Неисчерпаемый треугольник

Авторы:
Марковский Дмитрий
Павловский Ростислав
Белобородов Юрий
г. Санкт-Петрбург
Школа №383, 7 класс.

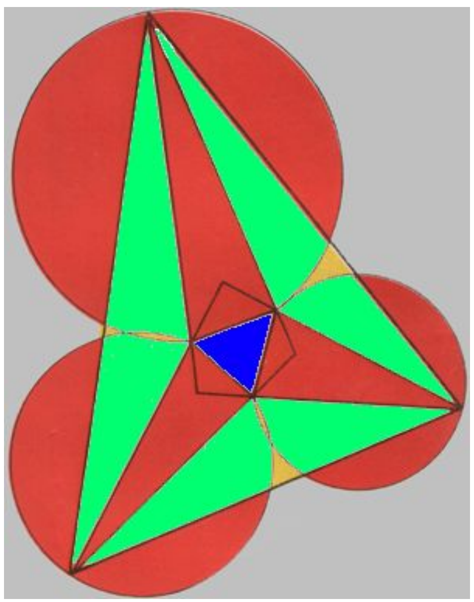
Научный руководитель:
Князева Ольга Александровна
учитель математики школа№383

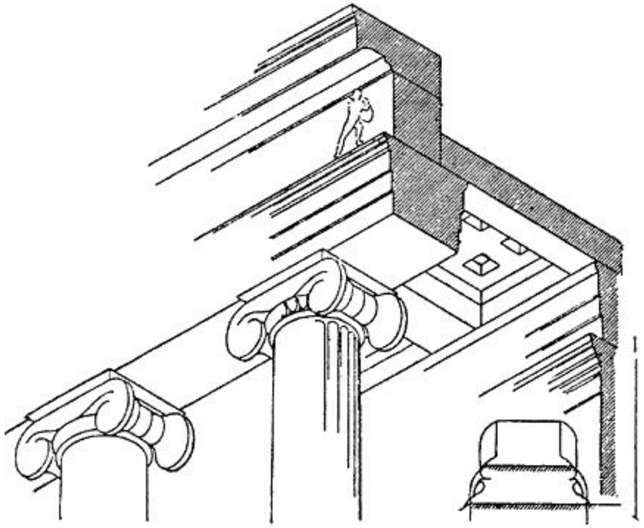
1.ВВЕДЕНИЕ

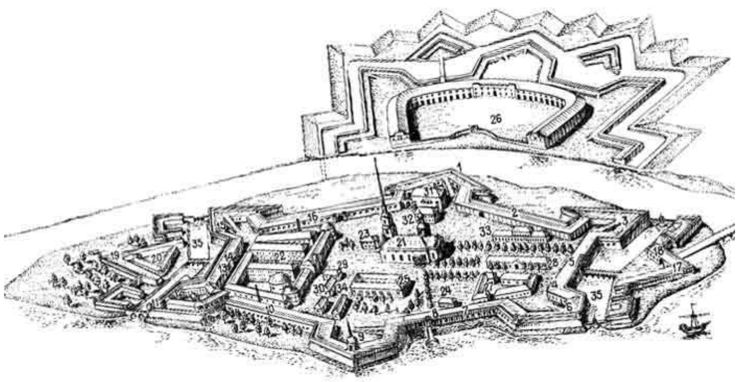
Крупнейший древнегреческий историк Геродот (V век до нашей эры) оставил описание того, как египтяне после каждого разлива Нила заново размечали плодородные участки его берегов, с которых ушла вода. По Геродоту, с этого и началась геометрия – «землемерие» (от греческого «гео» – «земля» и «метрео» – «измеряю»).

Древние землемеры выполняли геометрические построения, измеряли длины и площади; астрологи рассчитывали расположение небесных светил – все это требовало весьма обширных познаний о свойствах плоских и пространственных фигур, и в первую очередь о треугольнике.

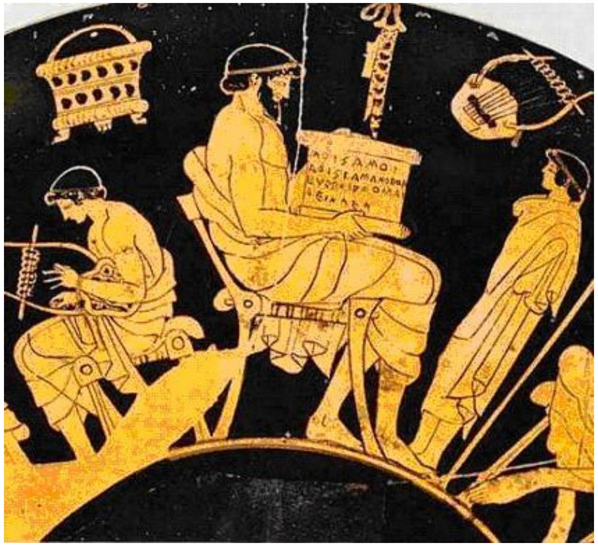
Треугольник по праву считается простейшей из фигур: любая плоская, то есть простирающаяся в двух измерениях, фигура должна содержать хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. Если соединить эти точки попарно прямолинейными отрезками, то построенная фигура и будет ***треугольником***. Так же называют и заключенную внутри образовавшегося контура часть плоскости. Таким образом, любой плоскостной многоугольник может быть разбит на треугольники.







