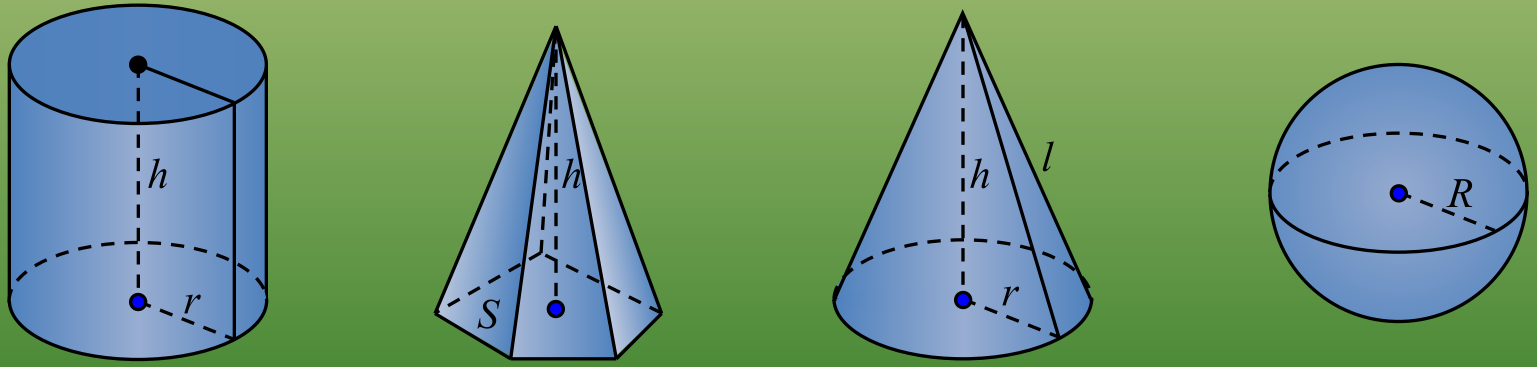
Муниципальное образовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №12»

Презентация на тему:

Объём и площадь цилиндра, пирамиды, конуса и шара



Тимофеева Галина Александровна
МОУ «СОШ № 12»
г. Щекино Тульской области

Щёкино 2012 год

Введение

Понятие объёма тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры. Из курса планиметрии известно, что каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы измерения площадей. В качестве единицы измерения площадей обычно берут квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Аналогично будем считать, что каждое из рассматриваемых нам тел имеет объём, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объёмов. За единицу измерения объёмов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называют кубическим сантиметром и обозначают $см^3$. Аналогично определяются кубический метр ($м^3$), кубический миллиметр ($мм^3$) и т. д.

Процедура измерения объёмов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объём каждого тела выражается поло - жительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объёмов и частей единицы содержится в данном теле. Ясно, что число, выражающее объём тела, зависит от выбора единицы измерения объёмов, и поэтому еди - ница измерения объёмов указывается после этого числа. Например, если в качестве единицы измерения объёмов взят 1 $см^3$ и при этом объём V некото - рого тела оказался равен 2, то пишут: $V = 2\ см^3$.

Если два тела равны, то каждое из них содержит столько же единиц измерения объёмов и её частей, сколько и другое тело, т. е. имеет следующее свойство объёмов:

1^0. Равные тела имеют равные объёмы.

Замечание

Равенство двух фигур, в частности двух тел, в стереометрии определяется так же, как и в планиметрии два тела называются равными, если их совместить наложением. Примерами равных тел являются два прямоугольных параллелепипеда с соответственно равными измерениями, две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами, две правильные пирамиды, у которых соответственно равны стороны оснований и высоты. В каждом из указанных случаев равенство двух тел можно доказать на основе аксиом наложения и равенства фигур.

