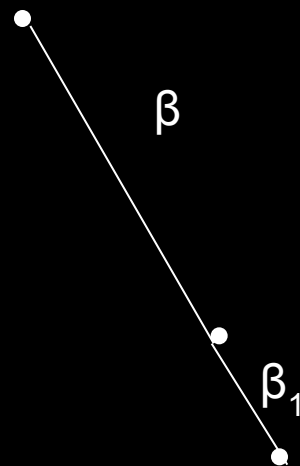
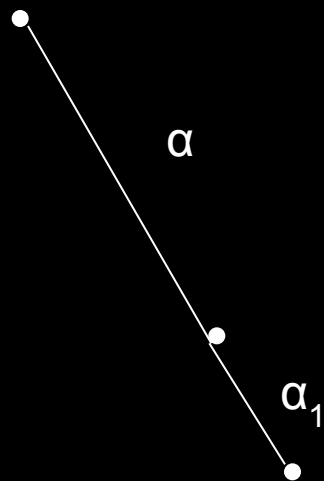
I. Равные порознь третьему равны между собой.



$$\alpha = \beta, \quad \beta = \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma$$



II. И если к ним прибавим равные, то получим равные.



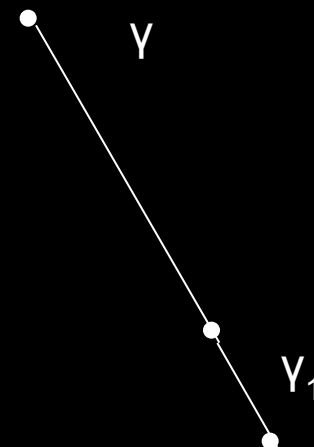
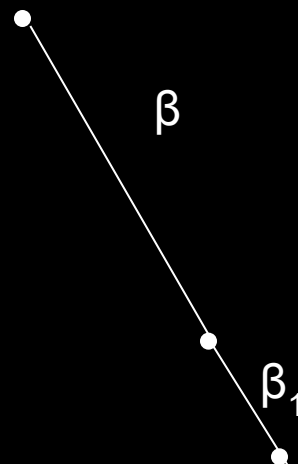
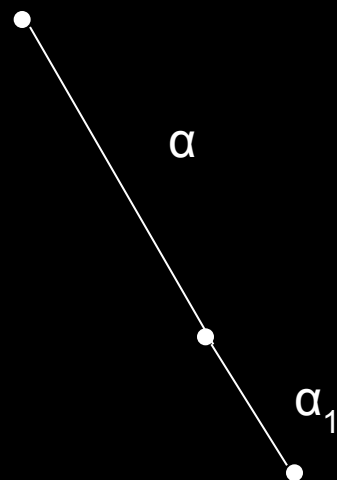
$$\alpha = \beta = \gamma,$$

$$\alpha_1 = \beta_1, \beta_1 = \gamma_1, \gamma = \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \gamma + \gamma_1$$



*III.* И если от равных отнимем равные, то получим равные.

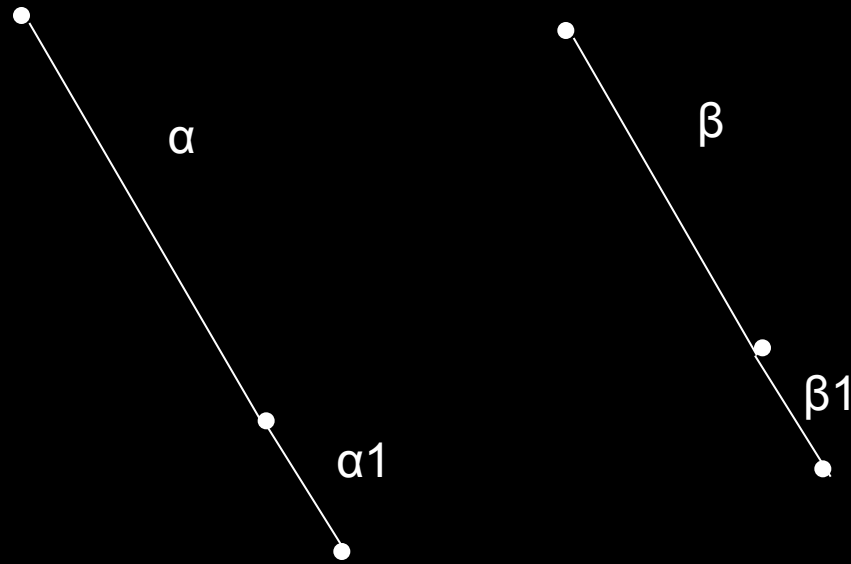


$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \gamma + \gamma_1, \Rightarrow$$