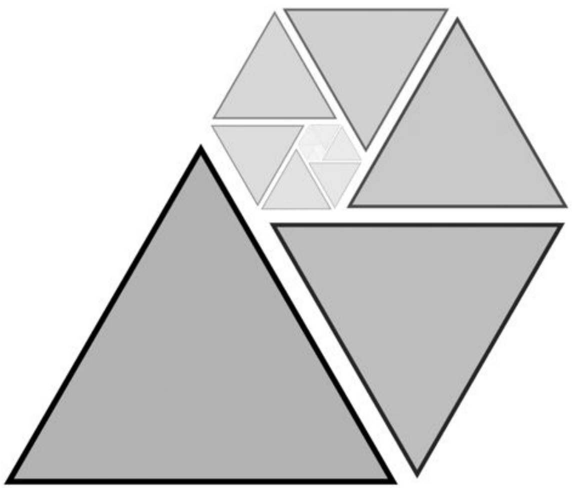
Треугольник всегда имел широкое применение в практической жизни. Так, в строительном искусстве испокон веков используется свойство жесткости треугольника для укрепления различных строений и их деталей. Изображение треугольников и задачи на треугольники встречаются в папирусах, в старинных индийских книгах и других древних документах.



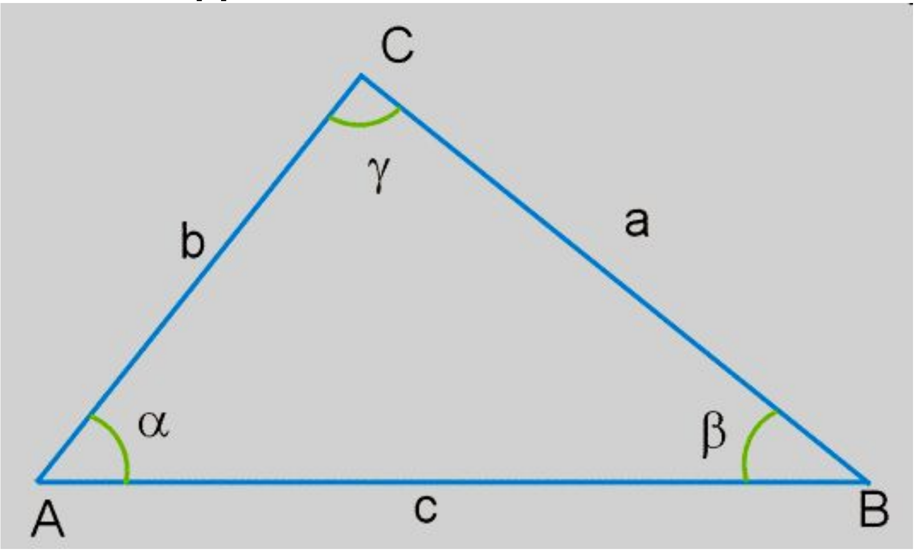
В древней Греции учение о треугольнике развивалось в ионийской школе, основанной в VII веке до нашей эры Фалесом, в школе Пифагора и других; оно было полностью изложено в первой книге «Начал» Евклида. Среди «определений», которыми начинается эта книга, имеются и следующие: «Из трехсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же – имеющая только две равные стороны, разносторонний – имеющая три неравные стороны»

Понятие о треугольнике исторически развивалось, по-видимому, так: сначала рассматривались лишь правильные, затем равнобедренные и, наконец, разносторонние треугольники.

Поэтому **целью данной работы** является изучение и обобщение знаний о треугольнике.



ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ И ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Треугольник – многоугольник с тремя сторонами, или замкнутая ломаная линия с тремя звеньями, или фигура, образованная тремя отрезками, соединяющими три точки, не лежащие на одной прямой

Вершины – точки A, B, и C;
Стороны – отрезки a = BC, b = AC и c = AB, соединяющие вершины;
Углы – α , β, γ образованные тремя парами сторон. Углы часто обозначают так же, как и вершины, – буквами A, B и C.

Угол, образованный сторонами треугольника и лежащий в его внутренней области, называется внутренним углом, а смежный к нему является смежным углом треугольника.

Высоты, медианы, биссектрисы и средние линии треугольника

Кроме основных элементов в треугольнике рассматривают и другие отрезки, обладающие интересными свойствами: высоты, медианы, биссектрисы и средние линии.