Рассмотрим ещё одно свойство объёмов, пусть тело составлено из нескольких тел. При этом мы предполагаем, что любые два из этих тел не имеют общих внутренних точек, но могут иметь общие граничные точки. Ясно, что объём всего тела складывается из объёмов составляющих его тел. Итак,

2^0. Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

Свойства 1^0 и 2^0 называют основными свойствами объёмов. Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков и площади многоугольников. В дальнейшем на основе этих свойств мы выведем формулы для вычисления объёмов цилиндра, конуса, шара.

Предварительно отметим одно следствие из свойств 1^0 и 2^0. Рассмотрим куб, принятый за единицу измерения объёмов. Его ребро равно единице измерения отрезков. Разобьем каждое ребро этого куба на n равных частей (n – произвольное целое число) и проведём через точки разбиения плоскости прямые, перпендикулярные к этому ребру. Куб разобьётся на n^3 равных маленьких кубов с ребром $1/n$. Так как сумма объёмов всех маленьких кубов равна объёму всего куба (свойство 2^0), т. е. равна 1, то объём каждого из маленьких кубов равен $1/n^3$ (объёмы маленьких кубов равны друг другу по свойству 1^0). Итак, объём куба с ребром $1/n$ равен $1/n^3$

Цилиндр

Рассмотрим произвольную плос –кость α и окружность *L* с центром *O* радиуса *r*, лежащую в этой плоскости. Через каждую точку окружности *L* проведём прямую, перпендикулярную к плоскости α. Поверхность, образованная этими прямыми, называется <u>цилиндрической поверх - ностью</u>, а сами прямые – <u>образующи - ми цилиндрической поверхности</u>.

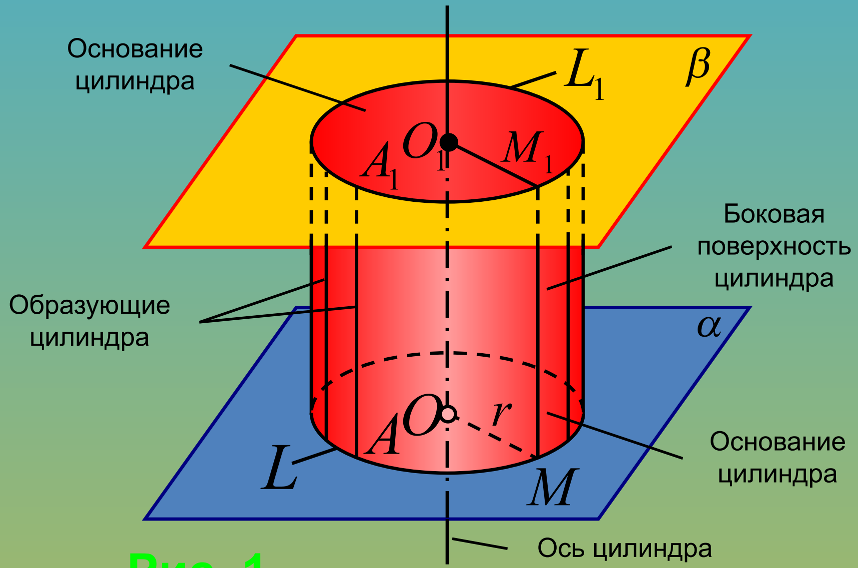


Рис. 1

Прямая, проходящая через точку *O* перпендикулярно к плоскости α, называется <u>осью цилиндрической поверхности</u>. Поскольку все образующие и ось перпендикулярны плоскости α , то они параллельны друг другу.

Рассмотрим теперь плоскость β , параллельную плоскости α. Отрезки образующих, заключённые между плоскостями α и β , параллельны и равны друг другу. По построению концы этих отрезков, расположенные в плоскости α , заполняют окружность *L*. Концы же, расположенные в плоскости β , заполняют окружность L_1 с центром O_1 радиуса *r*, где O_1 – точка пересечения плоскости β с осью цилиндрической поверхности.

Справедливость этого утверждения следует из того, что множество концов образующих, лежащих в плоскости β, получается из окружности L параллельным переносом на вектор OO_1. Параллельный перенос является движением и, значит, наложением, а при наложении любая фигура переходит в равную ей фигуру. Следовательно, при параллельном переносе на вектор OO_1 окружность L перейдёт в равную ей окружность L_1 радиуса r центром в точке O_1.