$$\alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1$$



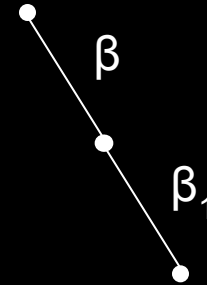
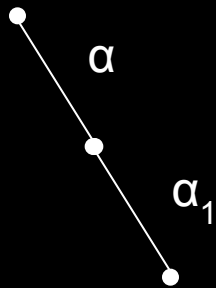
*IV.* И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.



$$\begin{aligned}\alpha &\neq \beta \\ \alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha + \alpha_1 &\neq \beta + \beta_1\end{aligned}$$



∇. И если удвоим равные, то получим равные.

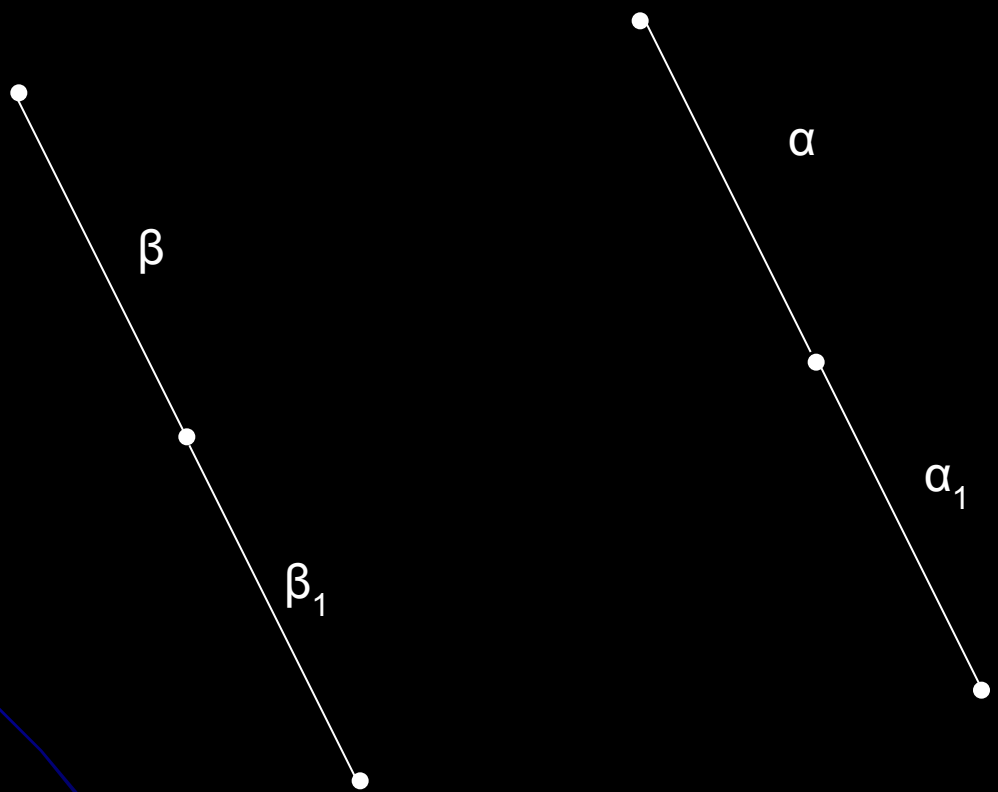


$$\alpha = \beta, \quad \alpha = \beta_1 \Rightarrow$$

$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1$$



# $\mathcal{VI}$ . И половины равных равны между собой.

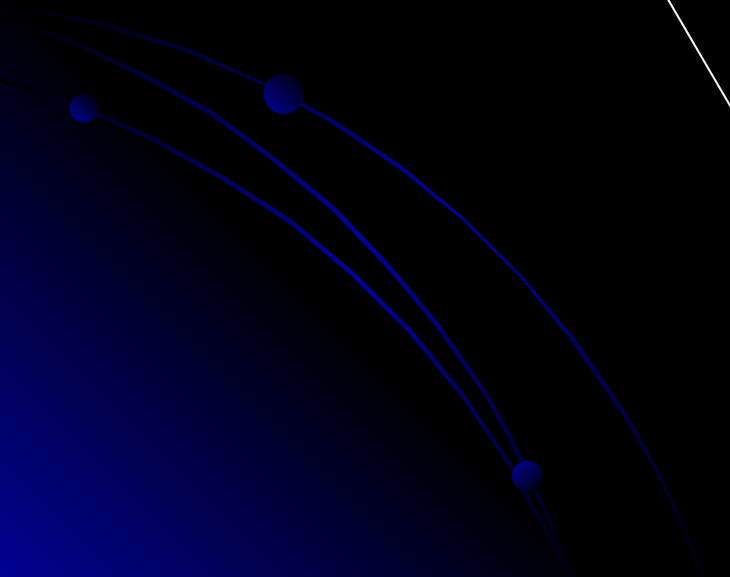
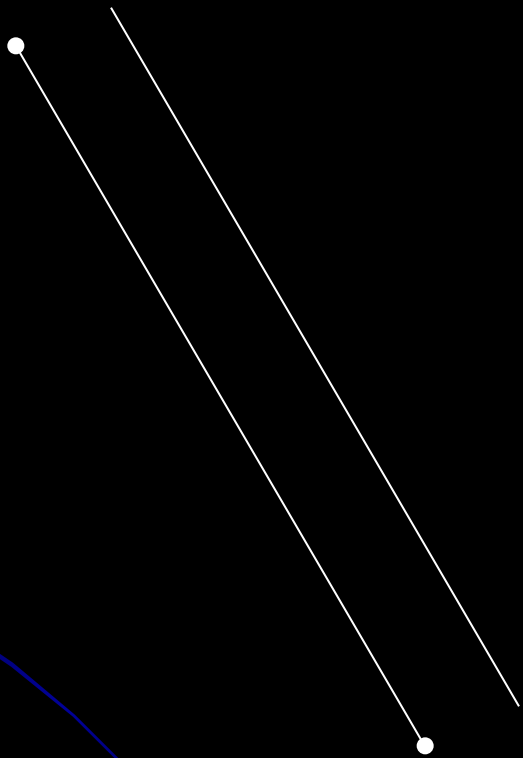


$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1, \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$$

