Дискретная математика

ДНФ и импликанты

- ***Функция f импліцирует функцию g***, если $f \to g \equiv 1$.

- <u>Замечание:</u> Если $f \to g \equiv 1$, $M_f \subseteq M_g$ то .

Импликант

- Если *f* импликирует *g*, и *f* представлена единственной элементарной конъюнкцией, то *f* называется ***импликантом*** *g*.
- Если из импликанта нельзя удалить ни одной переменной, то оно называется ***простым импликантом.***

Теорема

- Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представима единственной элементарной конъюнкцией

– всех n переменных, то $\left|M_f\right| = 1$;

– $m < n$ переменных, то

$$\left|M_f\right| = 2^{n-m} \; .$$

Пример

Пусть $f(x,y,z) = xyz$.

Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Значит $M_f = \{111\}$.

Пример

Пусть $f(x, y, z) = \bar{y}z$.

Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $y = 0$, $z = 1$.

Значит, чему равняется переменная x – неважно, и она может принимать любые значения. Поэтому

$$M_f = \{001, 101\}.$$

Утверждение 1

Представление функции в виде ДНФ соответствует представлению ее единичного множества в виде объединения единичных множеств входящих в эту ДНФ элементарных конъюнкций.

Пример

Пусть функция представлена своей ДНФ.

$$f(x,y,z) = x\bar{y}z \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \quad .$$

Тогда ее единичное множество может

быть представлено в виде:

$$M_f = M_{x\bar{y}z} \cup M_{\bar{y}\,\bar{z}} \cup M_{\bar{x}\,\bar{y}} =$$

$$= \{101\} \cup \{000, 100\} \cup \{000, 001\}$$

Получилось, что $M_f = \{000, 001, 100, 101\}$

Утверждение 2

Любая конъюнкция ДНФ функции является импликантом данной функции.

Утверждение 3

Если конъюнкция ДНФ функции не является простым импликантом, то можно найти соответствующий ей простой импликант (или импликанты) и заменить им (или их дизъюнкцией) непростой импликант.

Определение

ДНФ, состоящая только из простых импликантов, называется ***сокращенной.***

.

Пример

Пусть функция представлена своей ДНФ. $f(x,y,z)=\bar{x}\vee x\bar{y}z$

Тогда ее единичное множество имеет вид:

$$M_f=M_{\bar{x}}\cup M_{x\bar{y}z}=\{000,001,010,011\}\cup\{101\}=$$

$$=\{000,001,010,011,101\}$$

Пример

Очевидно, что $\overline{x}$ – это простой импликант. Он состоит из одной буквы, и если ее вычеркнуть, получится вырожденная конъюнкция (конъюнкция не имеющая переменных), что возможно только в случае, если $f = 1$.

Пример

Проверим, будет ли простым импликант $k = x\bar{y}z$.

Вычеркнем из него переменную *x*.

Пример

Получим конъюнкцию $k_1 = \bar{y}z$

Ее единичное множество содержит 2

набора: $M_{k_1} = \{ 001, 101 \} \subseteq M_f$

то есть k_1 по-прежнему является

импликантом f.

Значит $k = x\bar{y}z$ – не простой

импликант.