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1 называется <u>цилиндром</u> (Рис. 1). Круги называются <u>основаниями цилиндра</u>, отрезки образующих, заключённые между основаниями, – <u>образующими цилиндра</u>, а обрисованная ими часть цилиндрической поверхности – <u>боковой поверхностью цилиндра</u>. Ось цилиндрической поверхности называется <u>осью цилиндра</u>.

Как уже отмечалось, все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется <u>высотой цилиндра</u>, а радиус основания – <u>радиусом цилиндра</u>.

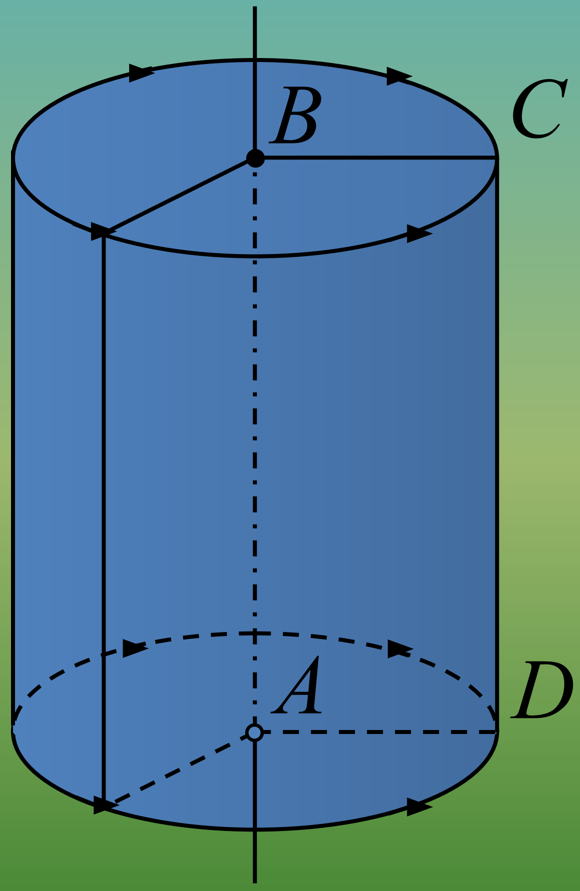


Рис. 2

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сто - рон. На рисунке 2 изображён цилиндр, по лученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB. При этом боко - вая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD , а основания – вращением сторон BC и AD.

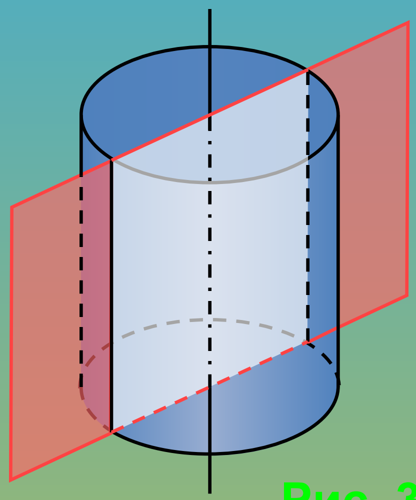


Рис. 3

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник (Рис. 3), две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется осевым.

