

**Загальна методологія
математичного програмування
та дослідження операцій**

Основні поняття та визначення. Ефективність операцій

Операція – будь-яка дія або система дій, що об'єднані єдиним задумом і спрямовані на досягнення визначеної цілі.

Конкретну реалізацію послідовності дій у просторі і часі називають **сценарієм операції**.

Під назвою **дослідження операцій в телекомунікаціях** розуміють застосування математичних методів для кількісного обґрунтування рішень стосовно розвитку інформаційно-телекомунікаційних технологій та підвищення ефективності їх використання.

Приклади операцій у телекомунікаційних системах:

- система заходів щодо підвищення надійності телекомунікаційних систем і пристроїв;
- система заходів зниження інформаційних ризиків (пошкодження інформації, знищення інформації, несанкціонований доступ до конфіденційної інформації);
- розміщення базових станцій стільникового зв'язку;
- розміщення замовлень на виготовлення апаратури;
- створення угруповання навігаційних та зв'язних супутників Землі;
- створення системи гарантійного обслуговування телекомунікаційних систем та мереж ;
- оптимізація параметрів та структури безпроводових сенсорних мереж.

Характеристики дій (фактори операцій), які змінювати в умовах операцій неможливо вважаються *параметрами операцій*.

Характеристики дій, за рахунок зміни яких проявляється позитивний результат називають *змінними* або *керуючими параметрами*.

Таким чином, операціями завжди можливо керувати. Будь-який вибір, в залежності від дослідника керуючих параметрів носить назву розв'язок (рішення, план операції чи стратегія). Розв'язки можуть бути такими, що задовольняють чи не задовольняють технічним та (або) економічним, та (або) екологічним, та (або) соціальним обмеженням, і відповідно носять назву *допустимі* або *недопустимі*. Зрозуміло, що останні відкидають, а серед перших обирають оптимальні, тобто ті, які у деякому розумінні мають перевагу над іншими.

Основна задача дослідження операцій – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень. Під прийняттям рішення в технічних системах розуміють остаточне затвердження усіх дій, що складають операцію на основі запропонованого оптимального розв'язку та із врахуванням додаткової інформації. Існує поняття «особа, що приймає рішення» (**ОПР**).

ОПР – це фізична особа або колектив фахівців. Для прийняття рішення ОПР використовує спеціальні методи і методики. Методи дослідження операцій складають теоретичну основу процесу підготовки та прийняття рішення.

Поряд із основною задачею (обґрунтування оптимальних розв'язків), при дослідженні операцій досліджують **додаткові задачі:**

- 1) порівняльний аналіз різних варіантів організації операцій;
- 2) оцінка впливу на результат операцій різноманітних змін параметрів операцій;
- 3) дослідження операцій на предмет виявлення критичних елементів (критичних параметрів операцій), тобто таких складових операцій, порушення запланованого функціонування яких, призводить до суттєвого погіршення остаточних результатів операцій.

Допоміжні задачі набувають особливого значення, коли дану операцію необхідно розглядати **не ізольованою, а як елемент цілісної системи операцій**. Дослідження цілісної системи операцій базується на так званому системному підході, який вимагає комплексного врахування взаємної залежності та обумовленості складових елементів системи операцій. Для отримання розумних(раціональних) рішень **необхідно** вміло використовувати як прийоми агрегування, тобто **укрупнення операцій**, так і їх декомпозиції, тобто **розбиття на окремі складові**.

Припустимо, що нам вдалося виділити окрему операцію. **Метою операції** є досягнення її найбільшої **ефективності**. Під ефективністю операції розуміємо ступінь її налаштованості на виконання задачі, що перед нею стоїть. Чим краще організована операція, тим вона ефективніша.

Критерієм оцінки або показником ефективності або цільовою функцією W називається функція фізичної величини чи сукупності фізичних величин, обчислення або вимірювання якої дозволяє кількісно оцінити результат виконання операції.

Порівнюючи показники ефективності для різного складу дій потрібно обрати найкращий спосіб для організації операції. Показник ефективності може бути задано аналітично, алгоритмічно або його можливо вимірювати. Конкретний вигляд показника ефективності, яким слід користуватися при чисельній оцінці ефективності, залежить від спеціальних властивостей конкретної операції, її цільової спрямованості, а також від задачі дослідження. Ця задача може бути поставлена в різних формах: детермінованій або із урахуванням елементів невизначеності.