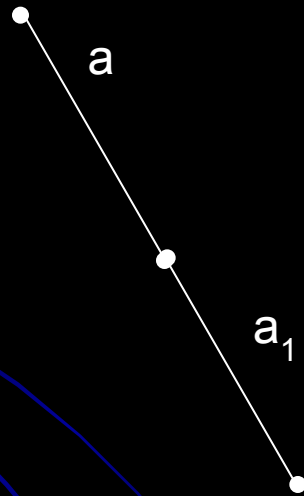




# *VII.* И совмещающиеся равны.



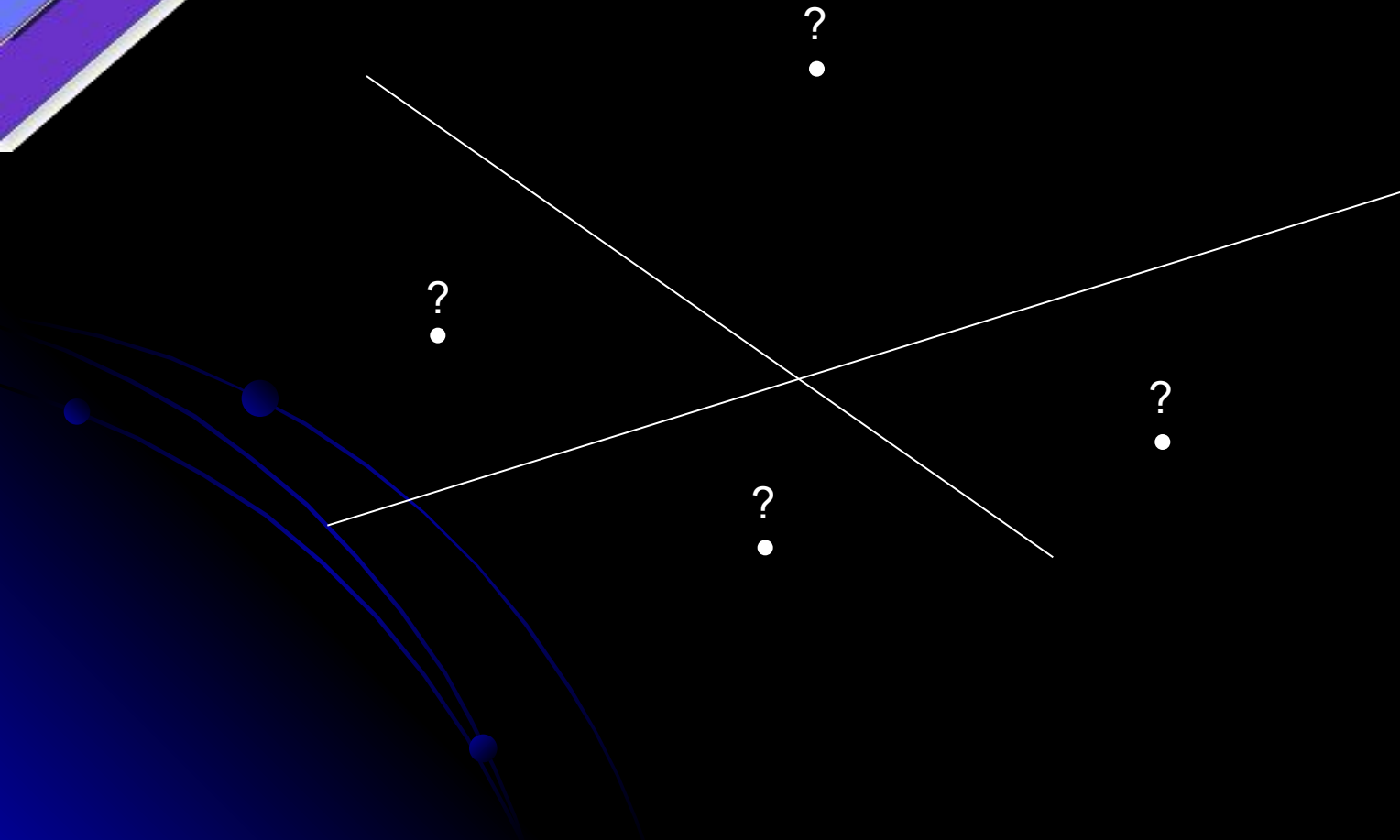
# *VIII.* И целое больше части.



$$a + a_1 > a - a_1$$



*IX.* И две прямые не могут заключать пространства.



# Заключе ние

С открытием неевклидовой геометрии закончились бесплодные попытки доказательства пятого постулата. **Лобачевский** доказал непротиворечивость неевклидовой геометрии, решив проблему, которую пытались решить в течение двух тысяч лет.

Геометрия **Лобачевского** нашла приложение в общей теории относительности - если считать распределение материи во Вселенной равномерным, то в определенных условиях геометрия пространства совпадает с геометрией **Лобачевского**.

# Список используемых ресурсов

- <http://www.college.ru/mathematics/courses/planimetry/content/chapter15/section/paragraph2/theory.html>
- <http://e-science.ru/math/theory/?t=588>
- <http://geom.kgsu.ru/index.php?option=content&task=view&id=27>
- <http://geommodel.narod.ru/teoria/Glava1.html>
- [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%8F%D1%82%D1%8B%D0%B9\\_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%83%D0%BB%D0%B0%D1%82](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%8F%D1%82%D1%8B%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%83%D0%BB%D0%B0%D1%82)
- <http://enc.lib.rus.ec/bse/008/070/973.htm>