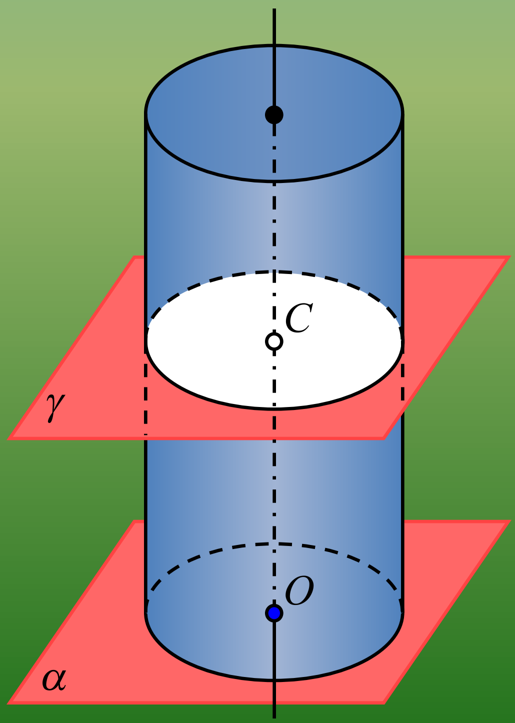


Рис. 4

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом. В самом деле, секущая плоскость (плоскость γ на рисунке 4) отсекает от данного цилиндра тело, также являющееся цилиндром. Его основаниями служат два круга, один из которых и есть рассматриваемое сечение.

Замечание.

На практике нередко встречаются предметы, которые имеют форму более сложных цилиндров. На рисунке 5.1 изображён цилиндр, каждое основание которого представляет собой фигуру, ограниченную частью параболы и отрезком. На рисунке 5.2 изображён цилиндр, основаниями которого являются круги, но образующие цилиндра не перпендикулярны к плоскостям оснований (наклонный цилиндр). Однако в дальнейшем мы будем рассматривать только такие цилиндры, которые были определены в этом пункте. Их называют иногда прямыми круговыми цилиндрами.

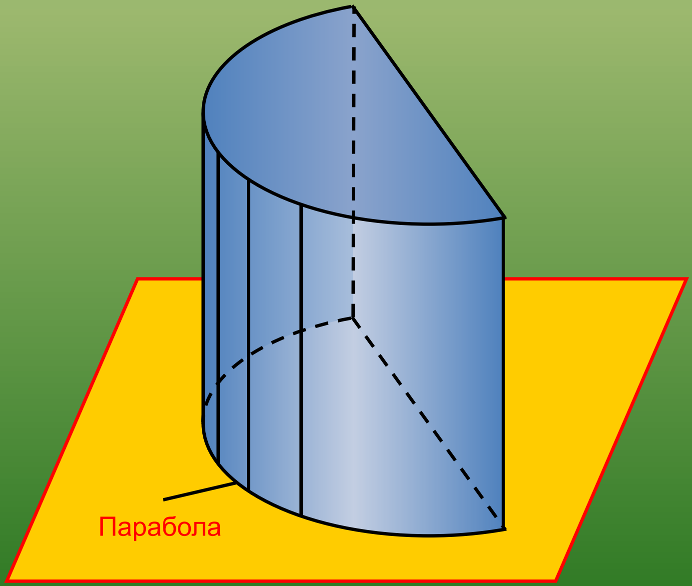


Рис. 5.1

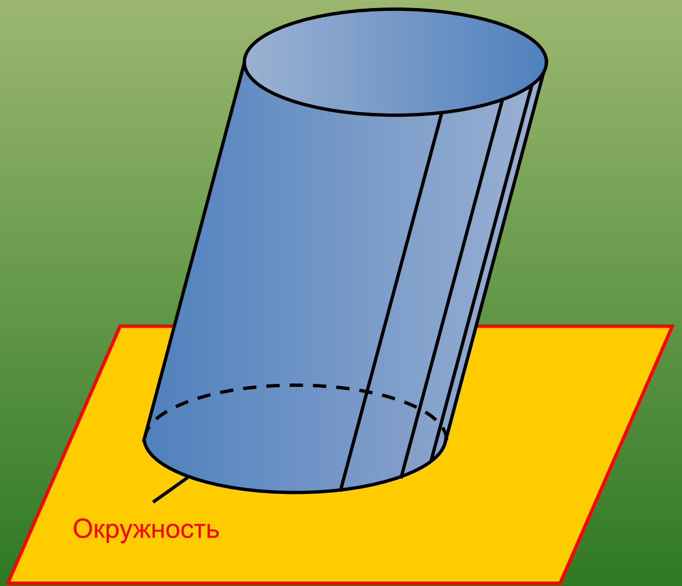


Рис. 5.2

Объём цилиндра

Говорят, что призма вписана в цилиндр, если основания вписаны в основания цилиндра (Рис. 6), и призма описана около цилиндра, если её основания описаны около оснований цилиндра (Рис. 7). Ясно, что высота любой призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте самого цилиндра.