Математичні моделі операцій
Загальні відомості про математичні моделі
операцій

Математичні моделі, які використовуються в задачах дослідження операцій можливо поділити на два класи:

- 1) аналітичні;
- 2) алгоритмічні.

Перші встановлюють формульні (**аналітичні**) залежності між **показником ефективності, змінними і параметрами задачі**. Зазвичай ці залежності записують у вигляді рівнянь або нерівностей: алгебраїчних, звичайних диференціальних або із частковими похідними. За допомогою аналітичних моделей вдається із задовільною точністю описати лише прості операції, де кількість елементів, що взаємодіють порівняно невелика.

В операціях значного масштабу, де взаємодіють багато елементів, що перебувають під дією випадкових факторів, доцільно застосовувати **алгоритмічні** математичні моделі, які дозволяють виконувати імітаційне моделювання операцій. Суть цього моделювання полягає в тому, що процес розвитку операції імітується на комп'ютері із усіма випадковостями, які цю операцію супроводжують.

Детерміновані аналітичні моделі операцій

Розглянемо задачу дослідження операції в загальній постановці, тобто без врахування специфічних властивостей конкретної операції та її цілей. Припустимо, що необхідно виконати деяку операцію, тобто керований захід, на остаточний результат якого можливо вплинути обираючи змінні характеристики цієї операції x_1, x_2, \dots, x_n .

Ефективність операції оцінюється за допомогою чисельного показника W . Оптимальним розв'язком задачі вважаються ті значення x_1, x_2, \dots, x_n при яких W досягає глобального максимуму.

$$M = \sup_{X \in G} W$$

де $X = [x_1, \dots, x_n]^T$, G – область допустимих розв'язків (ОДР).
В тому випадку коли необхідно досягти глобального мінімуму:

$$m = \inf_{X \in G} W$$

Цю задачу можливо переформулювати в задачу пошуку глобального максимуму, розглядаючи замість показника ефективності W показник ефективності $-W$.

Якщо математична модель побудована, то це означає:

- 1) відомі фактори операції $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ на які дослідники впливати не можуть;
- 2) визначено фізичний зміст і математична формалізація факторів операції x_1, x_2, \dots, x_n на які дослідники можуть впливати;
- 3) визначено спосіб отримання чисельного значення показника ефективності операції W , яке буде залежати від $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ та x_1, x_2, \dots, x_n ;
- 4) з'ясовано ОДР G , тобто умови обмежень, що діють в даній операції

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq 0, = 0, \geq 0 \}, j = \overline{1, q}$$

Загальна детермінована поставка задачі дослідження операції **формулюється** наступним чином: при заданих умовах (4) знайти такі розв'язки (2), при яких показник ефективності (3) досягає глобального максимуму.

Специфічним для детермінованої задачі дослідження операції, порівняно із задачами пошуку екстремумів гладкої функції (допускається існування похідних та частинних мішаних похідних високих порядків), є наявність обмежень нерівностей та недиференційовність, в деяких випадках, показника ефективності за елементами розв'язку x_1, x_2, \dots, x_n .

Якщо показник ефективності W залежить від x_1, x_2, \dots, x_n лінійно і обмеження (4) мають вид лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей, то глобальний максимум W знаходимо із використанням спеціального математичного апарату, що носить назву *лінійне програмування*. Якщо обмеження (4) та показник ефективності W мають інші властивості (наприклад, опуклі, сепарабельні, квадратичні), застосовується математичний апарат *опуклого або сепарабельного, або квадратичного програмування*. Якщо операція, за фізичним змістом операції, розділяється на декілька кроків чи станів, а показник ефективності W дорівнює сумі показників W_k , досягнутих на окремих етапах виконання операції, то для пошуку оптимального рішення можливо застосовувати метод *динамічного програмування*.