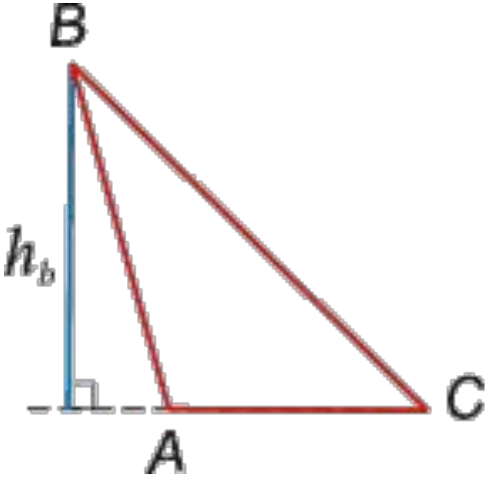
Высота

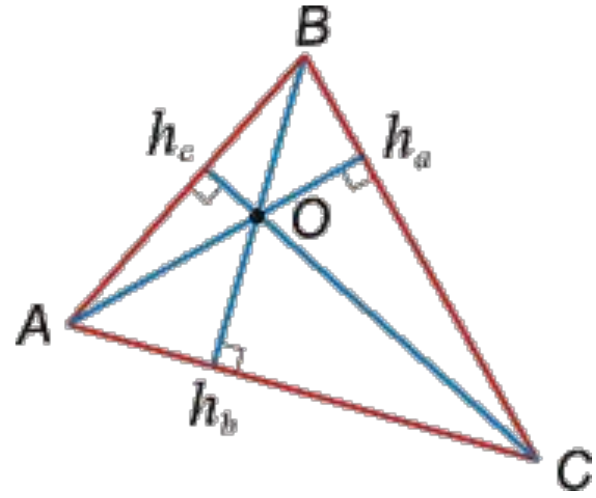
Высоты треугольника – это перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника на противоположные стороны.

Для построения высоты необходимо выполнить следующие действия:

1) провести прямую, содержащую одну из сторон треугольника (в случае, если проводится высота из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике);

2) из вершины, лежащей напротив проведенной прямой, провести отрезок из точки к этой прямой, составляющий с ней угол 90 градусов.





Точка пересечения высоты со стороной треугольника- ***основание высоты***

Свойства высот треугольника

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному треугольнику.

2. В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.

3. Если треугольник остроугольный, то все основания высот принадлежат сторонам треугольника, а у тупоугольного треугольника две высоты попадают на продолжение сторон.

4. Три высоты в остроугольном треугольнике пересекаются в одной точке и эту точку называют ***ортоцентром*** треугольника.

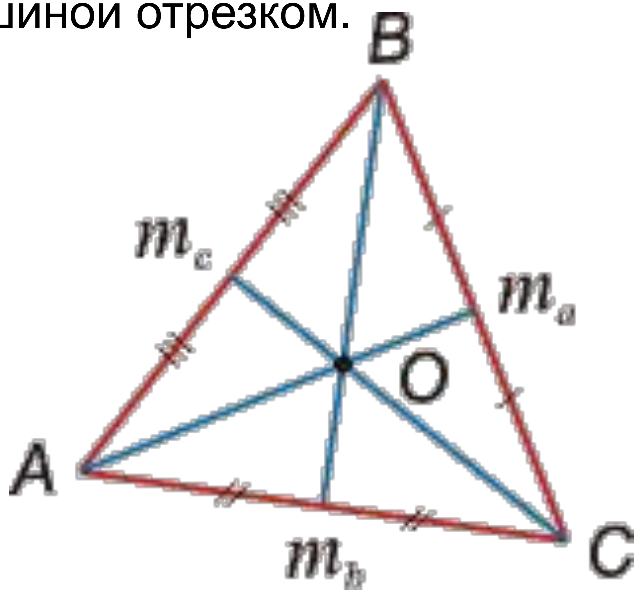
Медиана

Медианы (от лат. mediana – «средняя») – это отрезки, соединяющие вершины треугольника с серединами противолежащих сторон (см. рис. 3).

Для построения медианы необходимо выполнить следующие действия:

1) найти середину стороны;

2)соединить точку, являющуюся серединой стороны треугольника, с противолежащей вершиной отрезком.



Свойства медиан треугольника

- Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется ***центром тяжести*** треугольника.

Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Биссектриса

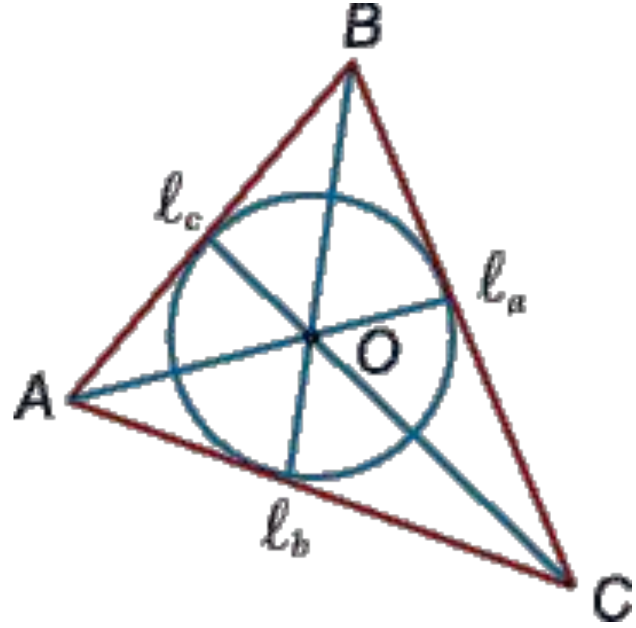
Биссектрисами (от лат. bis – дважды» и seko – рассекаю) называют заключенные внутри треугольника отрезки прямых, которые делят пополам его углы.