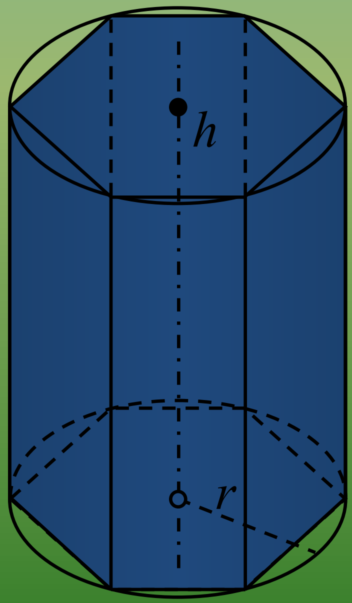


Рис. 6

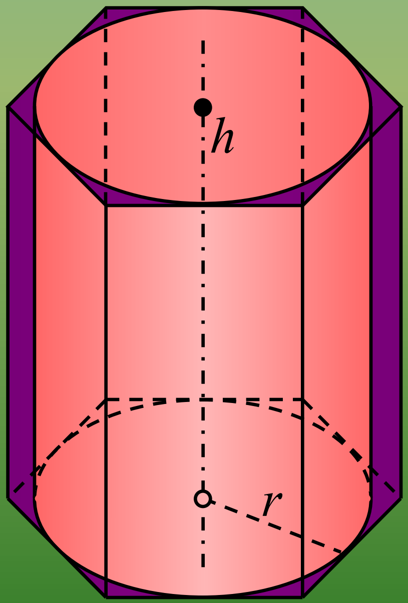


Рис. 7

Теорема

Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство

Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n - угольную призму F_n, а в эту призму впишем цилиндр P_n (Рис. 8). Обозначим через V и V_n объёмы цилиндров P и P_n, через радиус цилиндра r_n. Так как объём призмы F_n равен $S_n \cdot h$, где S_n – площадь основания призмы, а цилиндр P содержит призму F_n, которая, в свою очередь, содержит цилиндр P_n, то

$V_n < S_n \cdot h < V.$ (1)

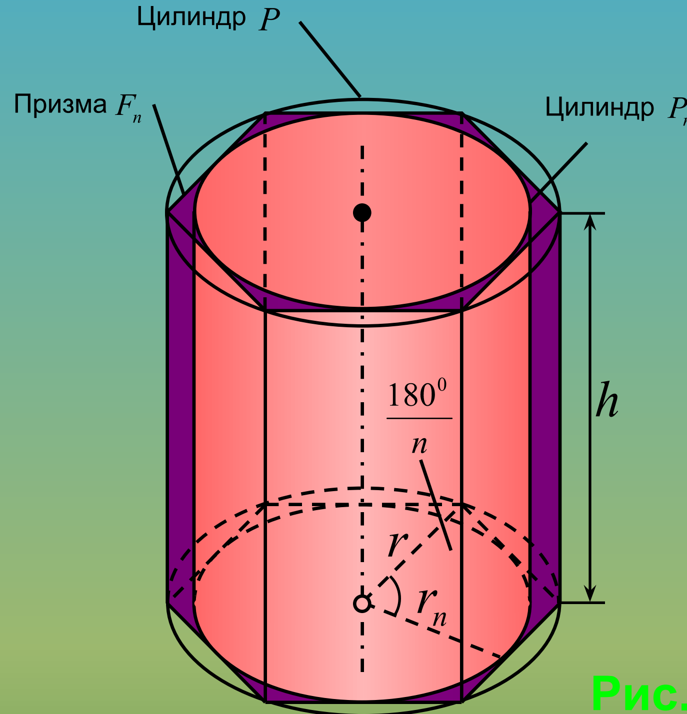


Рис. 8

Будем неограниченно увеличивать число n. При этом радиус r_n цилиндра P_n стремится к радиусу r цилиндра P : $r_n = r \cos 180°/n$ при $n \to \infty$.