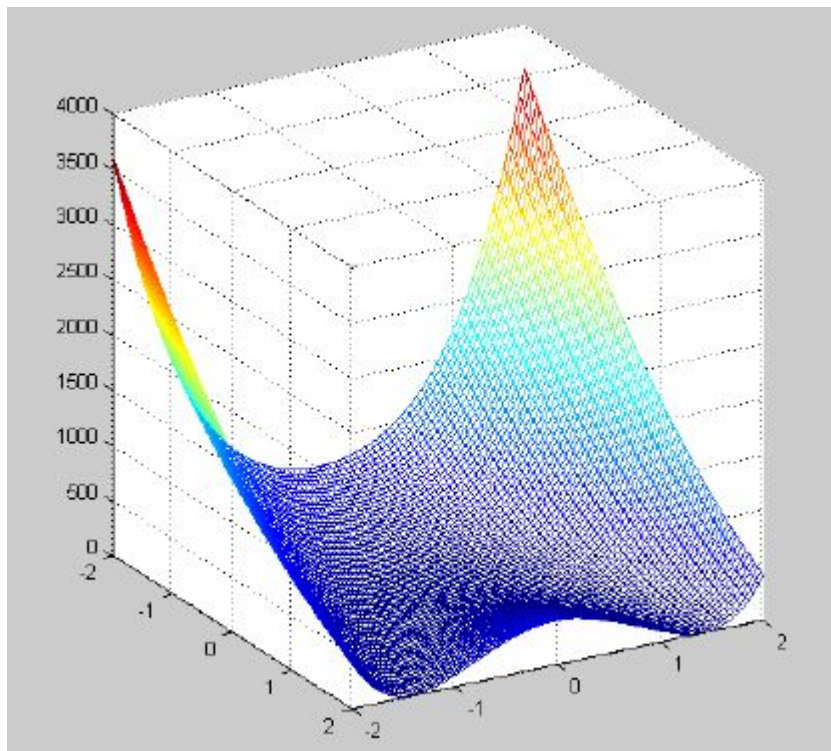


Рис.1. Функція Розенброка

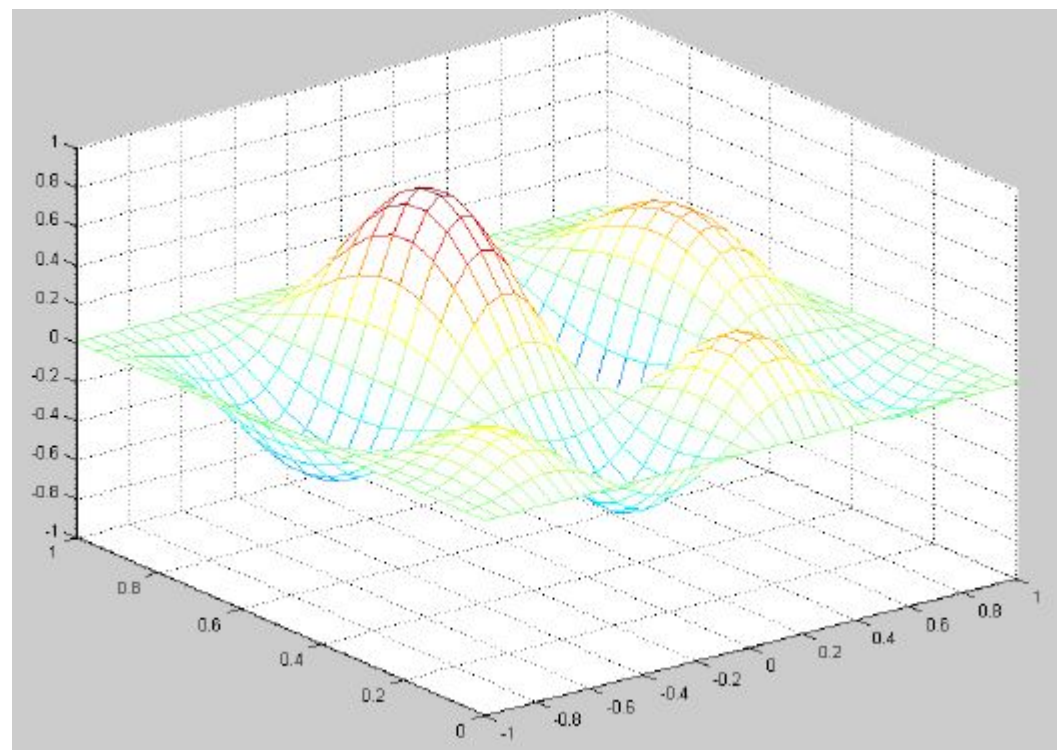


Рис. 2. Приклад багатоекстремального показника ефективності

Математичні моделі операцій із врахуванням невизначеності

В умовах **невизначеності** до складу математичної моделі операції входять 3-и категорії факторів(параметрів) операції:

- 1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, які відомі заздалегідь і не можуть бути змінені;
- 2) Y_1, Y_2, \dots, Y_k , які є невідомими, і впливати на них дослідник не може;
- 3) x_1, x_2, \dots, x_n , які необхідно обрати для надання операції бажаних властивостей.