Для построения биссектрисы необходимо выполнить следующие действия:

1) построить луч, выходящий из вершины угла и делящий его на две равные части (биссектрису угла);

2) найти точку пересечения биссектрисы угла треугольника с противоположной стороной;

3) выделить отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой пересечения на противоположной стороне.



Свойства биссектрис треугольника

- Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке. Это точка называется центром вписанной окружности.
- Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон.
- Биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны.
- Если биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противолежащей стороны, то ADBD=ACBC.
- Биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка — центр одной из трех вневписанных окружностей этого треугольника.
- Основания биссектрис двух внутренних и одного внешнего углов треугольника лежат на одной прямой, если биссектриса внешнего угла не параллельна противоположной стороне треугольника.
- Если биссектрисы внешних углов треугольника не параллельны противоположным сторонам, то их основания лежат на одной прямой.

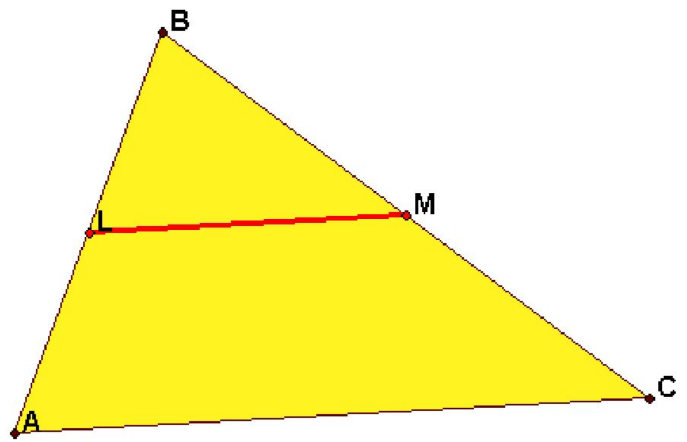
Средняя линия

Средние линии - это отрезки, соединяющие середины двух сторон.

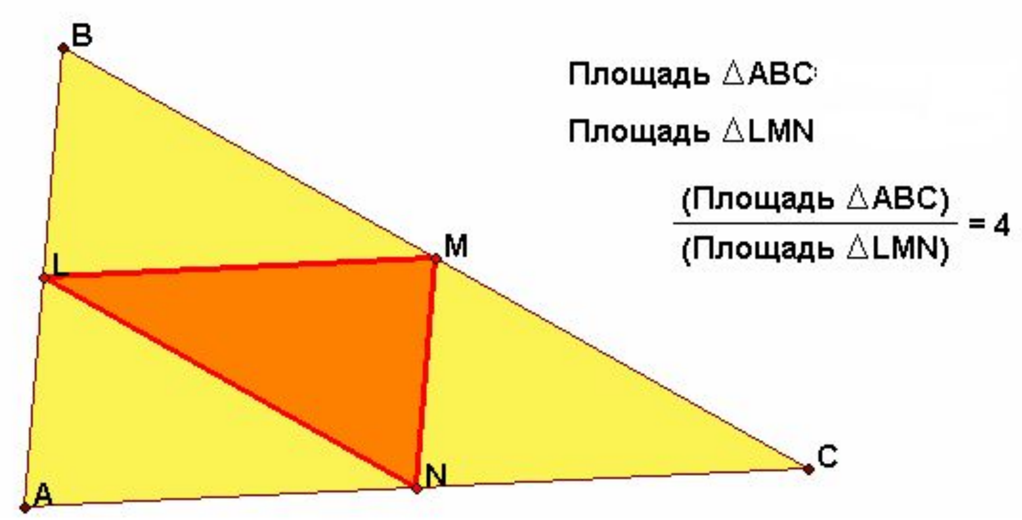
Для построения средней линии необходимо выполнить следующие действия:

1) найти середины двух сторон треугольника;

2) соединить середины сторон отрезком



Три средние линии треугольника образуют «вписанный» в него треугольник, называемый ***серединным***. Его площадь в четыре раза меньше площади данного треугольника



глава 2. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

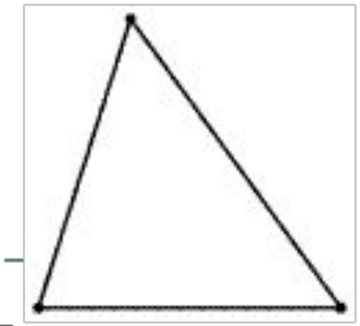
Существует две классификации треугольников: по углам и сторонам

Классификация по углам

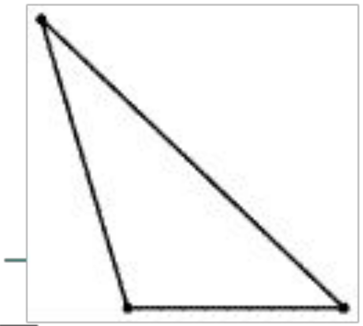
Определение. Треугольник называется ***остроугольным***, если все три его угла — острые, то есть меньше 90°.

