Дискретная математика

Булева алгебра

Формулы, представляющие одну и ту же функцию называются ***равносильными (эквивалентными).***

Булевы операции – это конъюнкция ($\wedge$), дизъюнкция ($\vee$) и отрицание ($\neg$).

Булева алгебра – это множество логических функций с введенными на нем булевыми операциями.

$$A = \left(P_2, \wedge, \vee, \neg\right).$$

Основные свойства булевых операций

Закон коммутативности

$$1)\ x \vee y = y \vee x, \qquad 2)\ x \cdot y = y \cdot x,$$

Закон ассоциативности

$$3)\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$$

$$4)\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$

Основные свойства булевых операций

Закон дистрибутивности

$$5)\ (x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z,$$

$$6)\ (x \cdot y) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z),$$

Закон де Моргана

$$7)\ \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y},$$

$$8)\ \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

Основные свойства булевых операций

Закон уничтожения кратности

$$9)\, x \vee x = x,$$

$$10)\, x \cdot x = x,$$

Закон исключенного третьего

$$11)\, x \vee \overline{x} = 1,$$

Закон противоречия

$$12)\, x \cdot \overline{x} = 0,$$

Основные свойства булевых операций

Закон поглощения

$$13)\, x \vee xy = x,$$

$$14)\, x \cdot (x \vee y) = x,$$

Закон двойного отрицания

$$15)\, \overline{\overline{x}} = x,$$

Основные свойства булевых операций

Свойства констант

$$16)\; x \vee 0 = x, \qquad 17)\; x \cdot 0 = 0,$$

$$18)\; x \vee 1 = 1, \qquad 19)\; x \cdot 1 = x,$$

$$20)\; 0 \vee 1 = 1, \qquad 21)\; 0 \cdot 1 = 0.$$

Основные эквивалентности

Закон простого склеивания

$$22)\ x\bar{y} \vee xy = x$$

$$23)\ (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee y) = x$$

Закон расщепления

$$24)\ x = x\bar{y} \vee xy$$

$$25)\ x = (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee y)$$

Основные эквивалентности

Первый закон обобщенного склеивания

$$26)\, xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z},$$

Второй закон обобщенного склеивания

$$27)\, x \vee \bar{x}y = x \vee y.$$

Основные эквивалентности

Эквивалентность

$$28)\ x \sim x = 1, \qquad 29)\ x \sim \bar{x} = 0,$$

$$30)\ x \sim 1 = x, \qquad 31)\ x \sim 0 = \bar{x}.$$

Основные эквивалентности

Сложение по модулю 2

$$32)\ x \oplus x = 0, \qquad 33)\ x \oplus \overline{x} = 1,$$

$$34)\ x \oplus 1 = \overline{x}, \qquad 35)\ x \oplus 0 = x.$$

Основные эквивалентности

Импликация

$$36)\ x \to x = 1,$$

$$37)\ x \to \bar{x} = \bar{x},$$

$$38)\ \bar{x} \to x = x,$$

$$39)\ x \to 0 = \bar{x},$$

$$40)\ x \to 1 = 1,$$

$$41)\ 0 \to x = 1,$$

$$42)\ 1 \to x = x.$$

Утверждение о единственности СДНФ логической функции

СДНФ любой логической функции единственна с точностью до порядка элементарных конъюнкций и порядка элементов в конъюнкциях.

Единственная логическая функция, не имеющая СДНФ, функция –константа 0.

Теорема о преобразовании равносильных формул друг в друга

Пусть F_1 и F_2 равносильные формулы.

Тогда существует последовательность эквивалентных преобразований, переводящих одну эквивалентную формулу в другую.

Доказательство:

Так как формулы F_1 и F_2 равносильны, то они представляю одну функцию f .

У каждой функции единственна СДНФ.

Приведем F_1 и F_2 к СДНФ.

$$F_1 \Rightarrow СДНФ; \quad F_2 \Rightarrow СДНФ.$$

Доказательство:

Обратим второе преобразование.

$$F_1 \Rightarrow СДНФ \Rightarrow F_2$$

Получим последовательность преобразований, переводящих

F_1 в F_2

Теорема о представимости логической функции булевой формулой

Любая логическая функция представима булевой формулой.

Доказательство: У каждой функции существует СДНФ – булева формула. Функция константа 0 может быть выражена булевой формулой вида: $x \cdot \overline{x} = 0.$