Постановка задачі дослідження операції в умовах невизначеності набуває вигляду:

при заданих обмеженнях, фіксованих параметрах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, із урахуванням невідомих факторів Y_1, Y_2, \dots, Y_k , знайти такі елементи розв'язку x_1, x_2, \dots, x_n , які «по можливості» дозволяють показнику ефективності W досягти, як кажуть, «розумного» (раціонального) або вигідного значення.

Методи розв'язання задач дослідження операцій в такій постановці суттєво залежать від:

1. природи факторів Y_1, Y_2, \dots, Y_k ;
2. об'єму відомостей про математичну модель факторів x_1, x_2, \dots, x_n .

Невизначеність Y_1, Y_2, \dots, Y_k можливо класифікувати наступним чином:

- 1) Y_1, Y_2, \dots, Y_k – випадкові величини або випадкові функції із відомими статистичними даними, які дозволяють ідентифікувати їх сумісну функцію розподілу або сумісну щільність ймовірності;
- 2) Y_1, Y_2, \dots, Y_k – невідомі фактори, які неможливо вивчати за допомогою статистичних методів, тому що відсутні відповідні статистичні дані, або явища, із якими пов'язані Y_1, Y_2, \dots, Y_k взагалі не мають властивості статистичної стійкості;
- 3) Y_1, Y_2, \dots, Y_k – невідомі фактори, невизначеність яких пов'язана із діями «супротивника». Така ситуація є характерною для конкурентної боротьби на ринку телекомунікаційних послуг та в задачах захисту інформації.

В першому випадку математична модель задачі модифікується за рахунок зміни вигляду показника ефективності за допомогою одного з двох прийомів. **Перший прийом:** штучне зведення задачі з невизначеністю до детермінованої задачі дослідження операції шляхом заміни Y_1, Y_2, \dots, Y_k , що входять до складу показника ефективності, на їх відповідні математичні сподівання $M[Y_1], \dots, M[Y_k]$. **Другий прийом:** «оптимізація в середньому», коли в якості показника ефективності обирається математичне сподівання:

$$\bar{W} = M[W] = \int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int W(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_k) f(y_1, \dots, y_k) dy_1 \cdot \dots \cdot dy_k$$

В другому випадку, базуючись на знанні діапазону значень, обчислюються так звані локально-оптимальні рішення: оптимальне рішення для фіксованих значень y_1, \dots, y_k із відомого діапазону $y_1 \in (y_{min}; y_{max})$, \dots , $y_k \in (y_{min}; y_{max})$ відповідно, які в подальшому аналізують і знаходять деякі значення x_1, x_2, \dots, x_n , які є компромісним розв'язком, що не є строго оптимальним ні для однієї з досліджуваних вище умов локальної оптимальності, але є прийнятними для розв'язання задачі в цілому. Таких прийнятних розумних розв'язків може бути декілька.

В третьому випадку для пошуку розв'язку використовується так звана теорія ігор – математична теорія конфліктних ситуацій. Вважаючи, що протидіюча нам у конфлікті сторона завжди прагне максимізувати наші збитки, то зрозумілою з нашого боку є стратегія (тобто таке рішення), яка мінімізує максимум нанесених збитків. Кажуть, що має місце так звана мінімаксна стратегія.

Математичні моделі операцій із декількома показниками ефективності

Часто зустрічаються випадки, коли ефективність операції оцінюють не по одному, а по декількох показниках ефективності W_1, W_2, \dots, W_l . Тобто, математична модель операції в задачі із декількома показниками ефективності, як в детермінованому випадку, так і у випадку з невизначеністю, відрізняється від розглянутих тим, що замість скалярного показника ефективності $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, або $W(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, x_1, x_2, \dots, x_n)$ використовується векторний показник ефективності:

$$\Omega = \left[W_1(x_1, \dots, x_n), \dots, W_l(x_1, \dots, x_n) \right]^T$$

або

$$\Omega = \left[W_1(Y_1, \dots, Y_k, x_1, \dots, x_n), \dots, W_l(Y_1, \dots, Y_k, x_1, \dots, x_n) \right]^T.$$

Бажаною є постановка задачі дослідження операцій, що вимагає пошуку такого розв'язку x_1, x_2, \dots, x_n , при якому усі складові векторного показника ефективності досягають свого екстремального значення. **В загальному випадку такого розв'язку не існує**, але використовуючи методи розв'язання багатокритеріальних задач, або, як ще кажуть, методи оптимізації за векторним критерієм, можливо побудувати процедури вилучення неконкурентноздатних варіантів рішення і тим самим звузити множину розв'язків до меж, в яких виконується подальший вибір раціонального рішення.