Определение. Треугольник называется ***тупоугольным***, если один из его углов — тупой, то есть больше 90°.

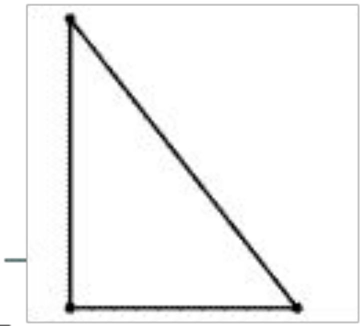
Определение. Треугольник называется ***прямоугольным***, если у него есть прямой угол, то есть угол в 90°. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой, две другие стороны называются катетами.



Остроугольный

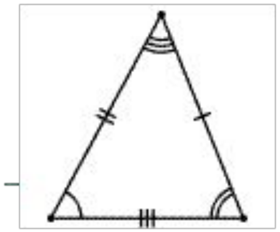


Тупоугольный

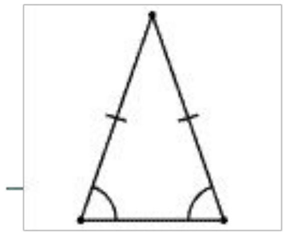


Прямоугольный

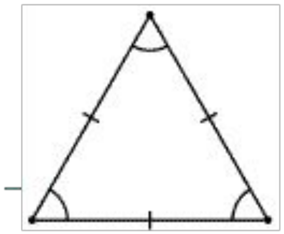
Классификация по сторонам



Разносторонний



Равнобедренный



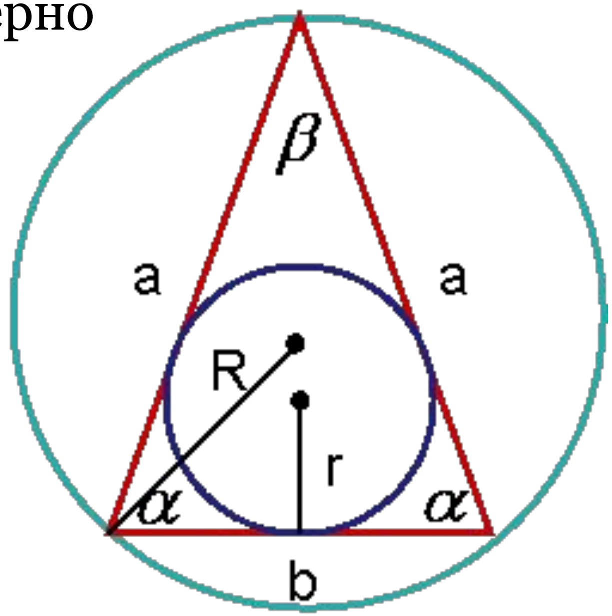
Равносторонний

Определение. Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона называется основанием треугольника.

Определение. Треугольник, у которого все стороны равны, называется ***равносторонним*** или ***правильным*.**

глава3. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Равнобедренный треугольник — треугольник, в котором две стороны равны между собой. По определению, правильный треугольник также является равнобедренным, но обратное, неверно



a — длина двух равных сторон равнобедренного треугольника,
b — длина третей стороны,
α и **β** — соответствующие углы,
R — радиус описанной окружности,
r — радиус вписанной окружности.

Свойства

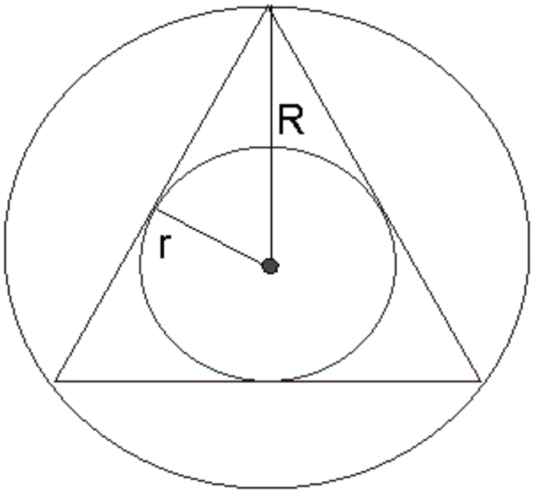
- Углы, противолежащие равным сторонам равнобедренного треугольника, равны между собой.
- Также равны биссектрисы, медианы и высоты, проведённые из этих углов.
- Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию совпадают между собой.
- Центры вписанной и описанной окружностей лежат на этой линии.
- Углы, противолежащие равным сторонам, всегда острые (следует из их равенства).