Поэтому объём цилиндра P_n стремится к объёму цилиндра P : $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$

Из неравенства (1) следует, что и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = V$

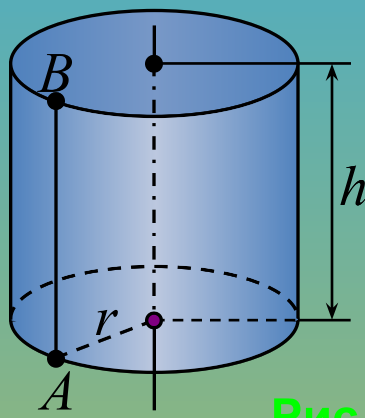
Но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$

Таким образом: $V = \pi r^2 h$. (2)

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, из формулы (2) получим: $V = S \cdot h$.

Теорема доказана.

Площадь цилиндра



$$S_{бок} = 2\pi rh$$

Рис. 9.1

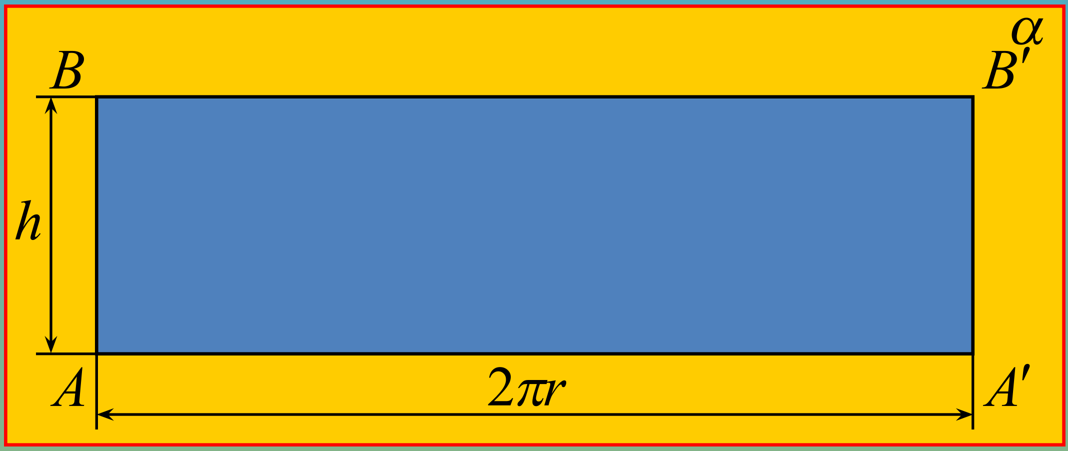


Рис. 9.2

На рисунке 9.1 изображён цилиндр. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей *AB* и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости α (Рис 9.2). В результате в плоскости получится прямоугольник *ABA´B´* .

Стороны *AB* и *A´B´* прямоугольника представляют собой два края разреза боковой поверхности цилиндра по образующей *AB* . Этот прямоугольник называется <u>развёрткой боковой поверхности цилиндра</u>. Основание *AA´* прямоугольника является развёрткой окружности основания цилиндра, а высота *AB* – образующей цилиндра, поэтому AA´ = $2\pi r$, *AB = h* , где *r* – радиус цилиндра, *h* – его высота.

<u>За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развёртки.</u>

Так как площадь прямоугольника *ABA´B´* равна AA´· *AB* = $2\pi rh$, то для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса *r* и высоты *h* получается формула: $S_{бок} = 2\pi rh$.