Признаки

- Высота совпадает с медианой.
- Высота совпадает с биссектрисой.
- Два угла треугольника равны.
- Биссектриса совпадает с медианой.

глава4. РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Правильный треугольник или равносторонний треугольник — правильный многоугольник с тремя сторонами. Все стороны равны между собой, и все углы равны 60°



t — сторона правильного треугольника,
R — радиус описанной окружности,
r — радиус вписанной окружности.

Свойства

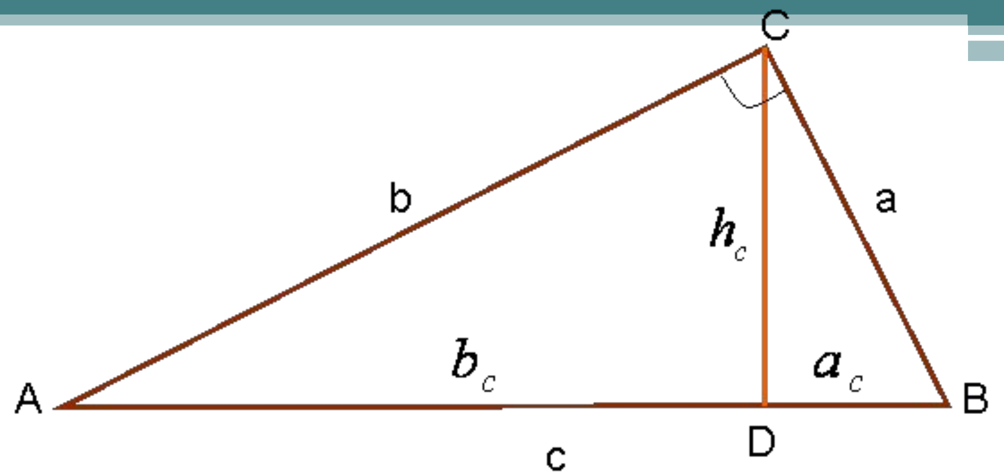
- Каждая из высот является одновременно биссектрисой и медианой.
- Центры описанной и вписанной окружностей совпадают.

глава5. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольник называют прямоугольным, если у него есть прямой угол.

Свойства

- Прямоугольный треугольник имеет две взаимно перпендикулярные стороны, называемые катетами; третья его сторона называется гипотенузой. По свойствам перпендикуляра и наклонных гипотенуза длиннее каждого из катетов (но меньше их суммы).
- Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу.
- Две высоты прямоугольного треугольника совпадают с его катетами. Поэтому одна из четырех замечательных точек попадает в вершины прямого угла треугольника.
- Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит в середине гипотенузы.
- Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является радиусом описанной около этого треугольника окружности.



Теорема Пифагора — одна из основополагающих теорем евклидовой геометрии, устанавливающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника.

Геометрическая формулировка. В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Алгебраическая формулировка. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. То есть, обозначив длину гипотенузы треугольника через c, а длины катетов через a и b: $a^2 + b^2 = c^2$.

Обратная теорема Пифагора. Для всякой тройки положительных чисел a, b и c, такой, что a2 + b2 = c2, существует прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c.

глава6. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Первый признак равенства треугольников.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны

AB=DE

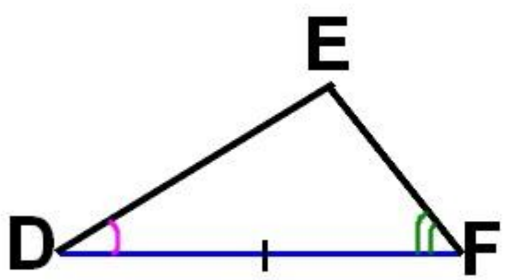
AC=DF.

$\angle A = \angle D$

$\Delta ABC = \Delta DEF$ по двум сторонам и углу между ними

Второй признак равенства треугольников.

Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны



AC=DF
∠ A = ∠ D
∠ C = ∠ F
ΔABC=ΔDEF по стороне и прилежащим к ней углам.