<u>Итак, площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.</u>

Пирамида

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (Рис 10):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ \ldots,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$

Многогранник, составленный из n – угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и n треугольников (1), называется <u>пирамидой</u>. Многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ называется <u>основанием</u>, а треугольники (1) – <u>боковыми гранями</u> пирамиды. Точка P называется <u>вершиной</u> пирамиды, а отрезки $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ – её боковыми рёбрами. Пирамиду с основанием $A_1A_2\ldots A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2\ldots A_n$ – и называют n - угольной пирамидой. На рисунке 11 изображены четырёхугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида – это <u>тетраэдр</u>.

Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды. На рисунке 10 отрезок PH является <u>высотой</u> пирамиды.

<u>Площадью полной поверхности пирамиды</u> называется сумма площадей всех её граней (т. е. основания и боковых граней), а <u>площадью боковой поверхности пирамиды</u> – сумма площадей её боковых граней.

Очевидно, $S_{полн.} = S_{бок} + S_{осн.}$

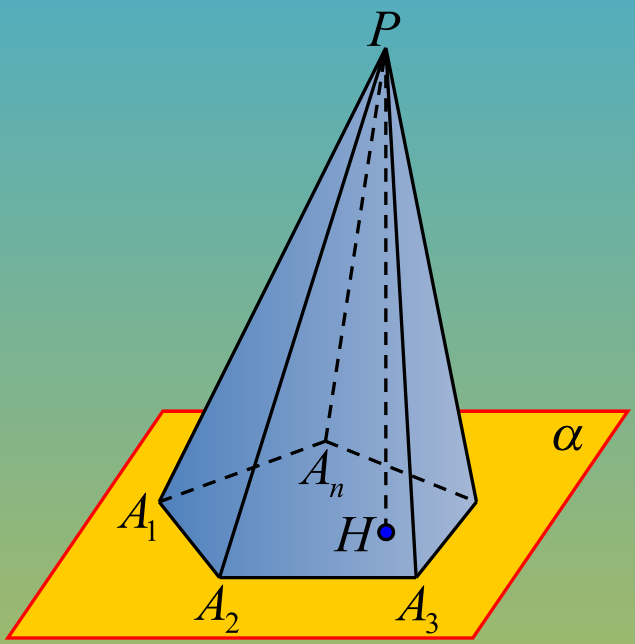
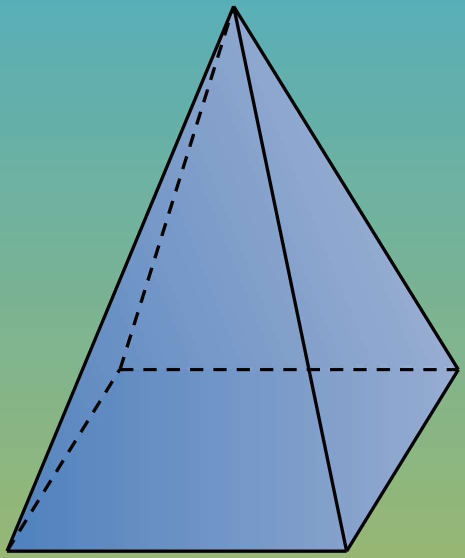


Рис. 10



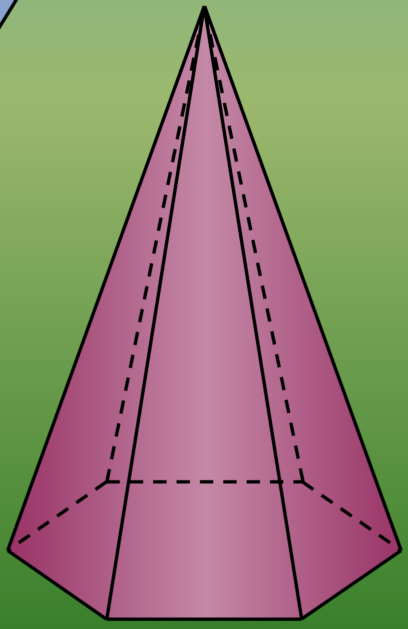


Рис. 11

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания , является ее высотой (Рис. 12).

Докажем, что все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.