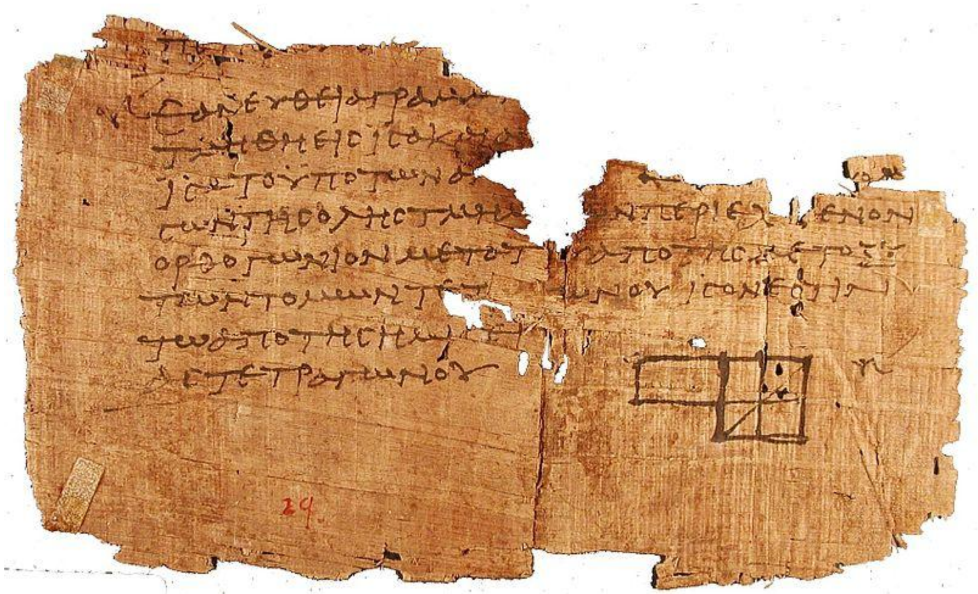
Третий признак равенства треугольников

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

AB=DE
BC=EF
AC=DF
ΔABC=ΔDEF по трём сторонам.

глава7. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ И ОКРУЖНОСТИ

ИСТОРИИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА



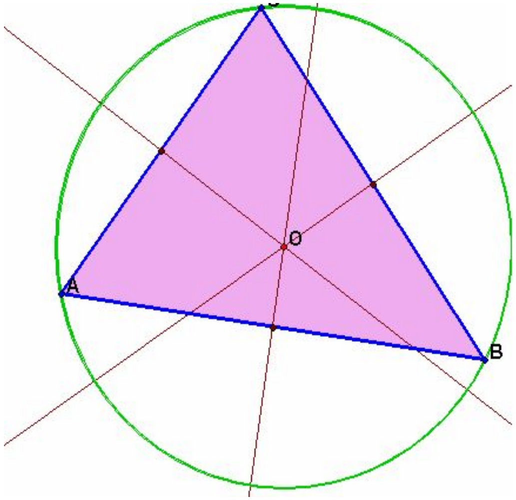
В четвертой книге "Начал" Евклид решает задачу: "Вписать круг в данный треугольник". Из решения вытекает, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанного круга. Из решения другой задачи Евклида вытекает, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в их серединах, тоже пересекаются в одной точке – центре описанного круга. В "Началах" не говорится о том, что и три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром (греческое слово "ортос" означает "прямой", "правильный"). Это предложение было, однако, известно. Говоря о медиане, Архимед доказал, что она является центром тяжести (барицентром) треугольника.

На вышеназванные четыре точки было обращено особое внимание, и начиная с XVIII века они были названы "замечательными" или "особенными" точками треугольника. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками, послужило началом для создания новой ветви элементарной математики – "геометрии треугольника" или "новой геометрии треугольника", одним из родоначальников которой стал Леонард Эйлер.

7.1.Центр описанной окружности

(точка пересечения серединных перпендикуляров)

Описанной окружностью называют окружность, проходящую через все три вершины треугольника



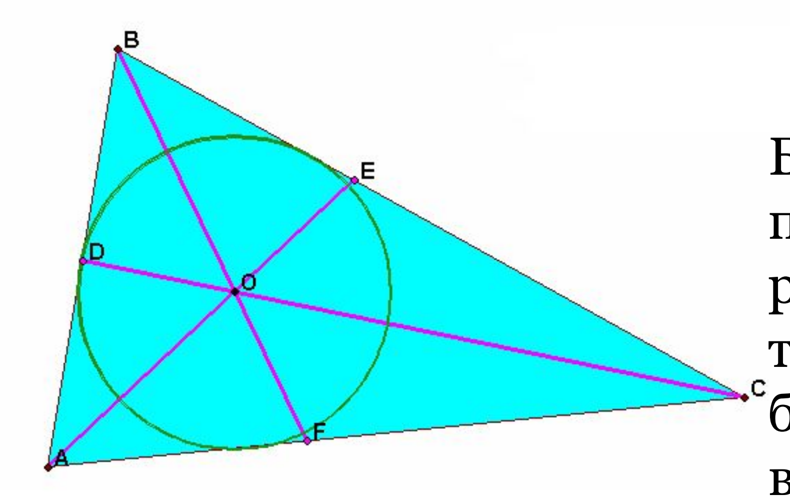
Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром описанной окружности. Точка пересечения серединных перпендикуляров в остроугольном треугольнике лежит внутри треугольника, в прямоугольном - на середине гипотенузы, а в тупоугольном - вне треугольника.

O – центр окружности;
R – радиус окружности.

7.2.Центр вписанной окружности

(точка пересечения биссектрис)

Вписанной окружностью треугольника называют окружность, касающуюся всех его сторон

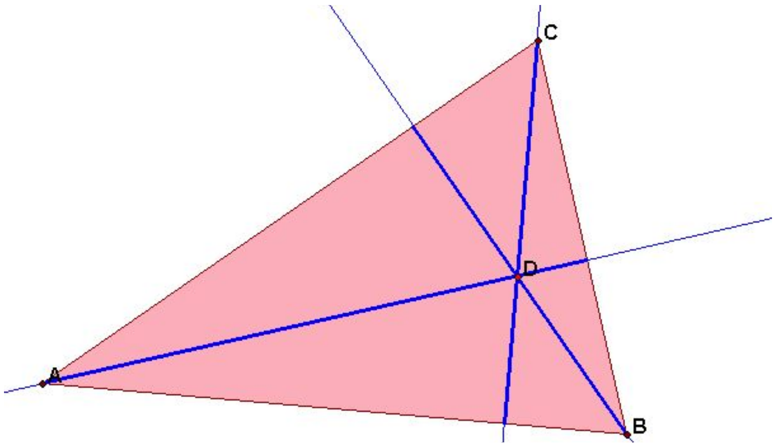


Биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, которая равноудалена от всех сторон треугольника. Точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности

7.3. Ортоцентр треугольника

(точка пересечения высот)

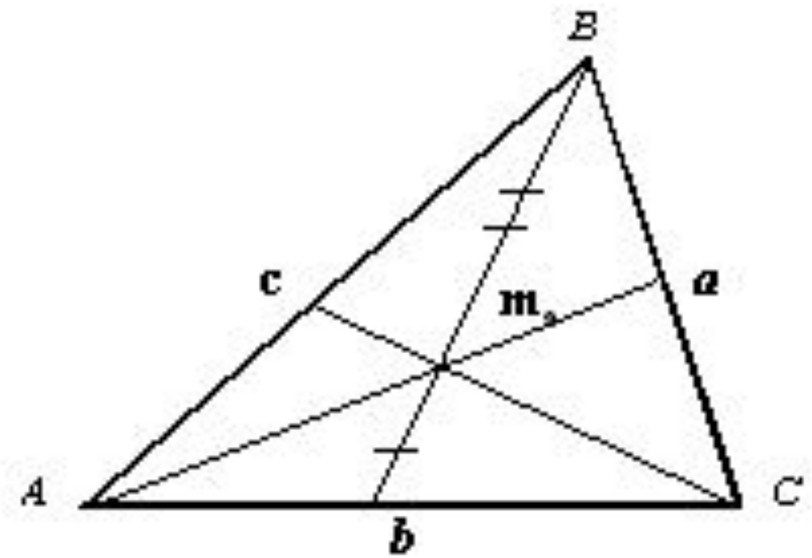
Ортоцентром треугольника называется точка пересечения прямых, которые содержат высоты треугольника



В остроугольном треугольнике ортоцентр лежит внутри треугольника, в прямоугольном - совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном треугольнике - находится вне треугольника на пересечении продолжений высот

7.4. Центр тяжести треугольника

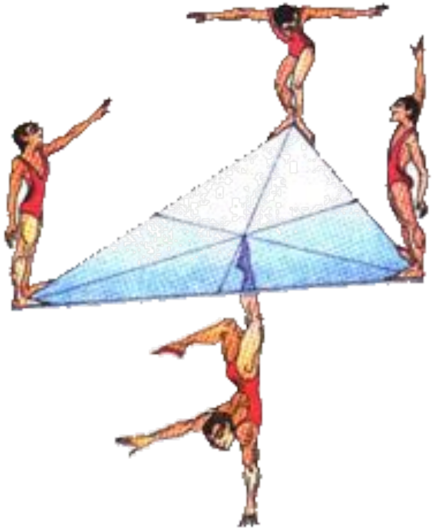
(точка пересечения медиан)



Точку пересечения медиан треугольника называют ***центром тяжести*** или центром масс

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в
отношении 2:1, начиная от вершины треугольника.

Оказывается, если поместить в вершины треугольника равные массы, то их центр попадет в эту точку. Центр равных масс иногда называют центроидом. В этой же точке располагается и центр масс однородной треугольной пластинки. Если подобную пластинку поместить на булавку так, чтобы острие последней попало точно в центроид, то пластинка будет находиться в равновесии



ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. За страницами учебника алгебры: Кн. для учащихся 7 – 9 кл. сред. Шк. - М.: Просвещение, 1990. – 224 с.: ил.
2. Энциклопедия для детей. Т.11.Математика / Глав. ред, М. Д. Аксёнова. – М.: Аванта+,1998. – 688 с.: ил.
3. Атанасян Л. С. Геометрия: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М. : Просвещение, 2002.
4. Большая математическая энциклопедия / Якушева Г.М. и др. – М.: Филол. О-во «СЛОВО»: ОЛМА-ПРЕСС, 2005. – 639 с.: ил.
5. Интернет ресурсы. Википедия